

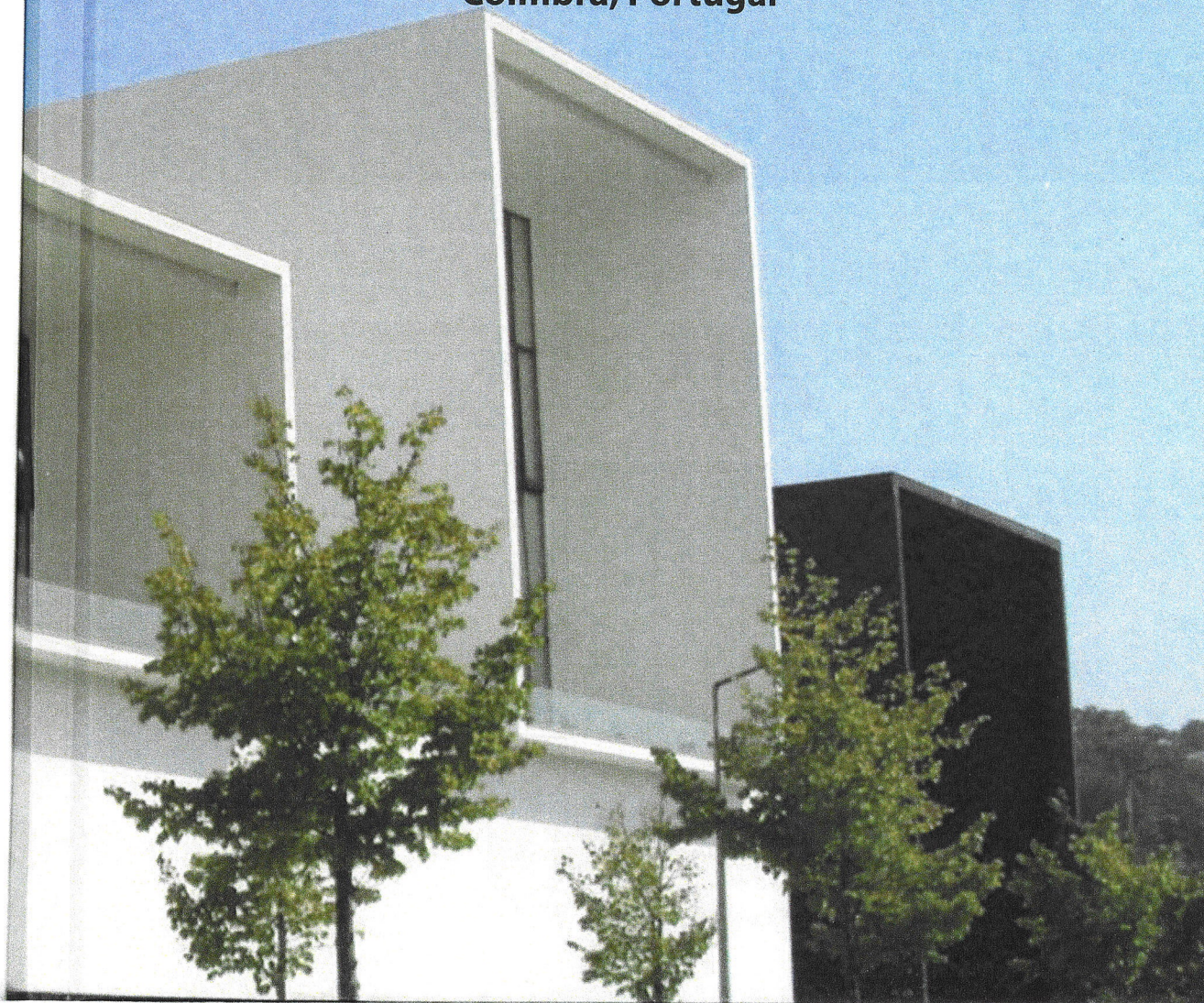
Métodos Numéricos em Engenharia 2011

Editores:

António Tadeu
Isabel Narra Figueiredo
Luís Filipe Menezes
Paulo Amado Mendes

Antonio Rodríguez-Ferran
Irene Arias
Jesús M. Blanco

Coimbra, Portugal



Editores:

António Tadeu
Isabel Narra Figueiredo
Luís Filipe Menezes
Paulo Amado Mendes

Antonio Rodríguez-Ferran
Irene Arias
Jesús M. Blanco

Publicado por:

APM|AC

SEMNI

© APMTAC - Associação Portuguesa de Mecânica Teórica, Aplicada e Computacional
Laboratório Nacional de Engenharia Civil
Av. do Brasil, 101
1700-066 Lisboa
apmtac@lnec.pt
www-ext.lnec.pt/APMTAC

Métodos Numéricos em Engenharia 2011
Numerical Methods in Engineering 2011
António Tadeu, Isabel Narra Figueiredo, Luís Filipe Menezes, Paulo Amado Mendes,
Antonio Rodríguez-Ferran, Irene Arias e Jesús M. Blanco (Eds.)

Primeira edição: Junho 2011

Impressão: Gráfica Ediliber, Lda.
Depósito Legal: 329390/11

COMISSÕES / COMMITTEES

COMISSÃO DIRECTIVA / STEERING COMMITTEE

APMTAC

António Tadeu (DEC-FCTUC)
Isabel Narra Figueiredo (DM-FCTUC)
Luís Filipe Menezes (DEM-FCTUC)

SEMNI

Antonio Rodríguez-Ferran (UPC)
Irene Arias (UPC)
Jesús M. Blanco (UPV-EHU)

COMISSÃO ORGANIZADORA / ORGANIZING COMMITTEE

António Portugal (DEQ - FCTUC)
Antonio Rodríguez-Ferran (UPC)
António Tadeu (DEC-FCTUC)
Helder Araújo (DEEC- FCTUC)
Irene Arias (UPC)
Isabel Narra Figueiredo (DM- FCTUC)
Jesús M. Blanco (UPV-EHU)
Luís Filipe Menezes (DEM-FCTUC)
Paulo Amado Mendes (DEC-FCTUC / ITeCons)
Paulo Carvalho (DEI-FCTUC)
Pedro Vieira Alberto (DF - FCTUC)

COMISSÃO CIENTÍFICA / SCIENTIFIC COMMITTEE

Abel Santos (FEUP)	Fermín Navarrina (UDC)
Adélia Sequeira (IST)	Filipe Teixeira Dias (UA)
Adélio Mendes (DEQ-FCTUC)	Helder Rodrigues (IST)
Anca-Maria Toader (UL)	Ignasi Colominas (UDC)
António Gameiro (FCTUC)	João Rocha Almeida (UNL)
Antonio Huerta (UPC)	Jorge Henriques (DEI-FCTUC)
António Mendes (UBI)	José Augusto Mendes Ferreira (FCTUC)
António Mendes Ferreira (FEUP)	José Carlos Pereira (IST)
Benjamín Suárez (UPC)	José César de Sá (FEUP)
Carlos Alves (IST)	José Luís Alves (UM)
Carlos Fiolhais (FCTUC)	José Luis Pérez Aparicio (UPV)
Carlos Mota Soares (IST)	José Manuel Sousa (DEQ-FCTUC)
Carlos Pina (LNEC)	José María Goicolea (UPM)
Dinar Camotim (IST)	Juana Fortes (LNEC)
Eduardo Arantes e Oliveira (IST)	Luis O. Silva (IST)
Eduardo Borges Pires (IST)	Luís Simões da Silva (FCTUC)
Eduardo Conceição (DEQ-FCTUC)	Luísa Durães (DEQ-FCTUC)
Elias Cueto (UNIZAR)	Manuel Casteleiro (UDC)
Ércilia Sousa (FCTUC)	Miguel Cervera (UPC)
Eugenio Oñate (UPC)	Miguel Coimbra (FCUP)

COMISSÃO CIENTÍFICA / SCIENTIFIC COMMITTEE (cont.)

Paulo Firme Martins (IST)	Raimundo Delgado (FEUP)
Paulo Lourenço (UM)	Raul Fangueiro (UM)
Paulo Oliveira (UBI)	Renato Natal Jorge (FEUP)
Paulo Piloto (IPB)	Rui Brito (CNC/FCTUC)
Paulo Vila Real (UA)	Rui Faria (FEUP)
Pedro Lopes Simões (DEQ-FCTUC)	Rui Paiva (DEI-FCTUC)
Pedro Oliveira (UM)	Xavier Oliver (UPC)
Rafael Gallego (UGR)	

ORGANIZADORES DE SESSÕES TEMÁTICAS / THEMATIC SESSIONS' ORGANIZERS

Abel Santos	José Vieira de Lemos
Alex Barbat	Julia Novo
Álvaro Cunha	Julietta António
Anca-Maria Toader	Luís Godinho
Andrés Sáez	M ^a Angeles Pérez
António Ferreira	Manuel L. Romero
Antonio Huerta	Marian Gutiérrez
Begoña Calvo	Mário Teles Figueiredo
Carlos Alberto da Conceição António	Michael Stingl
Carlos Alves	Niels Bay
Cristian Barbarosie	Nuno Lopes
Dinar Camotim	Nuno Silvestre
Elías Cueto	Nuno Simões
Ercília Sousa	Paulo Amado Mendes
Ernesto Costa	Paulo Avilez-Valente
Etelvina Javierre	Paulo de Carvalho
F. Chinesta	Paulo Fernandes
Felipe Gabaldón Castillo	Paulo Firme Martins
Francisco Fenandez de Vega	Paulo Piloto
Francisco J. Navarro	Pedro V. Alberto
François Jouve	Rafael Jiménez Rodríguez
Guillaume Houzeaux	Raimundo Delgado
Guillermo Rus Carlborg	Raquel Bailón
Jaime Ramis Soriano	Renato Natal Jorge
Javier de Frutos	Ricardo P. Dias
Jesús María Blanco	Robertt A. Fortes Valente
João Folgado	Rui Calçada
João Manuel R.S. Tavares	Rui Carneiro Barros
João Paulo C. Rodrigues	Rui Faria
João Xavier	Sílvia Barbeiro
Jorge Henriques	Xavier Oliver Olivella
José Luis Morales Guerrero	Xavier Roca

SECRETARIADO / SECRETARIAT

Inês Ferreira (ITeCons)
Rita Faria (ITeCons)

DINÂMICA ESTRUTURAL / STRUCTURAL DYNAMICS

ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DINÂMICO DA ANTENA ESMIADA DE MUGES SOB A ACÇÃO DO VENTO <i>Fernando Bastos, Álvaro Cunha, Elsa Caetano</i>	91
ANÁLISIS DINÂMICO DE PROBLEMAS ESTRUCTURALES CON GRANDES ROTACIONES <i>Juan José Vega González, José Ángel González Pérez, Ramón Abascal García</i>	92
CARGAS EXPLOSIVAS SOBRE PILARES Y FORJADOS MODELADOS CON ELEMENTOS TIPO VIGA Y LÁMINA <i>Mario Bermejo, José M. Goicolea, Felipe Gabaldón, Anastasio Santos</i>	93
COMPARACIÓN PROBABILISTA ENTRE EL ANÁLISIS ESTÁTICO Y DINÂMICO INCREMENTAL DE EDIFICIOS DE HORMIGÓN ARMADO <i>Yedy F. Vargas, Lluís G. Pujades, Alex H. Barbat, Jorge E. Hurtado</i>	94
IMPROVED LUMPED MASS MATRIX FOR TIMOSHENKO'S FLEXURAL WAVE PROPAGATION <i>Jose Elias Laier</i>	95
INFLUENCIA DE LOS FENÓMENOS DE INTERACCIÓN EN LAS PROPIEDADES DINÁMICAS DE ESTRUCTURAS DE EDIFICACIÓN PILOTADAS <i>Cristina Medina, Luis A. Padrón, Juan J. Aznárez, Orlando Maeso</i>	96
METODOLOGIA PARA ANÁLISE ESTOCÁSTICA RÁPIDA DE PONTES PEDONAIS SUJEITAS À PASSAGEM DE FLUXOS DE PEÕES <i>Leonel Ramos, Álvaro Cunha, Elsa Caetano</i>	97
MODELLING CROWD LOAD FOR FLOOR VIBRATION ANALYSIS <i>Javier Fernández, Lutz Hermanns, Enrique Alarcón, Javier Cara</i>	98
PROPUESTA DE MODELO VISCOZO EQUIVALENTE PARA LA VIGA DE TIMOSHENKO CON COMPORTAMIENTO VISCOELÁSTICO <i>M. Lázaro, J.L. Pérez-Aparicio, C. Fernández</i>	99
 EFEITOS DINÂMICOS EM VIAS DE ALTA VELOCIDADE / DYNAMIC EFFECTS IN HIGH-SPEED RAILWAY TRACKS	
DYNAMIC EFFECT OF HIGH SPEED RAILWAY TRAFFIC LOADS ON THE BALLAST TRACK SETTLEMENT <i>K. Nguyen, J. M. Goicolea, F. Galbadón</i>	103
DYNAMIC EFFECTS ON CULVERTS FOR HIGH SPEED TRAINS <i>Jaime Vega, Lutz Hermanns, Enrique Alarcón, Alberto Fraile</i>	104
ESTIMATIVA DOS PARÂMETROS DE RIGIDEZ E DE AMORTECIMENTO PARA MODELOS SIMPLIFICADOS DE VIAS FÉRREAS NÃO BALASTRADAS <i>N. Ribeiro, C. Vale, P. Costa, R. Calçada, R. Delgado</i>	105
INTERACCIÓN DINÁMICA VEHÍCULO-ESTRUCTURA-SUELO EN PUENTES DE FERROCARRIL <i>A. Romero, P. Galván, J. Domínguez</i>	106

INFLUENCIA DE LOS FENÓMENOS DE INTERACCIÓN EN LAS PROPIEDADES DINÁMICAS DE ESTRUCTURAS DE EDIFICACIÓN PILOTADAS

Cristina Medina*, Luis A. Padrón, Juan J. Aznárez y Orlando Maeso

Instituto Universitario de Sistemas Inteligentes y Aplicaciones Numéricas en Ingeniería (SIANI)
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

Edificio Central del Parque Científico y Tecnológico del Campus Universitario de Tafira
e-mail: : {cmedina, lpadron, jjaznarez, omaeso}@siani.es, web: <http://www.siani.es>

Palabras clave: cimentaciones pilotadas, interacción suelo-estructura, amortiguamiento, frecuencia natural

Resumen. *Es conocida la importancia que los fenómenos de interacción suelo-estructura tienen en el comportamiento dinámico de edificios. La evaluación correcta de la respuesta dinámica de estas y otras estructuras, requiere del desarrollo de modelos que incorporen de forma rigurosa la interacción entre la estructura y el terreno en el que se cimenta. Dichos fenómenos de interacción dependen de factores tales como: el tipo de cimentación, su geometría y grado de enterramiento, el tipo de suelo y su estratigrafía así como las características de la estructura. En la línea de otros trabajos ya realizados por otros autores para estructuras sobre zapatas superficiales o enterradas, en esta Ponencia se presenta el desarrollo y estudio de un modelo simple de interacción suelo-estructura en el dominio de la frecuencia, que permitirá evaluar la influencia de estos factores en la respuesta de estructuras de edificación cimentadas con pilotes frente a cargas de origen sísmico. En este modelo, la estructura se considera un sistema discreto con un número finito de grados de libertad, el conjunto terreno-pilotes se representará a través de resortes y amortiguadores equivalentes cuyas propiedades dependen de la frecuencia de excitación y, por último, la sollicitación (onda sísmica) a través de sus efectos (desplazamiento y giro) en la base de la estructura. El modelo permitirá cuantificar el efecto de la interacción sobre variables de la estructura tales como su frecuencia natural, esfuerzos y amortiguamiento y la influencia que tienen sobre la misma las características de la cimentación (número de pilotes, separación, longitud, etc...).*

INFLUENCIA DE LOS FENÓMENOS DE INTERACCIÓN EN LAS PROPIEDADES DINÁMICAS DE ESTRUCTURAS DE EDIFICACIÓN PILOTADAS

Cristina Medina*, Luis A. Padrón, Juan J. Aznárez y Orlando Maeso

Instituto Universitario de Sistemas Inteligentes y Aplicaciones Numéricas en Ingeniería (SIANI)
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria
Edificio Central del Parque Científico y Tecnológico del Campus Universitario de Tafira
e-mail: : {cmedina, lpadron, jjaznarez, omaeso}@siani.es, web: <http://www.siani.es>

Palabras clave: cimentaciones pilotadas, interacción suelo-estructura, amortiguamiento, frecuencia natural

Resumen. *Es conocida la importancia que los fenómenos de interacción suelo-estructura tienen en el comportamiento dinámico de edificios. La evaluación correcta de la respuesta dinámica de estas y otras estructuras, requiere del desarrollo de modelos que incorporen de forma rigurosa la interacción entre la estructura y el terreno en el que se cimenta. Dichos fenómenos de interacción dependen de factores tales como: el tipo de cimentación, su geometría y grado de enterramiento, el tipo de suelo y su estratigrafía así como las características de la estructura. En la línea de otros trabajos ya realizados por otros autores para estructuras sobre zapatas superficiales o enterradas, en esta Ponencia se presenta el desarrollo y estudio de un modelo simple de interacción suelo-estructura en el dominio de la frecuencia, que permitirá evaluar la influencia de estos factores en la respuesta de estructuras de edificación cimentadas con pilotes frente a cargas de origen sísmico. En este modelo, la estructura se considera un sistema discreto con un número finito de grados de libertad, el conjunto terreno-pilotes se representará a través de resortes y amortiguadores equivalentes cuyas propiedades dependen de la frecuencia de excitación y, por último, la sollicitación (onda sísmica) a través de sus efectos (desplazamiento y giro) en la base de la estructura. El modelo permitirá cuantificar el efecto de la interacción sobre variables de la estructura tales como su frecuencia natural, esfuerzos y amortiguamiento y la influencia que tienen sobre la misma las características de la cimentación (número de pilotes, separación, longitud, etc...).*

1. INTRODUCCIÓN

El análisis del comportamiento dinámico de estructuras de diferente tipología puede abordarse a partir del desarrollo de modelos numéricos que posibilitan el estudio de desplazamientos, deformaciones, esfuerzos y tensiones en cualquier punto de la estructura ante cargas de cualquier tipo variables en el tiempo. Es posible, así, obtener de forma precisa la respuesta dinámica de una estructura ante, por ejemplo, las vibraciones que se transmiten desde el terreno a través del cimiento durante el desarrollo de un evento de carácter sísmico.

Los modelos a desarrollar para el estudio sísmico de estructuras deben tener en cuenta aspectos tales como el carácter propagatorio de la excitación y el ángulo de incidencia de las ondas sísmicas sobre el emplazamiento, los efectos de distorsión del campo incidente asociados a la topografía, estratigrafía o la propia geometría del cimiento y, en general, cualquier aspecto relacionado con la interacción entre la estructura analizada y el terreno de cimentación. Considerar con rigor estos efectos requiere de la utilización de modelos directos que tengan en cuenta la estructura y el terreno y que formulen adecuadamente la interacción mutua. Su principal inconveniente es el elevado número de grados de libertad que implican, de ahí que estos modelos directos, hasta el desarrollo reciente de computadores de grandes prestaciones accesibles, tuviesen un campo de aplicación muy restringido. La metodología desarrollada entonces (ampliamente utilizada actualmente en algunos problemas) se basa en la aplicación de técnicas de subestructuración que permitan el análisis dinámico teniendo en cuenta los fenómenos de interacción de forma simplificada [1].

En este trabajo, se explotan las ventajas de la *Metodología de Subestructuración*. Esta metodología es sencilla y fácil de implementar, proporciona resultados suficientemente precisos para el tipo de problemas que se abordan en este trabajo, y al mismo tiempo permite realizar análisis paramétricos con muy poco coste computacional (contando con las funciones de impedancia dinámica y los factores de interacción cinemática como datos de partida).

El problema de la interacción dinámica suelo-estructura se compone de la interacción inercial y la interacción cinemática. Los efectos inerciales afectan directamente al comportamiento de la estructura; aumentan el periodo fundamental de vibración y modifican el amortiguamiento. Estos fenómenos ocurren por el aumento de flexibilidad que sufre la estructura al encontrarse sin empotramiento fijo en su base. La interacción cinemática se refiere al comportamiento de la cimentación, la que por su geometría y rigidez filtra las altas frecuencias de la excitación. La cimentación, al incorporarse al sistema, experimenta efectos de torsión y cabeceo, lo que origina, generalmente, reducción en su movimiento. Para este trabajo se han considerado los efectos de la interacción inercial y despreciado los de la interacción cinemática [2].

En cuanto a la respuesta de la superestructura, los efectos de interacción suelo-estructura (SSI) en edificios han sido objeto de estudio durante más de treinta años. Los traba-

jos pioneros en este área, que investigaron la influencia de la flexibilidad del suelo en el comportamiento dinámico de un sistema de un grado de libertad que representa el modo fundamental de una estructura a cortante, fueron presentados por Parmelee [3], Perelman et al [4], Parmelee et al [5] y Sarrazin et al [6]. A partir de estos trabajos, Veletsos y Meek [7], y Bielak [8], propusieron, por separado, aproximaciones basadas en modelos monodimensionales dirigidos a ofrecer pautas para el diseño de estructuras. Algunos trabajos posteriores ampliaron estos estudios y analizaron la influencia del grado de embebimiento de la cimentación, y de los fenómenos de interacción cinemática (*e.g.* [9, 10, 11, 12]).

El análisis de la respuesta dinámica de estructuras de edificación cimentadas mediante pilotes tiene gran interés, principalmente, por dos motivos básicos: el gran número de edificaciones de estas características en zonas de peligrosidad sísmica y la necesidad, aún hoy en día, de alcanzar una mayor y mejor comprensión de los fenómenos implicados en la respuesta dinámica de estructuras de estas características. En este sentido, se ha desarrollado e implementado un modelo acoplado de Elementos de Contorno y Elementos Finitos (MEC-MEF) tridimensional armónico que aprovecha las ventajas de cada metodología para el análisis dinámico directo de este tipo de estructuras. Este programa, ha permitido el análisis de la respuesta de cimentaciones pilotadas, tanto en impedancias como en interacción cinemática [13, 14, 15].

2. METODOLOGÍA DE SUBESTRUCTURACIÓN

Las funciones de impedancia dinámica y los factores de interacción cinemática de las cimentaciones se utilizan con frecuencia para predecir el comportamiento sísmico de estructuras teniendo en cuenta los efectos de la interacción suelo-estructura. Esto se logra a través del empleo de modelos de subestructuración en los cuales el suelo es reemplazado por resortes y amortiguadores que representan su rigidez y amortiguamiento respectivamente. Por otra parte, el movimiento sísmico de excitación que se emplea en el modelo de subestructuración puede verse modificado de forma significativa por la presencia de la cimentación en el suelo. Por lo tanto, en muchas ocasiones, el movimiento de la cimentación debe calcularse teniendo en cuenta estos efectos de interacción cinemática.

En el caso de una cimentación rígida es válido dividir la resolución del problema en tres pasos:

1. determinación del movimiento de la cimentación rígida de masa despreciable cuando está sometida al mismo movimiento de excitación que el sistema completo.
2. determinación de la impedancia en función de la frecuencia, para los grados de libertad relevantes. Este paso se corresponde con la condensación dinámica de los grados de libertad del suelo. Esto conduce a los llamados “resortes” del suelo.
3. cálculo de la respuesta de la estructura real sustentada sobre “resortes” dependientes de la frecuencia que representan el suelo y sometida en la base de estos “resortes” al movimiento calculado en el paso 1.

La única aproximación que implica esta metodología tiene que ver con la deformabilidad de la cimentación estructural. Si esta cimentación fuese rígida, la solución obtenida mediante este procedimiento debería ser idéntica a la que proporciona el método directo (suponiendo por supuesto definiciones consistentes del movimiento y los mismos procedimientos numéricos). [1]

3. DESCRIPCIÓN DEL MODELO

Este estudio se centra en la respuesta dinámica de sistemas de un solo grado de libertad en su condición de base rígida. Este modelo corresponde a un edificio de una planta o al modo fundamental de vibración de estructuras multimodales de varias plantas. Varios autores [10] resaltan el hecho de que la interacción suelo estructura afecta principalmente al modo fundamental de vibración de estructuras de varias plantas, justificando de este modo el uso de esta aproximación simplificada. De esta manera, su comportamiento dinámico puede definirse mediante su periodo fundamental en base rígida T , la altura h de la resultante de las fuerzas de inercia para el primer modo, la masa m implicada en este modo, y el ratio de amortiguamiento correspondientes a la estructura sobre base rígida ξ (Véase la *Figura 1*). La rigidez horizontal de la estructura es $k = 4\pi^2 m/T^2$, y se ha considerado el amortiguamiento histerético del material de la estructura mediante una expresión compleja de la rigidez del tipo $K = k(1 + 2i\xi)$.

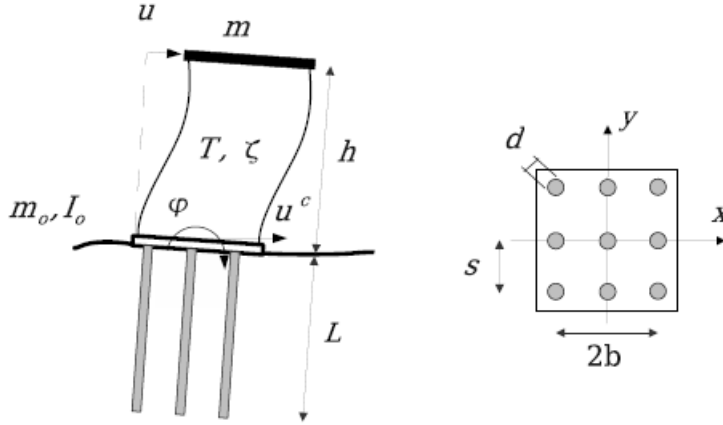


Figura 1: Definición del problema

Por otra parte, se considera que esta superestructura se sustenta sobre una cimentación pilotada de base cuadrada embebida en un semiespacio viscoelástico. El grupo de pilotes está definido por la longitud L y el diámetro de la sección d , la distancia entre centros de pilotes adyacentes s , la masa del encepado m_o , y el momento de inercia respecto de un eje horizontal que pasa por el centro de gravedad del encepado I_o , así como el momento de inercia de la planta I .

Si se tiene en cuenta la interacción suelo-estructura, el comportamiento del sistema puede aproximarse como el de un sistema de tres grados de libertad, definido por el desplazamiento horizontal u_r^c y giro φ_r^c de la cimentación, unido al desplazamiento horizontal de la planta \tilde{u} .

Las estructuras son excitadas en la base y los desplazamientos en campo libre se han considerado como un movimiento armónico.

Los efectos del empotramiento de la cimentación, los estratos de la cimentación y el amortiguamiento del material en el subespacio no se han tenido en cuenta.

La cimentación se ha idealizado como una placa rígida y cuadrada, y los pilares de la estructura se han considerado de masa despreciable e inextensibles axialmente. Ambas, la masa de la cimentación y la masa de la estructura se han supuesto uniformemente distribuidas en áreas cuadradas.

Este modelo de cimentación-estructura parece haber sido utilizado por primera vez por Parmelee [3] en 1967, y ha constituido la base de la mayoría de las investigaciones posteriores.

3.1. Modelo de subestructuración

Este problema puede estudiarse mediante una aproximación por subestructuración, en la cual el sistema está dividido en el sistema cimiento-estructura, y la rigidez y el amortiguamiento entre el suelo y el cimiento, representada por medio de resortes y amortiguadores, tal y como se muestra en la *Figura 2*.

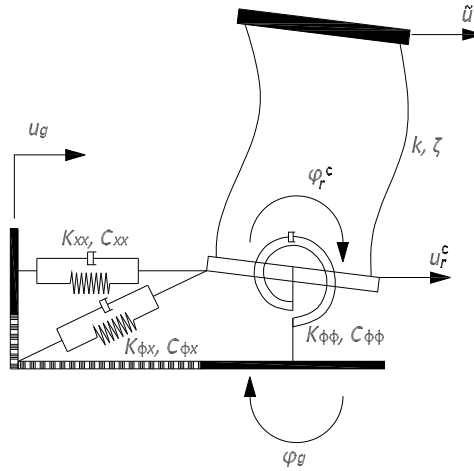


Figura 2: Modelo de subestructuración de una estructura de una planta

Los movimientos horizontal u_r^c y de giro φ_r^c de la cimentación están definidos en la base de la estructura y en relación a los movimientos que se aplican sobre el cimiento.

Las funciones dependientes de la frecuencia (K_{xx}, C_{xx}) , $(K_{\theta\theta}, C_{\theta\theta})$ y $(K_{x\theta}, C_{x\theta})$ representan la rigidez y el amortiguamiento del suelo en los modos de vibración horizontal, de balanceo y modo de vibración cruzado horizontal-balanceo, respectivamente.

Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento del sistema mostrado en la *Figura 2*, asumiendo pequeños desplazamientos y considerando movimientos armónicos del tipo $\tilde{u}(t) = \tilde{u}e^{i\omega t}$ donde ω es la frecuencia de excitación, pueden escribirse en el dominio de la frecuencia y en términos de movimientos relativos como

$$\begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ -K & \hat{K}_{xx} & \hat{K}_{x\theta} \\ 0 & \hat{K}_{\theta x} & \hat{K}_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ u_r^c \\ \varphi_r^c \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m & m & m h \\ 0 & m_o & 0 \\ m h & m h & m h^2 + I + I_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ u_r^c \\ \varphi_r^c \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} m \\ m_o \\ m h \end{bmatrix} u_g + \omega^2 \begin{bmatrix} m h \\ 0 \\ m h^2 + I_o + I \end{bmatrix} \varphi_g \quad (1)$$

donde la primera ecuación representa el equilibrio de fuerzas horizontales de la estructura, la segunda el equilibrio de fuerzas horizontales del cimiento y la tercera el equilibrio de momentos del sistema cimiento-estructura con respecto a un eje horizontal que pasa por el centro de gravedad del cimiento.

3.2. Parámetros adimensionales del problema

La respuesta del sistema cimiento-estructura depende de las propiedades del cimiento y del suelo, las propiedades de la estructura y de las características de la excitación. Los efectos de estos factores pueden expresarse en términos de los siguientes parámetros adimensionales:

- Parámetro de onda (wave parameter) $\sigma = \frac{c_s}{f \cdot h} = 3, 5, \infty$, que mide la rigidez relativa suelo-estructura; donde $c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_s}}$ es la velocidad propagación de la onda S en el suelo, siendo μ el módulo de elasticidad transversal del suelo; y $f = p/(2\pi)$ es frecuencia natural en Hz de la estructura sobre base rígida.
- Ratio de esbeltez (slenderness ratio) $h/b = 1, 2, 5$ mide la relación entre la altura de la estructura y el semiancho del cimiento.
- Densidad de masa relativa entre la estructura y el suelo $\delta = \frac{m}{4\rho_s b^2 h} = 0.15$, donde ρ_s es la densidad del suelo.
- Ratio de masa cimiento-estructura $\frac{m_o}{m} = 0$.
- Coeficiente de embebimiento L/b .

- Coeficiente de amortiguamiento de la estructura en base rígida $\xi = 0.02$.
- Coeficiente de Poisson del suelo $\nu_s = 0.4$.
- Frecuencia adimensional de excitación $a_o = \omega b/c_s$.

3.3. Ecuaciones adimensionalizadas

Las ecuaciones del problema pueden expresarse en función de los parámetros adimensionales expuestos en el apartado anterior de la siguiente forma

$$\frac{\omega^2}{p^2} \begin{bmatrix} \frac{p^2}{\omega^2}(1 + 2\xi i) - 1 & -1 & -1 \\ -1 & \frac{p^2}{\omega^2} \sigma^2 \frac{1}{16\pi^2} \frac{h}{b} \frac{1}{\delta} \cdot \tilde{K}_{xx} - 1 - \frac{m_o}{m} & \frac{p^2}{\omega^2} \sigma^2 \frac{1}{\delta} \frac{1}{16\pi^2} \tilde{K}_{x\theta} - 1 \\ -1 & \frac{p^2}{\omega^2} \sigma^2 \frac{1}{\delta} \frac{1}{16\pi^2} \tilde{K}_{\theta x} - 1 & \frac{p^2}{\omega^2} \sigma^2 \frac{1}{16\pi^2} \frac{b}{h} \frac{1}{\delta} \cdot \tilde{K}_{\theta\theta} - 1 - \frac{b^2}{3h^2} \left(1 + \frac{m_o}{m}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^2 \tilde{u} \\ p^2 u_r^c \\ p^2 h \varphi_r^c \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + \frac{m_o}{m} \\ 1 \end{bmatrix} \ddot{u}_g - \frac{h}{b} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 + \frac{b^2}{3h^2} \left(1 + \frac{m_o}{m}\right) \end{bmatrix} (\ddot{\varphi} b)_g \quad (2)$$

4. FUNCIONES DE IMPEDANCIA DINÁMICA

La representación matemática de la rigidez dinámica es una función compleja dependiente de la frecuencia de excitación. La parte real K representa la rigidez e inercia del suelo, idealizados como resortes. La parte imaginaria C se refiere al amortiguamiento del material y al geométrico, e indica los amortiguadores idealizados del suelo.

$$\hat{K} = k^e \cdot (k + i a_o c) = K + i a_o C \quad (3)$$

donde k^e es la rigidez estática y la frecuencia adimensional a_o se expresa como

$$a_o = \frac{\omega b}{c_s} = \frac{2\pi \omega b}{\sigma p h} \quad (4)$$

Los valores de las funciones de impedancia dinámica del suelo se han obtenido utilizando el código que resultó de la implementación de un modelo acoplado de Elementos de Contorno y Elementos Finitos (MEC-MEF) tridimensional armónico [13, 14, 15].

4.1. Parámetros adimensionales

En todos los casos los pilotes están embebidos en un semiespacio homogéneo, isotrópico y viscoelástico. Las propiedades del sistema[16] son: coeficiente de amortiguamiento interno del suelo $\xi_s = 0.01$, correspondiente un modelo de amortiguamiento histerético de la forma $G = Re(G)(1 + 2i\xi_s)$; ratio de densidad suelo-pilote $\rho_s/\rho_p = 0.7$; ratio de aspecto de los pilotes L/d , donde L y d son la longitud y el diametro de los pilotes respectivamente; coeficiente de Poisson del suelo $\nu_s = 0.4$; ratio del módulo de elasticidad pilote-suelo $E_p/E_s = 10^3$; relación entre la separación entre los centros de los pilotes y el diámetro de los mismos s/d ; frecuencia adimensional $a_o = \omega b/c_s = (b/d)(\omega d/c_s)$.

4.2. Criterio de normalización

Las funciones de impedancia dinámica del suelo se representan normalizadas de la siguiente manera: $\tilde{K}_{xx} = \hat{K}_{xx}/\mu b$, $\tilde{K}_{\theta\theta} = \hat{K}_{\theta\theta}/\mu b^3$ y $\tilde{K}_{x\theta} = \hat{K}_{x\theta}/\mu b^2$; donde la expresión del semiancho de la cimentación b depende de cada configuración y μ representa el módulo de elasticidad transversal del suelo.

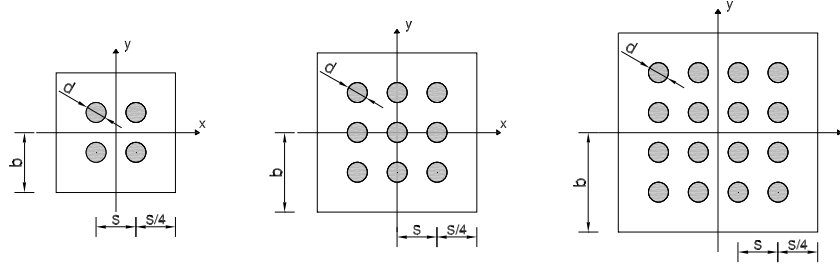


Figura 3: Distribución geométrica de los pilotes en grupos de 2×2 , 3×3 y 4×4

5. VALIDACIÓN DEL MODELO

Con objeto de validar el modelo propuesto, se presenta un estudio comparativo de los resultados obtenidos a partir de dicho modelo con otros resultados existentes en la bibliografía. En este sentido, se han reproducido los resultados obtenidos por Veletsos & Meek [7] para cimentaciones superficiales. Las funciones de impedancia del suelo se han tomado de un artículo de Bielak [8], que a su vez han sido extraídas de un artículo previo de Verbic & Veletsos [17].

5.1. Ecuaciones del problema

En el caso del problema de cimentaciones superficiales de base circular estudiado por Veletsos & Meek[7] las ecuaciones quedan

$$\frac{\omega^2}{p^2} \begin{bmatrix} \frac{p^2}{\omega^2} + 2\frac{p}{\omega}\xi_i - 1 & -1 & -1 \\ -1 & \frac{p^2}{\omega^2}\sigma^2 \frac{1}{4\pi^3} \frac{h}{r} \frac{1}{\delta} \cdot \tilde{K}_{xx} - 1 & -1 \\ -1 & -1 & \frac{p^2}{\omega^2}\sigma^2 \frac{1}{4\pi^3} \frac{r}{h} \frac{1}{\delta} \cdot \tilde{K}_{\theta\theta} - 1 - \frac{r^2}{4h^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p^2 \tilde{u} \\ p^2 u_r^c \\ p^2 h \varphi_r^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ddot{u}_g \quad (5)$$

donde, en este caso, $\xi = 0.02$, $\delta = 0.15$ y $\nu_s = 0.45$.

En las *Figuras 4 y 5* se muestran, con trazo verde discontinuo, los resultados obtenidos con este modelo utilizando los valores de las impedancias del suelo propuestos en el artículo de Bielak [8] y se contrastan con los obtenidos de la digitalización de las curvas de las *Figuras 4 y 5* del artículo de Veletsos & Meek [7], representados con trazo azul.

La respuesta de la estructura se ha expresado en términos del espectro de respuesta de su deformación lateral, definido como el valor absoluto de $p^2 u / \ddot{u}_g$, donde $p = 2\pi f$ es la frecuencia fundamental de la estructura en base rígida y $\ddot{u}_g = \omega^2 u_g$, siendo ω la frecuencia de excitación y u_g el desplazamiento horizontal en campo libre en la superficie del suelo. La utilidad de esta variable deriva del hecho de que el producto de este valor por la masa de la estructura y la aceleración horizontal en campo libre correspondiente a nivel de la superficie se corresponde con la amplitud del esfuerzo cortante en la base de la estructura.

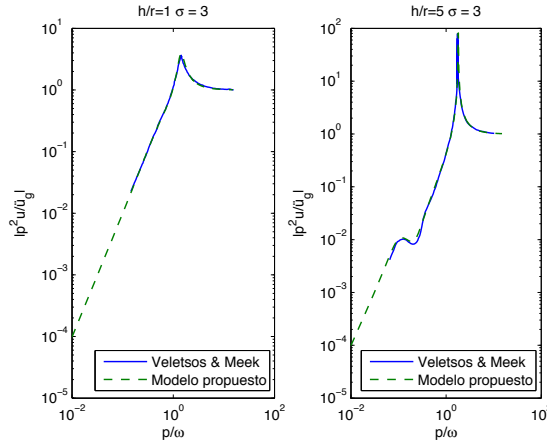


Figura 4: Reproducción de los resultados de Veletsos & Meek [7] para el espectro de respuesta $\sigma = 3$

5.2. Frecuencia natural y factor de amortiguamiento del sistema

En este apartado se estudia la influencia del parámetro σ , que representa la rigidez relativa entre la estructura y el suelo, en la variación de la frecuencia de resonancia del sistema, así como en la magnitud de la respuesta máxima del mismo.

La frecuencia de resonancia del sistema puede expresarse por el ratio ω/p . Por otra parte, la magnitud de la respuesta máxima del sistema puede asociarse al ratio de amortiguamiento $\tilde{\xi}$ de un oscilador equivalente de un solo grado de libertad. En adelante, la frecuencia circular natural del sistema estará denotada por $\tilde{p} = 2\pi\tilde{f}$, y la fracción de amortiguamiento crítico asociada denotada por $\tilde{\xi}$.

El sistema de un grado de libertad de reemplazo corresponde al modelo físico que se muestra en la *Figura 6*. En esta representación, el resorte conectado a la base representa

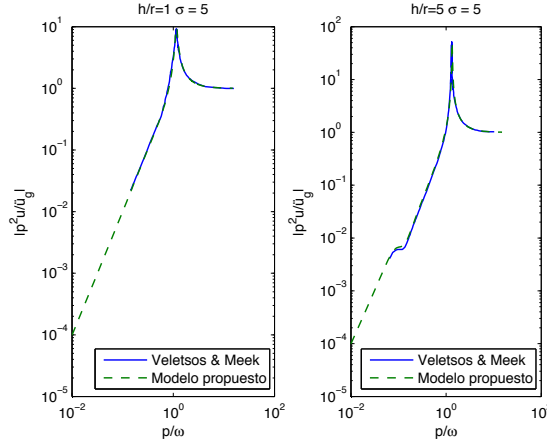


Figura 5: Reproducción de los resultados de Veletsos & Meek [7] para el espectro de respuesta $\sigma = 5$

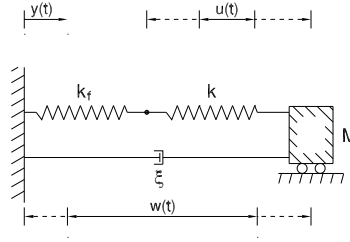


Figura 6: Sistema de un grado de libertad que reemplaza al sistema objeto de estudio.[7]

la flexibilidad de la cimentación, el resorte conectado a la masa representa la flexibilidad de la estructura y el amortiguador simula el amortiguamiento general del sistema.

Si $w(t)$ representa la deformación del oscilador de reemplazo, esta deformación debe estar repartida entre los dos resortes de forma inversamente proporcional a sus rigideces respectivas. Dado que la rigidez del resorte asociado a la estructura es proporcional a f^2 , mientras que la rigidez total del oscilador es proporcional a \tilde{f}^2 , se deduce que la deformación de la estructura, $u(t)$, está relacionada con la deformación total, $w(t)$, por la ecuación

$$u(t) = \left(\frac{\tilde{f}}{f} \right)^2 w(t) \quad (6)$$

Los valores de \tilde{f}/f y ξ del oscilador de reemplazo se han representado en la *Figura 7* en función de σ para tres valores distintos de h/r . Los valores de los parámetros restantes se definieron en la sección 3.2.

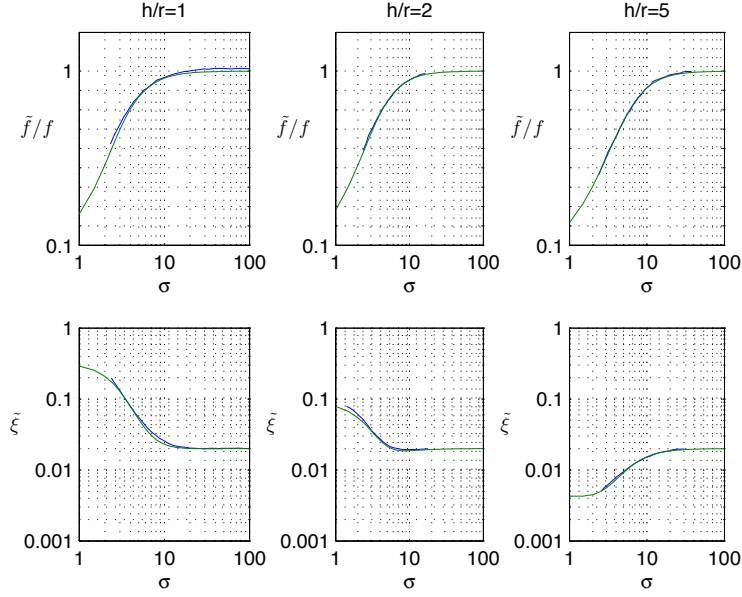


Figura 7: Comparación de las curvas de frecuencia \tilde{f}/f y amortiguamiento $\tilde{\xi}$ obtenidas con el modelo propuesto (trazo verde) con las obtenidas por Veletsos & Meek (trazo azul) [7]

6. ESTUDIO DE LA FRECUENCIA NATURAL Y EL FACTOR DE AMORTIGUAMIENTO DEL SISTEMA

En esta sección se estudia la influencia del parámetro σ , que representa la rigidez relativa entre la estructura y el suelo, en la variación de la frecuencia de resonancia del sistema, así como en la magnitud de la respuesta máxima del mismo.

La *Figura 8* presenta las curvas de frecuencia y amortiguamiento para un grupo de 2×2 pilotes con una separación entre centros de pilotes adyacentes correspondiente a $s/d = 10$ y un coeficiente de embebimiento $L/b = 1$, para valores del ratio de esbeltez de $h/b = 2, 5, 10$, sobre un suelo con un coeficiente de amortiguamiento $\xi_s = 0.01$, siendo la relación entre los módulos de elasticidad de pilotes y el suelo de $Ep/Es = 10^3$.

La información presentada en la *Figura 8* revela, que la interacción suelo-estructura tiene dos efectos principales:

1. Disminuye la frecuencia de resonancia del sistema hasta un valor inferior al aplicable a la estructura en base rígida. Debido al incremento de flexibilidad del cimiento, el sistema en el que se considera la interacción suelo-estructura es un sistema menos rígido y tiene una menor frecuencia de resonancia que el sistema en base rígida.
2. Modifica la magnitud de la respuesta máxima, disminuyendo el valor para estructuras no esbeltas y aumentando el valor para estructuras altas y esbeltas. El cambio

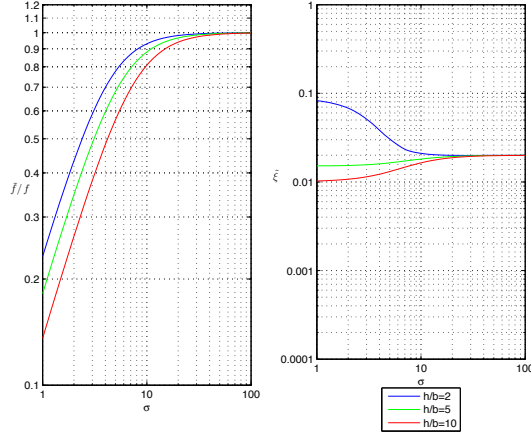


Figura 8: Frecuencia natural \tilde{f}/f y factor de amortiguamiento $\tilde{\xi}$ para una cimentación con un grupo de 2×2 pilotes. $E_p/E_s = 10^3$, $s/d = 10$, $h/b = 2, 5, 10$, $L/b = 1$ y $\xi_s = 0.01$

en la magnitud de la repuesta máxima es el resultado de dos mecanismos opuestos. Debido a la energía que se disipa por radiación dentro del medio de soporte, el amortiguamiento eficaz de la estructura en base flexible es mayor que el de la estructura en base rígida, y esto tiende a disminuir la respuesta del sistema con interacción suelo-estructura. Sin embargo, el giro de la cimentación aumenta la aceleración de la masa y la fuerza de inercia asociada, y este efecto conduce a un incremento de la respuesta. El primer factor es el dominante para estructuras no esbeltas (p.e. $h/b = 2$), mientras que el segundo factor es el dominante para el caso de estructuras esbeltas (p.e. $h/b = 10$).

Estos cambios son función de los parámetros σ y h/b . A menor valor de σ o a mayor valor de h/b , los dos efectos de la interacción se vuelven más pronunciados.

6.1. Influencia de la separación entre pilotes s en la frecuencia natural y el factor de amortiguamiento

La Figura 9 presenta de forma superpuesta las curvas de frecuencia y amortiguamiento, respectivamente, para distintos valores de la separación entre centros de pilotes adyacentes correspondientes a $s/d = 5, 10, 20$ y un coeficiente de embebimiento $L/b = 2$, para valores del ratio de esbeltez de $h/b = 2, 5, 10$ sobre un suelo con un coeficiente de amortiguamiento $\xi_s = 0.01$ siendo la relación entre los módulos de elasticidad de pilotes y el suelo de $E_p/E_s = 10^3$.

La interpretación de las curvas representadas en esta figura ha de realizarse de manera cuidadosa ya que al variar la distancia entre los centros de pilotes adyacentes s ; y dado que las curvas se presentan para valores determinados del ratio de esbeltez h/b , la altura de la estructura también se ve alterada y con ella el parámetro de onda σ . Esto hace que la

interpretación de estas curvas no sea inmediata. Aunque las curvas pueden interpretarse de diversas formas, considérese por ejemplo que la superestructura es la misma en todos los casos ($b = cte$, $h = cte$ para cada relación h/b). En este caso relaciones s/d crecientes implican menores diámetros del pilote, y dado que $L/b = cte$, $L = cte$ y la esbeltez de los pilotes aumenta, por lo que disminuye su rigidez. Así, la frecuencia natural del sistema disminuye para s/d creciente y también para h/b creciente. La misma tendencia se aprecia en las curvas de amortiguamiento.

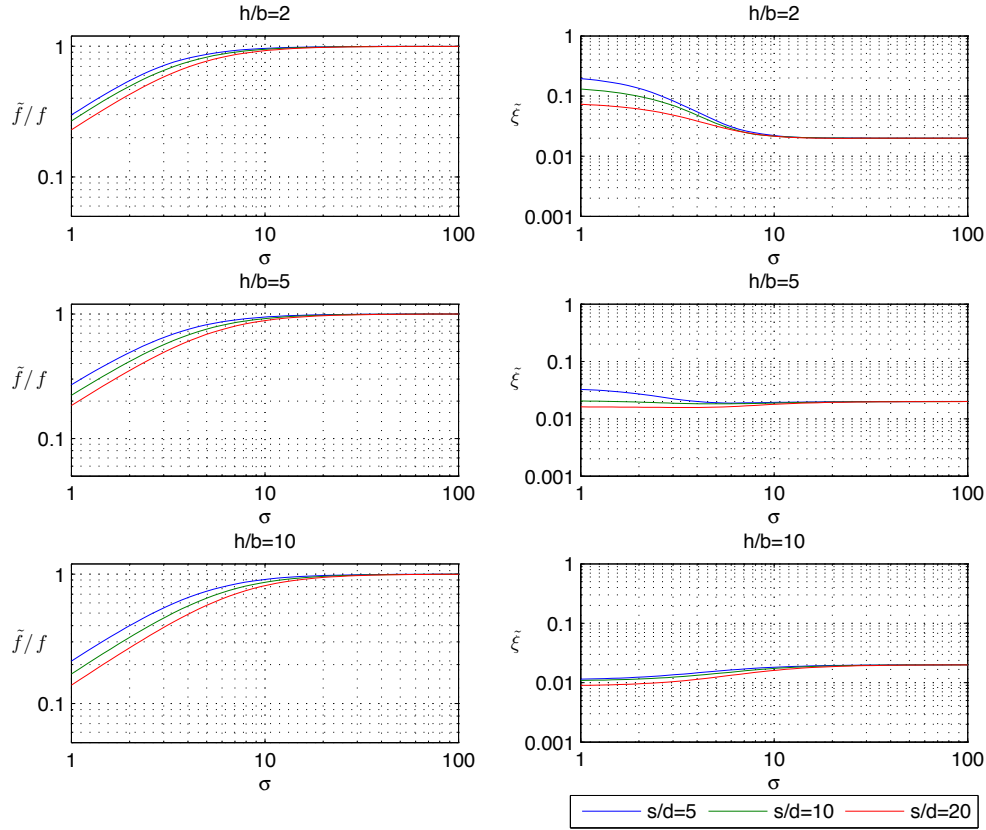


Figura 9: Influencia del parámetro s/d en la frecuencia natural \tilde{f}/f y el factor de amortiguamiento $\tilde{\xi}$ para un grupo de 2×2 pilotes con grado de embebimiento $L/b = 2$. $E_p/E_s = 10^3$, $h/b = 2, 5, 10$ y $\xi_s = 0.01$.

6.2. Influencia del coeficiente de amortiguamiento del suelo ξ_s en la frecuencia natural y el factor de amortiguamiento

La Figura 10 presenta de forma superpuesta las curvas de frecuencia y amortiguamiento del sistema para un grupo de 4×4 pilotes con una separación entre centros de pilotes

adyacentes correspondiente a $s/d = 4.3$, para distintos valores del coeficiente de amortiguamiento del suelo $\xi_s = 0, 0.01, 0.05$, y un coeficiente de embebimiento $L/b = 1$, siendo la relación entre los módulos de elasticidad de pilotes y el suelo de $E_p/E_s = 10^3$.

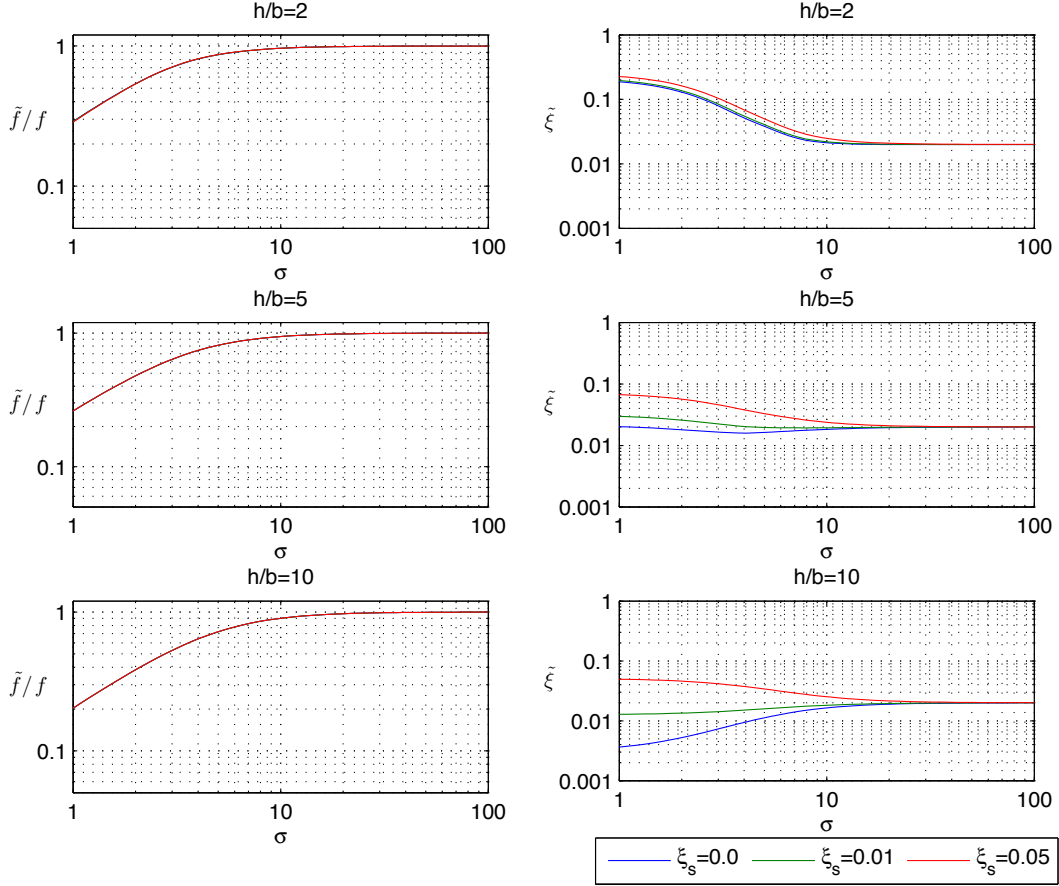


Figura 10: Influencia del coeficiente de amortiguamiento del suelo ξ_s en la frecuencia natural \tilde{f}/f y el factor de amortiguamiento $\tilde{\xi}$ para un grupo de 4×4 pilotes con grado de embebimiento $L/b = 1$ y $s/d = 4.3$. $E_p/E_s = 10^3$ y $h/b = 2, 5, 10$.

Tal y como era de esperar, la variación del valor del coeficiente de amortiguamiento del suelo ξ_s no afecta a la frecuencia natural del sistema \tilde{f}/f . Por otra parte, al aumentar el valor de ξ_s se incrementa también el amortiguamiento del sistema como es lógico. En todo caso, cabe destacar la importancia de este parámetro en el análisis de la influencia de los fenómenos de interacción suelo-estructura en la respuesta estructural, ya que para estructuras esbeltas, el valor de $\tilde{\xi}$ puede ser incluso inferior al valor estructural ξ , lo que implicaría que la interacción suelo-estructura tiene un efecto claramente perjudicial, al provocar mayores deformaciones en la superestructura.

6.3. Influencia del grado de embebimiento L/b en la frecuencia natural y el factor de amortiguamiento

La Figura 11 presenta de forma superpuesta las curvas de frecuencia y amortiguamiento del sistema para distintos valores del grado de embebimiento $L/b = 1, 2, 4$, para un grupo de 4×4 pilotes con una separación entre centros de pilotes adyacentes correspondiente a $s/d = 4.3$, sobre un suelo cuyo coeficiente de amortiguamiento es $\xi_s = 0.01$, siendo la relación entre los módulos de elasticidad de los pilotes y el suelo $Ep/Es = 10^3$, para valores del ratio de esbeltez de $h/b = 2, 5, 10$.

En dicha figura se observa como al aumentar el grado de embebimiento el sistema se rigidiza y disminuye el valor de la respuesta máxima, lo cual se refleja en un aumento del factor de amortiguamiento del sistema $\tilde{\xi}$. Al mismo tiempo, aumenta la frecuencia fundamental del sistema al aumentar el grado de embebimiento.

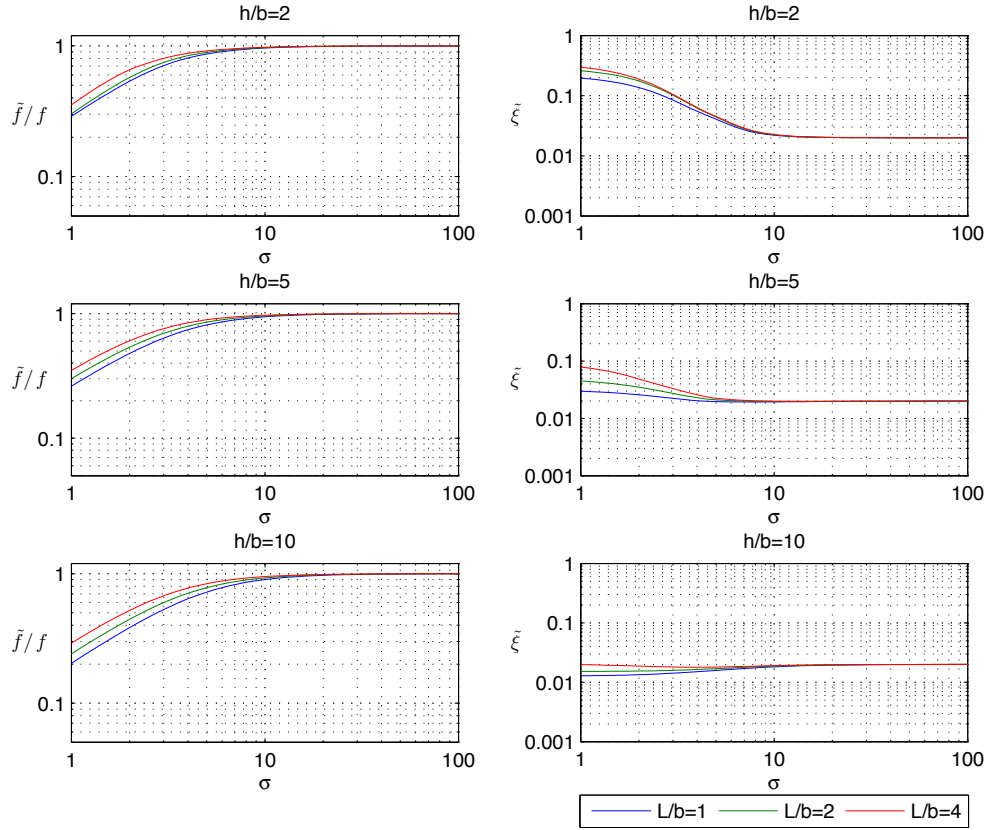


Figura 11: Influencia del parámetro L/b en la frecuencia natural \tilde{f}/f y el factor de amortiguamiento $\tilde{\xi}$ para un grupo de 4×4 pilotes con grado de embebimiento $L/b = 1, 2, 4$. $Ep/Es = 10^3$, $s/d = 4.3$, $h/b = 2, 5, 10$, $\xi_s = 0.01$.

6.4. Influencia del número de pilotes en la frecuencia natural y el factor de amortiguamiento

La *Figura 12* presenta de forma superpuesta las curvas de frecuencia y amortiguamiento del sistema para grupos de distinto número de pilotes con el mismo coeficiente de embebimiento $L/b = 1$, sobre un suelo cuyo coeficiente de amortiguamiento es $\xi_s = 0.01$ y siendo la relación entre los módulos de elasticidad de los pilotes y el suelo $E_p/E_s = 10^3$. Todo ello para los valores del ratio de esbeltez $h/b = 2, 5, 10$.

Tal y como cabía esperar, esta figura muestra cómo el aumento del número de pilotes aumenta la rigidez del sistema haciendo disminuir el valor de la respuesta máxima, lo cual se refleja en un aumento del factor de amortiguamiento del mismo. Al mismo tiempo, aumenta la frecuencia propia del sistema.

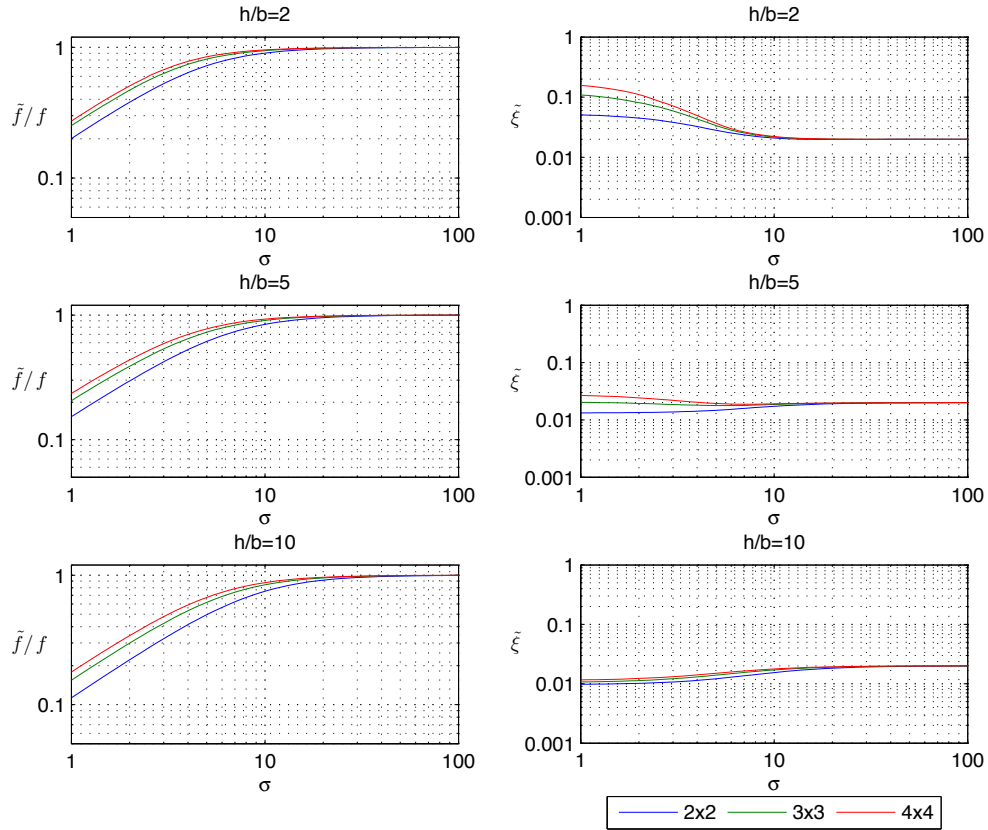


Figura 12: Influencia del número de pilotes en la frecuencia natural \tilde{f}/f y el factor de amortiguamiento $\tilde{\xi}$ para grupos de 2×2 , 3×3 y 4×4 pilotes con $s/d = 10$, $s/d = 6$ y $s/d = 4.3$ respectivamente y grado de embebimiento $L/b = 1$. $E_p/E_s = 10^3$, $\xi_s = 0.01$ y $h/b = 2, 5, 10$.

7. REVISIÓN Y CONCLUSIONES

Se ha desarrollado un modelo simple de interacción suelo-estructura en el dominio de la frecuencia, que permite evaluar la influencia de factores como el tipo de cimentación, su geometría y grado de enterramiento, el tipo de suelo y su estratigrafía así como las características de la estructura, en la respuesta de estructuras de edificación frente a cargas de origen sísmico. Se trata de un modelo basado en la metodología de subestructuración, lo cual permite realizar un mayor número estudios paramétricos debido a su menor coste computacional en comparación con los modelos directos.

En este modelo las impedancias y los factores de interacción cinemática sólo varían con la configuración geométrica de la cimentación, la disposición de los pilotes, el número de pilotes y la separación entre los mismos. Los valores de las funciones de impedancia dinámica para cimentaciones pilotadas utilizados en el trabajo se han obtenido con un método acoplado MEC-MEF en el dominio de la frecuencia. [13, 14, 15].

Los fenómenos de interacción suelo-estructura condicionan significativamente la respuesta del sistema. Se han obtenido valores de la frecuencia y el amortiguamiento incorporando dicha interacción y se observa que existen diferencias notables con los resultados que consideran la estructura cimentada sobre una base infinitamente rígida.

Estos efectos de la interacción suelo-estructura son más determinantes en el caso de cimentaciones pilotadas que en los casos de cimentaciones superficiales o cimentaciones embebidas y dependen significativamente de la configuración de la cimentación, el número de pilotes, la separación entre pilotes y la disposición geométrica de los mismos.

Los resultados obtenidos tienen un carácter adimensional y por tanto la interpretación física de los mismos requiere de un especial cuidado y precisa de un tratamiento específico de los datos, contemplando la influencia que todos los parámetros adimensionales tienen sobre los resultados del problema.

Del análisis de las curvas de frecuencia \tilde{f}/f y factor de amortiguamiento $\tilde{\xi}$ del sistema pueden extraerse las siguientes conclusiones:

1. El ratio de frecuencia $\tilde{f}/f \leq 1$, y disminuye para rigideces decrecientes del terreno y para esbelteces crecientes.
2. El valor del amortiguamiento $\tilde{\xi}$ puede ser mayor o menor que el valor aplicable a una estructura en base rígida dependiendo principalmente del ratio de esbeltez h/b de la superestructura, del amortiguamiento interno del suelo y de la configuración de la cimentación. Un valor de $\tilde{\xi}$ superior al amortiguamiento ξ de la superestructura implica que los fenómenos de interacción suelo-estructura reducen la respuesta máxima (respecto a la situación sobre base rígida) y, por tanto, tienen en general un efecto beneficioso. Por contra, si $\tilde{\xi}$ es menor que ξ , el efecto es perjudicial. Se ha mostrado que, en general, $\tilde{\xi}$ puede llegar a ser menor que ξ para estructuras esbeltas, para valores pequeños del amortiguamiento interno del suelo y, principalemtn, para $\sigma < 10$.

3. Para valores de σ mayores de 20, aproximadamente, los valores de \tilde{f}/f y $\tilde{\xi}$ son prácticamente iguales a aquellos de los sistemas en base rígida; del mismo modo, el efecto de la interacción es despreciable en este caso.

8. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo está vinculado al proyecto de investigación BIA 2010-21399-C02-01, financiado por la Subdirección General de Proyectos de Investigación (MICINN) y FEDER, así como al proyecto ProID20100224 financiado por la Agencia Canaria de Investigación Innovación y Sociedad de la Información (ACIISI) del Gobierno de Canarias y FEDER. Por otra parte, Cristina Medina López es beneficiaria del programa de becas predoctorales de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria (ULPGC). Los autores agradecen este apoyo.

REFERENCIAS

- [1] E. Kausel and J. M. Roesset, *Soil-structure interaction for nuclear containment*, Power Div. ASCE Specialty Conf, pp. 469–498, Boulder, Colorado, (1974).
- [2] H. Aguilar, J. Avilés, Influencia de pilotes de fricción en la interacción dinámica suelo-estructura. *Int. Mét. Num. Cál. Dis. Ing.*, Vol. **19,1**, pp. 3–18, (2003).
- [3] R. A. Parmelee, Building-foundation interaction effects. *J. Engng. Mech. Div., ASCE*, Vol. **93**, pp. 131–162, (1967).
- [4] D. S. Perelman, R. A. Parmelee and S. L. Lee, Seismic response of single-storey interaction systems. *J Struct Div, ASCE*, Vol. **94**, pp. 2597–2608, (1968).
- [5] R. A. Parmelee, D.S. Perelman and S. L. Lee, Seismic response of multiple-storey structures on flexible foundation. *Bull Seism Soc Ame*, Vol. **59**, pp. 1061–1070, (1969).
- [6] M. A. Sarrazin, J. M. Roesset and R. V. Whitman, Dynamic soil-structure interaction. *J Struct Div, ASCE*, Vol. **98**, pp. 1525–1544, (1972).
- [7] S. Veletsos and M. Meek, Dynamic Behaviour of Building-Foundation Systems. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* Vol. **3**, pp. 121–138, (1974).
- [8] J. Bielak, Dynamic Behaviour of Structures with embedded Foundations. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. **3**, pp. 259–274, (1975).
- [9] M. I. Todorovska, Effects of the depth of the embedment on the system response during building-soil interaction. *Soil Dyn Earthquake Eng*, Vol. **11**, pp. 111–123, (1992).
- [10] J. Avilés, and L. E. Pérez-Rocha, Evaluation of interaction effects on the system period and the system damping due to foundation embedment and layer depth. *Soil Dyn Earthquake Eng*, Vol. **15**, pp. 11–27, (1996).
- [11] J. Avilés, and L. E. Pérez-Rocha, Effects of foundation embedment during building-soil interaction. *Earthquake Eng Struct Dyn*, Vol. **27**, pp. 1523–1540, (1998).
- [12] J. Avilés and M. Suárez, Effective periods and dampings of building-foundation systems including seismic wave effects. *Eng Struct*, Vol. **24**, pp. 553–562, (2002).
- [13] L. A. Padrón, J.J. Aznárez and O. Maeso, BEM-FEM coupling model for the dynamic analysis of piles and pile groups. *Eng Anal Bound Elem*, Vol. **31**, pp. 473–484, (2007).
- [14] L. A. Padrón, J.J. Aznárez and O. Maeso, Dynamic analysis of piled foundations in stratified soils by a BEM-FEM model. *Soil Dyn Earthquake Eng*, Vol. **28**, pp. 333–346, (2008).

- [15] L. A. Padrón, J.J. Aznárez and O. Maeso, Dynamic stiffness of deep foundations with inclined piles. *Earthquake Eng Struct Dyn*, Vol. **39(12)**, pp. 1343–1367, (2010).
- [16] A. M. Kaynia, *Dynamic stiffness and seismic response of pile groups*, Report R83-03, Massachusetts Institute of Technology ,Cambridge, MA, (1982).
- [17] B. Verbic and A. S. Veletsos, *Impulse response functions for elastic foundations*, SRR Report 15, Department of Civil Engineering, Rice University, Houston, Texas, (1972).