





# ANÁLISIS DE LOS EFECTOS DE INTERACCIÓN SUELO-ESTRUCTURA EN LA RESPUESTA SÍSMICA DE ESTRUCTURAS ENTERRADAS

Ariel Santana Naranjo

Programa de doctorado:  
Sistemas Inteligentes y Aplicaciones Numéricas en Ingeniería  
Instituto Universitario SIANI

Director:  
Juan J. Aznárez González

Director:  
Orlando F. Maeso Fortuny

Las Palmas de Gran Canaria, Noviembre 2015



# Agradecimientos

Mi más sincero agradecimiento a los profesores Juan José Aznárez y Orlando Maeso, sin ellos este trabajo no hubiera sido posible. De ambos destaco su entusiasmo en lo que a la investigación y la docencia se refiere. Transmiten esa pasión por su dedicación y al escucharles hablar, algo que es extensible a su inmensa calidad como personas. Me resulta sorprendente como puedes estar continuamente aprendiendo cosas a su lado. Agradezco también su apoyo y confianza durante todo este tiempo, sobre todo en los momentos más duros, para que se haya podido culminar este trabajo.

Es imposible no acordarse en este momento de Luis A. Padrón, a quien aprecio de manera especial por su calidad como persona y su capacidad para trabajar. Para mí ha sido como un director de tesis adicional. Siempre dispuesto a resolver cualquier duda que se me pudiera plantear y ayudar en lo que fuera necesario. Con él he pasado muchos momentos y aprendido muchas cosas por las que le estoy eternamente agradecido.

Mi aprecio a los profesores y compañeros del Instituto SIANI. De manera especial, a los profesores Francisco Chirino, Fidel García y Jose M. Emperador y demás profesores del Máster, a los compañeros Cristina, Asunción, Rayco, Jacob, Guillermo, Oswaldo, Borja y Alejandro, con ellos compartí tiempo en la división de Mecánica de Medios continuos y Estructuras. Guardo en el recuerdo momentos vividos juntos durante este periodo. Pido disculpas por aquellos que pueda haber olvidado mencionar.

A toda mi familia, especialmente a mis padres, Otilia y Juan, y a mi única hermana Laura, por su calor y apoyo incondicional, que espero poder seguir notando durante mucho tiempo. Con ellos he pasado toda mi vida y son parte principal de como me he forjado como persona, de como soy en todos los sentidos. También a mis abuelos, ellos fueron capaces, con toneladas de cariño y sabios consejos, de construir con el tiempo que pasamos juntos un trozo de vida que guardaré para siempre.

Mi afecto para Sara Laura, ella estuvo a mi lado en gran parte de este viaje. Su cariño, cuidados y paciencia fueron una ayuda inestimable en todo momento. Me quedo con las cosas buenas que vivimos y aprendimos juntos.

Mención especial para todos mis amigos de la época del instituto, que me han apoyado de manera desinteresada durante este tiempo, y con los que he compartido muchos buenos y malos momentos. Espero que siga siendo así en lo que esté por venir.

A todos aquellos que haya podido olvidar mencionar y que han contribuido con cualquier mínimo detalle a finalizar este trabajo.

El autor agradece al Ministerio de Economía y Competitividad de España la financiación recibida por medio de la beca FPI de investigación BES-2009-029161.

---

También agradecer al Ministerio de Economía y Competitividad de España a través de los proyectos BIA2007-67612-C02-01 y BIA2010-21399-C02-01, y a la Agencia Canaria de Investigación Innovación y Sociedad de la Información del Gobierno de las Islas Canarias y FEDER a través del proyecto ProID20100224, el soporte recibido.

# Índice de contenidos

<b>1. Introducción, desarrollos previos y descripción de objetivos</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción . . . . .	1
1.2. Antecedentes: modelos desarrollados en el grupo de investigación . . . . .	3
1.2.1. Líneas de trabajo desarrolladas . . . . .	4
1.3. Objetivos de la tesis y contribuciones originales . . . . .	9
1.3.1. Problemas de interacción suelo–estructura. Respuesta dinámica de estructuras enterradas poco esbeltas. . . . .	9
1.3.2. Problemas de interacción suelo–estructura. Modelo acoplado EF–EC para el análisis dinámico de edificios. . . . .	10
1.4. Organización del documento . . . . .	11
1.5. Financiación recibida y productividad científica . . . . .	12
<b>2. Ecuaciones básicas y propagación de ondas en problemas elásticos y poroelásticos. Formulación mediante el MEC</b>	<b>15</b>
2.1. Introducción . . . . .	15
2.2. Ecuaciones de gobierno en elastodinámica y poroelastodinámica armónicas . . .	15
2.2.1. Ecuaciones de gobierno en elastodinámica armónica . . . . .	16
2.2.2. Ecuaciones de gobierno en poroelastodinámica armónica . . . . .	17
2.3. Propagación de ondas en medios elásticos y poroelásticos . . . . .	21
2.3.1. Propagación de ondas en medios elásticos . . . . .	21
2.3.2. Propagación de ondas en medios poroelásticos . . . . .	23
2.4. Formulación integral y solución fundamental armónica . . . . .	26
2.4.1. Formulación integral en poroelastodinámica armónica . . . . .	27
2.4.2. Formulación integral en elastodinámica armónica . . . . .	28
2.4.3. Solución fundamental armónica en elasticidad . . . . .	28
2.4.4. Solución fundamental armónica en poroelasticidad . . . . .	29
2.4.5. Formulación integral en el contorno . . . . .	31
2.5. El método de los elementos de contorno . . . . .	33
2.5.1. Discretización del contorno . . . . .	34
2.5.2. Aspectos numéricos . . . . .	37
2.6. Modelo acoplado. Condiciones de contorno en las interfases . . . . .	38
2.7. Ecuaciones de campo incidente en el semiespacio . . . . .	39
2.7.1. Semiespacio elástico . . . . .	40
2.7.2. Semiespacio poroelástico . . . . .	50
<b>3. Caso práctico de estudio: respuesta dinámica y sísmica. Importancia de la evaluación real de la rigidez estructural</b>	<b>55</b>
3.1. Introducción . . . . .	55
3.2. Descripción del problema . . . . .	56
3.3. Metodología . . . . .	58

3.4. Interacción cinemática . . . . .	60
3.5. Muelles y amortiguadores equivalentes. Impedancias del terreno . . . . .	62
3.6. Interacción inercial. Respuesta dinámica de la estructura . . . . .	62
3.7. Método directo. Estructura flexible . . . . .	68
3.8. Conclusiones . . . . .	71
<b>4. Modelo para el estudio de la influencia de la flexibilidad en la respuesta sísmica de estructuras enterradas poco esbeltas</b>	<b>75</b>
4.1. Introducción . . . . .	75
4.2. Definición del problema. Descripción del análisis paramétrico propuesto . . . . .	76
4.3. Metodología para el cálculo de la respuesta sísmica de la estructura . . . . .	79
4.4. Respuesta en frecuencia de la estructura. Modelo simplificado Winkler–Timoshenko	79
4.4.1. Ecuación de gobierno . . . . .	80
4.4.2. Definición del campo incidente . . . . .	81
4.4.3. Solución general del campo de desplazamientos . . . . .	82
4.4.4. Sección estructural generalizada . . . . .	83
4.5. Resultados . . . . .	84
4.6. Conclusiones . . . . .	86
<b>5. Modelo MEC–MEF para el análisis dinámico de estructuras de edificación cimentadas en terrenos elásticos o poroelásticos</b>	<b>103</b>
5.1. Introducción . . . . .	103
5.2. Condiciones de cuerpo rígido . . . . .	104
5.3. Modelado de edificios. Elemento finito de dos nodos . . . . .	110
5.4. Acoplamiento entre cuerpo rígido y MEF . . . . .	120
5.5. Validación . . . . .	120
5.5.1. Condiciones de cuerpo rígido. Factores de interacción cinemática de grupos de pilotes inclinados . . . . .	121
5.5.2. Elemento finito tipo viga Timoshenko . . . . .	123
5.5.3. Validación del modelo MEC–MEF conjuntamente . . . . .	127
5.6. Conclusiones . . . . .	132
<b>6. Estudio de la respuesta dinámica de estructuras de edificación. Resultados.</b>	<b>135</b>
6.1. Introducción . . . . .	135
6.2. Interacción suelo estructura. Influencia del ángulo de incidencia de la excitación	136
6.2.1. Ondas P . . . . .	137
6.2.2. Ondas SV . . . . .	139
6.2.3. Ondas SH . . . . .	140
6.3. Interacción estructura–suelo–estructura. . . . .	144
6.3.1. Ondas P . . . . .	145
6.3.2. Ondas SV . . . . .	154
6.3.3. Ondas SH . . . . .	162
6.4. Influencia de la naturaleza poroelástica del terreno . . . . .	167
6.5. Interacción estructura–suelo–estructura. Ondas de Rayleigh. . . . .	175
<b>7. Revisión, conclusiones y desarrollos futuros</b>	<b>179</b>
7.1. Revisión y conclusiones . . . . .	179
7.2. Desarrollos futuros . . . . .	180
<b>Referencias</b>	<b>193</b>



# Índice de figuras

2.1. Carácter bifásico del medio poroso. Superposición de la matriz sólida y la red de poros. . . . .	18
2.2. Desplazamientos y dirección de propagación. Ondas planas P y S. . . . .	23
2.3. Igualdad integral en el contorno. Procedimiento de extracción de la singularidad. . . . .	32
2.4. Ondas incidente y reflejadas en un semiespacio elástico. Ángulos de interés. . . . .	40
2.5. Propagación y movimiento de una partícula provocado por una onda de Rayleigh . . . . .	46
2.6. Relación entre los ejes $(\tilde{x}_2\tilde{x}_3)$ y $(x_2x_3)$ . Ángulo $\varphi_0$ . . . . .	49
2.7. Onda incidente y reflejada en dirección vertical en un semiespacio poroelástico. . . . .	50
3.1. Descripción geométrica de la estructura. . . . .	56
3.2. Perfil de velocidades de onda del terreno. . . . .	57
3.3. (a) Espectro de respuesta de diseño en aceleraciones, (b) Esquema de modulación. . . . .	58
3.4. Acelerogramas horizontales . . . . .	58
3.5. Espectro de respuesta en aceleraciones de campo libre . . . . .	59
3.6. Método directo vs. método de los tres pasos . . . . .	59
3.7. Malla de elementos de contorno usada para los problemas de interacción cinemática y de impedancias . . . . .	61
3.8. Factores de interacción cinemática en la base de la estructura considerando como excitación una onda S con incidencia vertical. . . . .	61
3.9. Coeficientes de rigidez y amortiguamiento para el caso horizontal y de giro . . . . .	63
3.10. Funciones de respuesta en frecuencia de los desplazamientos horizontales normalizados del análisis inercial y los factores de interacción cinemática para una onda S con incidencia vertical . . . . .	64
3.11. Respuesta estructural a diferentes profundidades de acuerdo a la solución obtenida con el método de los tres pasos y para el acelerograma 1 . . . . .	65
3.12. Envolventes de las respuestas espectrales en términos de pseudo-aceleraciones a diferentes profundidades . . . . .	66
3.13. Factores de amortiguamiento para los modos horizontal y de cabeceo . . . . .	67
3.14. Funciones de respuesta en frecuencia para diferentes factores de amortiguamiento ( <i>izquierda</i> ) y diferentes frecuencias naturales ( <i>derecha</i> ) . . . . .	67
3.15. Envolventes de las respuestas espectrales en términos de pseudo-aceleraciones para diferentes factores de amortiguamiento ( <i>izquierda</i> ) y diferentes frecuencias naturales ( <i>derecha</i> ) . . . . .	68
3.16. Malla de elementos de contorno usada para la aproximación directa. Estructura flexible embebida en un terreno estratificado. . . . .	69
3.17. Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento horizontal normalizado para diferentes puntos de la reestructura considerando como excitación una onda S con incidencia vertical. Método de los tres pasos ( <i>rigid model</i> ) y método directo ( <i>flexible model</i> ) . . . . .	70

3.18. Espectros de respuesta en términos de pseudo-aceleraciones a diferentes profundidades obtenidos usando la metodología directa ( <i>flexible model</i> ) y el método de los tres pasos ( <i>rigid model</i> ) . . . . .	71
3.19. Validación de la hipótesis de rigidez de la estructura. Aceleraciones máximas con la profundidad para el acelerograma 1. Onda S con incidencia vertical . . . . .	72
3.20. Validación de la hipótesis de rigidez de la estructura. Tensiones normales máximas con la profundidad para el acelerograma 1. Onda S con incidencia vertical. . . . .	72
4.1. Problema estudiado. Estructura (maciza o hueca) enterrada en un semiespacio homogéneo. Excitación sísmica de ondas transversales con incidencia vertical . . . . .	76
4.2. Excitación sísmica. Espectro de respuesta de campo libre en superficie. Suelo tipo C, espectro tipo 1. . . . .	78
4.3. Espectros de respuesta en la estructura enterrada. Error promedio por tramos entre las respuestas de los modelos de estructura rígida y flexible. $T_B = 0.2s$ . $T_C = 0.6s$ . $T_D = 2.0s$ . . . . .	78
4.4. Problem definition . . . . .	80
4.5. Distribución del error promedio $\bar{\epsilon}_j$ del espectro de respuesta, calculado en cota superior de la estructura, cometido en cada tramo $j$ de los tres en que se ha dividido el eje de periodo al asumir una estructura rígida en lugar de su verdadera flexibilidad en función de $L/D$ y $c_s$ . Estructura maciza. Profundidad de enterramiento $L = 5m$ . . . . .	88
4.6. Distribución del error promedio $\bar{\epsilon}_j$ del espectro de respuesta, calculado en cota superior de la estructura, cometido en cada tramo $j$ de los tres en que se ha dividido el eje de periodo al asumir una estructura rígida en lugar de su verdadera flexibilidad en función de $L/D$ y $c_s$ . Estructura maciza. Profundidad de enterramiento $L = 10m$ . . . . .	89
4.7. Distribución del error promedio $\bar{\epsilon}_j$ del espectro de respuesta, calculado en cota superior de la estructura, cometido en cada tramo $j$ de los tres en que se ha dividido el eje de periodo al asumir una estructura rígida en lugar de su verdadera flexibilidad en función de $L/D$ y $c_s$ . Estructura maciza. Profundidad de enterramiento $L = 20m$ . . . . .	90
4.8. Distribución del error promedio $\bar{\epsilon}_j$ del espectro de respuesta, calculado en cota superior de la estructura, cometido en cada tramo $j$ de los tres en que se ha dividido el eje de periodo al asumir una estructura rígida en lugar de su verdadera flexibilidad en función de $L/D$ y $c_s$ . Estructura maciza. Profundidad de enterramiento $L = 30m$ . . . . .	91
4.9. Distribución del error promedio $\bar{\epsilon}_j$ del espectro de respuesta, calculado en cota superior de la estructura, cometido en cada tramo $j$ de los tres en que se ha dividido el eje de periodo al asumir una estructura rígida en lugar de su verdadera flexibilidad en función de $L/D$ y $c_s$ . Estructura maciza. Profundidad de enterramiento $L = 40m$ . . . . .	92
4.10. Distribución del error promedio $\bar{\epsilon}_j$ del espectro de respuesta, calculado en cota superior de la estructura, cometido en cada tramo $j$ de los tres en que se ha dividido el eje de periodo al asumir una estructura rígida en lugar de su verdadera flexibilidad en función de $L/D$ y $c_s$ . Estructura maciza. Profundidad de enterramiento $L = 50m$ . . . . .	93
4.11. Distribución del error promedio $\bar{\epsilon}_j$ del espectro de respuesta, calculado en cota superior de la estructura, cometido en cada tramo $j$ de los tres en que se ha dividido el eje de periodo al asumir una estructura rígida en lugar de su verdadera flexibilidad en función de $L/D$ y $c_s$ . Estructura maciza. Profundidad de enterramiento $L = 60m$ . . . . .	94

4.12. Distribución del error promedio $\bar{\epsilon}_j$ del espectro de respuesta, calculado en cota superior de la estructura, cometido en cada tramo $j$ de los tres en que se ha dividido el eje de periodo al asumir una estructura rígida en lugar de su verdadera flexibilidad en función de $L/D$ y $c_s$ . Estructura hueca. Profundidad de enterramiento $L = 5$ m. . . . .	95
4.13. Distribución del error promedio $\bar{\epsilon}_j$ del espectro de respuesta, calculado en cota superior de la estructura, cometido en cada tramo $j$ de los tres en que se ha dividido el eje de periodo al asumir una estructura rígida en lugar de su verdadera flexibilidad en función de $L/D$ y $c_s$ . Estructura hueca. Profundidad de enterramiento $L = 10$ m. . . . .	96
4.14. Distribución del error promedio $\bar{\epsilon}_j$ del espectro de respuesta, calculado en cota superior de la estructura, cometido en cada tramo $j$ de los tres en que se ha dividido el eje de periodo al asumir una estructura rígida en lugar de su verdadera flexibilidad en función de $L/D$ y $c_s$ . Estructura hueca. Profundidad de enterramiento $L = 20$ m. . . . .	97
4.15. Distribución del error promedio $\bar{\epsilon}_j$ del espectro de respuesta, calculado en cota superior de la estructura, cometido en cada tramo $j$ de los tres en que se ha dividido el eje de periodo al asumir una estructura rígida en lugar de su verdadera flexibilidad en función de $L/D$ y $c_s$ . Estructura hueca. Profundidad de enterramiento $L = 30$ m. . . . .	98
4.16. Distribución del error promedio $\bar{\epsilon}_j$ del espectro de respuesta, calculado en cota superior de la estructura, cometido en cada tramo $j$ de los tres en que se ha dividido el eje de periodo al asumir una estructura rígida en lugar de su verdadera flexibilidad en función de $L/D$ y $c_s$ . Estructura hueca. Profundidad de enterramiento $L = 40$ m. . . . .	99
4.17. Distribución del error promedio $\bar{\epsilon}_j$ del espectro de respuesta, calculado en cota superior de la estructura, cometido en cada tramo $j$ de los tres en que se ha dividido el eje de periodo al asumir una estructura rígida en lugar de su verdadera flexibilidad en función de $L/D$ y $c_s$ . Estructura hueca. Profundidad de enterramiento $L = 50$ m. . . . .	100
4.18. Distribución del error promedio $\bar{\epsilon}_j$ del espectro de respuesta, calculado en cota superior de la estructura, cometido en cada tramo $j$ de los tres en que se ha dividido el eje de periodo al asumir una estructura rígida en lugar de su verdadera flexibilidad en función de $L/D$ y $c_s$ . Estructura hueca. Profundidad de enterramiento $L = 60$ m. . . . .	101
5.1. Grupo de edificios cercanos cimentados en un semiespacio. Esquema de los principales aspectos incluidos en el modelo. . . . .	104
5.2. Modelo rígido para la cimentación. Superficie libre $\Gamma_s$ ( $\mathbf{p}_s = 0$ , $\tau_s = 0$ ) e interfase rígida $\Gamma_r$ . . . . .	106
5.3. Elemento finito de dos nodos, basado en la teoría de Timoshenko para la deformación por cortante, usado para la discretización de edificios. . . . .	111
5.4. Modelado de edificio con una sección transversal genérica no simétrica. . . . .	111
5.5. Relaciones cinemáticas y de equilibrio entre el centro de esfuerzos cortantes y el centro de gravedad de una sección genérica con excentricidad. . . . .	113
5.6. Acoplamiento entre cimentación rígida y edificio. . . . .	120
5.7. Malla de elementos de contorno para el cálculo de factores de interacción cinemática de grupos de pilotes $2 \times 2$ . Se muestra un cuarto de la geometría ya que el código permite tener en cuenta las condiciones de simetría. . . . .	121
5.8. Esquema de la geometría de grupo $2 \times 2$ de pilotes inclinados. Corte transversal del terreno y vista superior. . . . .	122

5.9. Factores interacción cinemática de grupo $2 \times 2$ de pilotes con ángulo de inclinación $10^\circ$ y relación $s/d = 5$ , en términos de la parte real e imaginaria del desplazamiento horizontal y giro de flexión, considerando onda transversal de tipo S vibrando tanto en dirección paralela al eje $x$ como al eje $y$ . . . . .	124
5.10. Factores interacción cinemática de grupo $2 \times 2$ de pilotes con ángulo de inclinación $20^\circ$ y relación $s/d = 10$ , en términos de la parte real e imaginaria del desplazamiento horizontal y giro de flexión, considerando onda transversal de tipo S vibrando tanto en dirección paralela al eje $x$ como al eje $y$ . . . . .	125
5.11. Factores interacción cinemática de grupo $2 \times 2$ de pilotes con ángulo de inclinación $30^\circ$ y relación $s/d = 10$ , en términos de la parte real e imaginaria del desplazamiento horizontal y giro de flexión, considerando onda transversal de tipo S vibrando tanto en dirección paralela al eje $x$ como al eje $y$ . . . . .	126
5.12. Geometría de la sección transversal en forma de U de la viga. . . . .	127
5.13. A la izquierda malla de elementos de contorno para la viga con sección transversal en U. Sólo es necesario mallar la mitad de la misma ya que se tienen en cuenta las condiciones de simetría. A la derecha esquema de la discretización de elementos finitos. . . . .	128
5.14. Resultados de validación para una viga de sección transversal en U y longitud 30 metros empotrada base rígida en términos del desplazamiento transversal $v/v_{br}$ y de la torsión $\theta_z b/v_{br}$ en el extremo libre. Se comparan los resultados del modelo de elementos finitos presentado (MEF), con los obtenidos con ANSYS® y con el modelo de elementos de contorno (MEC). . . . .	129
5.15. Resultados en términos del desplazamiento transversal $v/v_{br}$ y de la torsión $\theta_z b/v_{br}$ en el extremo libre obtenidos con el modelo de elementos finitos. Ensayos con diferente número de divisiones en la malla de elementos finitos. . . . .	130
5.16. Dimensiones del edificio y de la sección transversal en forma de U del mismo. . . . .	130
5.17. (a) Malla de elementos de contorno para el modelo multidominio. (b) Malla de elementos de contorno y elementos finitos para el modelo MEC-MEF y detalle del acoplamiento edificio-cimentación en el punto de referencia. . . . .	131
5.18. Comparativa entre los modelos MEC mutidominio y MEC-MEF. Funciones de respuesta en frecuencia en la base y la parte alta del edificio en términos del desplazamiento vertical $w$ , normalizado con el de campo libre $w_{ff}$ , debido a la acción de una onda P con incidencia vertical. . . . .	132
5.19. Comparativa entre los modelos MEC mutidominio y MEC-MEF. Funciones de respuesta en frecuencia en la base y la parte alta del edificio en términos del desplazamiento transversal $v$ , giro de flexión $\theta_x$ y giro de torsión $\theta_z$ normalizados con el desplazamiento de campo libre $v_{ff}$ debidos a una onda S con incidencia vertical. . . . .	133
6.1. Dimensiones del edificio y de la sección transversal en forma de U del mismo. . . . .	136
6.2. Malla de elementos de contorno y elementos finitos para el modelo MEC-MEF y detalle del acoplamiento edificio-cimentación en el punto de referencia. . . . .	137
6.3. Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento transversal $ v/v_{ff} $ , del desplazamiento vertical $ w/w_{ff} $ , del giro de flexión $a \cdot  \theta_x/v_{ff} $ y de la rotación torsional $a \cdot  \theta_z/v_{ff} $ en la base y la parte alta (top) del edificio, debidos a la acción de ondas P con diferentes valores del ángulo de incidencia $\theta_0$ . . . . .	138
6.4. Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento transversal $ u/v_{ff} $ y del giro de flexión $a \cdot  \theta_y/v_{ff} $ en la base y la parte alta (top) del edificio, debidos a la acción de ondas P con diferentes valores del ángulo de incidencia $\theta_0$ . . . . .	139

6.5.	Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento transversal $ v/v_{ff} $ , del desplazamiento vertical $ w/w_{ff} $ , del giro de flexión $a \cdot  \theta_x/v_{ff} $ y de la rotación torsional $a \cdot  \theta_z/v_{ff} $ en la base y la parte alta (top) del edificio, debidos a la acción de ondas SV con diferentes valores del ángulo de incidencia $\theta_0$ . . . . .	141
6.6.	Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento transversal $ u/v_{ff} $ y del giro de flexión $a \cdot  \theta_x/v_{ff} $ en la base y la parte alta (top) del edificio, debidos a la acción de ondas SV con diferentes valores del ángulo de incidencia $\theta_0$ . . . . .	142
6.7.	Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento transversal $ u/u_{ff} $ , del giro de flexión $a \cdot  \theta_y/u_{ff} $ y del desplazamiento vertical $ w/w_{ff} $ en la base y la parte alta (top) del edificio, debidos a la acción de ondas SH con diferentes valores del ángulo de incidencia $\theta_0$ . . . . .	143
6.8.	Esquema de la vista isométrica del sistema compuesto por de dos edificios, separados una distancia $d$ , sobre el que actúa un campo de ondas (P, SV o SH) contenido en el plano $yz$ con un ángulo de incidencia $\theta_0$ . . . . .	144
6.9.	Malla MEC-MEF para modelar el sistema compuesto por dos edificios separados una distancia $d = 25$ metros (sólo se malla la mitad de la geometría). . . . .	145
6.10.	Comparativa de la respuesta del sistema formado por dos edificios cercanos separados una distancia $d$ (25 y 50 metros) con la de un sólo edificio aislado. Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento transversal $ v/v_{ff} $ , del desplazamiento vertical $ w/w_{ff} $ , del giro de flexión $a \cdot  \theta_x/v_{ff} $ y de la rotación torsional $a \cdot  \theta_z/v_{ff} $ en la base y la parte alta (top) del edificio, debidos a la acción de ondas P con ángulo de incidencia $\theta_0 = 30^\circ$ . . . . .	147
6.11.	Comparativa de la respuesta del sistema formado por dos edificios cercanos separados una distancia $d$ (25 y 50 metros) con la de un sólo edificio aislado. Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento transversal $ v/v_{ff} $ , del desplazamiento vertical $ w/w_{ff} $ , del giro de flexión $a \cdot  \theta_x/v_{ff} $ y de la rotación torsional $a \cdot  \theta_z/v_{ff} $ en la base y la parte alta (top) del edificio, debidos a la acción de ondas P con ángulo de incidencia $\theta_0 = 60^\circ$ . . . . .	148
6.12.	Comparativa de la respuesta del sistema formado por dos edificios cercanos separados una distancia $d$ (25 y 50 metros) con la de un sólo edificio aislado. Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento transversal $ v/v_{ff} $ , del desplazamiento vertical $ w/w_{ff} $ , del giro de flexión $a \cdot  \theta_x/v_{ff} $ y de la rotación torsional $a \cdot  \theta_z/v_{ff} $ en la base y la parte alta (top) del edificio, debidos a la acción de ondas P con ángulo de incidencia $\theta_0 = 75^\circ$ . . . . .	149
6.13.	Comparativa de la respuesta del sistema formado por dos edificios cercanos separados una distancia $d$ (25 y 50 metros) con la de un sólo edificio aislado. Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento vertical $ w/w_{ff} $ en la base y la parte alta (top) del edificio, debidos a la acción de ondas P con ángulo de incidencia $\theta_0 = 90^\circ$ . . . . .	150
6.14.	Comparativa de la respuesta del sistema formado por dos edificios cercanos separados una distancia $d$ (25 y 50 metros) con la de un sólo edificio aislado. Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento transversal $ u/v_{ff} $ y del giro de flexión $a \cdot  \theta_y/v_{ff} $ en la base y la parte alta (top) del edificio, debidos a la acción de ondas P con ángulo de incidencia $\theta_0 = 30^\circ$ . . . . .	151
6.15.	Comparativa de la respuesta del sistema formado por dos edificios cercanos separados una distancia $d$ (25 y 50 metros) con la de un sólo edificio aislado. Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento transversal $ u/v_{ff} $ y del giro de flexión $a \cdot  \theta_x/v_{ff} $ en la base y la parte alta (top) del edificio, debidos a la acción de ondas P con ángulo de incidencia $\theta_0 = 60^\circ$ . . . . .	152

6.16. Comparativa de la respuesta del sistema formado por dos edificios cercanos separados una distancia $d$ (25 y 50 metros) con la de un sólo edificio aislado. Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento transversal $ v/v_{ff} $ y del giro de flexión $a \cdot  \theta_x/v_{ff} $ en la base y la parte alta (top) del edificio, debidos a la acción de ondas P con ángulo de incidencia $\theta_0 = 75^\circ$ . . . . .	153
6.17. Comparativa de la respuesta del sistema formado por dos edificios cercanos separados una distancia $d$ (25 y 50 metros) con la de un sólo edificio aislado. Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento transversal $ v/v_{ff} $ , del desplazamiento vertical $ w/w_{ff} $ , del giro de flexión $a \cdot  \theta_x/v_{ff} $ y de la rotación torsional $a \cdot  \theta_z/v_{ff} $ en la base y la parte alta (top) del edificio, debidos a la acción de ondas SV con ángulo de incidencia $\theta_0 = 30^\circ$ . . . . .	155
6.18. Comparativa de la respuesta del sistema formado por dos edificios cercanos separados una distancia $d$ (25 y 50 metros) con la de un sólo edificio aislado. Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento transversal $ v/v_{ff} $ , del desplazamiento vertical $ w/w_{ff} $ , del giro de flexión $a \cdot  \theta_x/v_{ff} $ y de la rotación torsional $a \cdot  \theta_z/v_{ff} $ en la base y la parte alta (top) del edificio, debidos a la acción de ondas SV con ángulo de incidencia $\theta_0 = 60^\circ$ . . . . .	156
6.19. Comparativa de la respuesta del sistema formado por dos edificios cercanos separados una distancia $d$ (25 y 50 metros) con la de un sólo edificio aislado. Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento transversal $ v/v_{ff} $ , del desplazamiento vertical $ w/w_{ff} $ , del giro de flexión $a \cdot  \theta_x/v_{ff} $ y de la rotación torsional $a \cdot  \theta_z/v_{ff} $ en la base y la parte alta (top) del edificio, debidos a la acción de ondas SV con ángulo de incidencia $\theta_0 = 75^\circ$ . . . . .	157
6.20. Comparativa de la respuesta del sistema por formado por dos edificios cercanos separados una distancia $d$ (25 y 50 metros) con la de un sólo edificio aislado. Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento vertical $ w/w_{ff} $ en la base y la parte alta (top) del edificio, debidos a la acción de ondas SV con ángulo de incidencia $\theta_0 = 90^\circ$ . . . . .	158
6.21. Comparativa de la respuesta del sistema formado por dos edificios cercanos separados una distancia $d$ (25 y 50 metros) con la de un sólo edificio aislado. Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento transversal $ u/v_{ff} $ y del giro de flexión $a \cdot  \theta_y/v_{ff} $ en la base y la parte alta (top) del edificio, debidos a la acción de ondas SV con ángulo de incidencia $\theta_0 = 30^\circ$ . . . . .	159
6.22. Comparativa de la respuesta del sistema formado por dos edificios cercanos separados una distancia $d$ (25 y 50 metros) con la de un sólo edificio aislado. Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento transversal $ u/v_{ff} $ y del giro de flexión $a \cdot  \theta_x/v_{ff} $ en la base y la parte alta (top) del edificio, debidos a la acción de ondas SV con ángulo de incidencia $\theta_0 = 60^\circ$ . . . . .	160
6.23. Comparativa de la respuesta del sistema formado por dos edificios cercanos separados una distancia $d$ (25 y 50 metros) con la de un sólo edificio aislado. Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento transversal $ u/v_{ff} $ y del giro de flexión $a \cdot  \theta_x/v_{ff} $ en la base y la parte alta (top) del edificio, debidos a la acción de ondas SV con ángulo de incidencia $\theta_0 = 75^\circ$ . . . . .	161
6.24. Comparativa de la respuesta del sistema formado por dos edificios cercanos separados una distancia $d$ (25 y 50 metros) con la de un sólo edificio aislado. Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento transversal $ u/u_{ff} $ , del giro de flexión $a \cdot  \theta_y/u_{ff} $ y del desplazamiento vertical $ w/u_{ff} $ en la base y la parte alta (top) del edificio, debidos a la acción de ondas SH con ángulo de incidencia $\theta_0 = 30^\circ$ . . . . .	163

- 6.25. Comparativa de la respuesta del sistema formado por dos edificios cercanos separados una distancia  $d$  (25 y 50 metros) con la de un sólo edificio aislado. Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento transversal  $|u/u_{ff}|$ , del giro de flexión  $a \cdot |\theta_x/u_{ff}|$  y del desplazamiento vertical  $|w/u_{ff}|$  en la base y la parte alta (top) del edificio, debidos a la acción de ondas SH con ángulo de incidencia  $\theta_0 = 60^\circ$ . . . . . 164
- 6.26. Comparativa de la respuesta del sistema formado por dos edificios cercanos separados una distancia  $d$  (25 y 50 metros) con la de un sólo edificio aislado. Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento transversal  $|u/u_{ff}|$ , del giro de flexión  $a \cdot |\theta_x/u_{ff}|$  y del desplazamiento vertical  $|w/u_{ff}|$  en la base y la parte alta (top) del edificio, debidos a la acción de ondas SH con ángulo de incidencia  $\theta_0 = 75^\circ$ . . . . . 165
- 6.27. Comparativa de la respuesta del sistema formado por dos edificios cercanos separados una distancia  $d$  (25 y 50 metros) con la de un sólo edificio aislado. Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento transversal  $|u/u_{ff}|$ , del giro de flexión  $a \cdot |\theta_x/u_{ff}|$  y del desplazamiento vertical  $|w/u_{ff}|$  en la base y la parte alta (top) del edificio, debidos a la acción de ondas SH con ángulo de incidencia  $\theta_0 = 90^\circ$ . . . . . 166
- 6.28. Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento vertical  $|w/w_{ff}|$ , del desplazamiento horizontal  $|u/w_{ff}|$  y del giro de flexión  $a \cdot |\theta_y/w_{ff}|$  en la base y la parte alta (top) del edificio, cimentado en un semiespacio poroelástico, debidos a la acción de ondas P con incidencia vertical. Modelo viscoelástico (drenado y no drenado) y modelo poroelástico para diferentes valores de la constante de disipación  $b$ . . . . . 168
- 6.29. Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento transversal  $|v/v_{ff}|$ , el giro de flexión  $a \cdot |\theta_x/v_{ff}|$  y la rotación torsional  $a \cdot |\theta_z/v_{ff}|$  en la base y la parte alta (top) del edificio, cimentado en un semiespacio poroelástico, debidos a la acción de ondas S con incidencia vertical. Modelo viscoelástico (drenado y no drenado) y modelo poroelástico para diferentes valores de la constante de disipación  $b$ . . . 170
- 6.30. Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento vertical  $|w/w_{ff}|$ , del desplazamiento horizontal  $|u/w_{ff}|$  y del giro de flexión  $a \cdot |\theta_y/w_{ff}|$  en la base y la parte alta (top) del edificio, cimentado en un semiespacio poroelástico, debidos a la acción de ondas P con incidencia vertical teniendo en cuenta diferentes condiciones hidráulicas de contacto. . . . . 171
- 6.31. Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento transversal  $|v/v_{ff}|$ , del giro de flexión  $a \cdot |\theta_x/v_{ff}|$  y de la rotación torsional  $a \cdot |\theta_z/v_{ff}|$  en la base y la parte alta (top) del edificio, cimentado en un semiespacio poroelástico, debidos a la acción de ondas S con incidencia vertical teniendo en cuenta diferentes condiciones hidráulicas de contacto. . . . . 172
- 6.32. Comparativa de la respuesta del sistema formado por dos edificios cercanos separados una distancia  $d$  (25 y 50 metros) con la de un sólo edificio aislado, cimentados en un semiespacio poroelástico. Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento vertical  $|w/w_{ff}|$ , del desplazamiento horizontal  $|u/w_{ff}|$  y del giro de flexión  $a \cdot |\theta_y/w_{ff}|$  en la base y la parte alta (top) del edificio debidos a la acción de una onda P con incidencia vertical . . . . . 173

6.33. Comparativa de la respuesta del sistema formado por dos edificios cercanos separados una distancia $d$ (25 y 50 metros) con la de un sólo edificio aislado, cimentados en un semiespacio poroelástico. Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento desplazamiento horizontal $ v/v_{ff} $ , del giro de flexión $a \cdot  \theta_x/v_{ff} $ y del giro de torsión $a \cdot  \theta_z/v_{ff} $ en la base y la parte alta (top) del edificio, cimentado en un semiespacio poroelástico, debidos a la acción de una onda S con incidencia vertical . . . . .	174
6.34. Esquema de la vista isométrica del problema de dos edificios modelados con el modelo MEC–MEF y considerando como excitación una onda de Rayleigh (onda de superficie) . . . . .	175
6.35. Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento transversal $ u/u_{ff} $ , del desplazamiento vertical $ w/u_{ff} $ y del giro de flexión $a \cdot  \theta_y/u_{ff} $ en la base y la parte alta (top) de ambos edificios debido a la incidencia de ondas de Rayleigh. . . . .	176
6.36. Mapas de color del desplazamiento vertical $w$ sobre la superficie libre y el contorno de las cimentaciones del sistema excitado por ondas de Rayleigh considerando las cimentaciones rígidas y sin masa. . . . .	177



# Índice de tablas

2.1.	Tipología de los elementos cuadráticos triangulares y cuadriláteros . . . . .	35
2.2.	Ondas reflejadas y vectores <b>s</b> y <b>d</b> según la onda incidente . . . . .	43
2.3.	Ondas reflejadas y campo de desplazamientos según la onda incidente . . . . .	43
2.4.	Ondas reflejadas. Relaciones con el ángulo de incidencia $\theta_0$ . . . . .	44
2.5.	Tensores de deformaciones y tensor de tensiones. Condiciones de contorno. . . . .	44
2.6.	Amplitudes de la onda incidente y las ondas reflejadas . . . . .	45
3.1.	Propiedades elásticas de la estructura y el terreno . . . . .	57
3.2.	Frecuencias naturales del sistema para diferentes configuraciones . . . . .	68
4.1.	Velocidad de propagación ondas S en el suelo. Rango adoptado para la realización del estudio. . . . .	77
4.2.	Valores de $b_i$ [Bie75] . . . . .	83
4.3.	Valores de $L/D$ y $c_s$ para los que el error promedio es significativo ( $\bar{\epsilon}_j > 10\%$ ) al asumir la hipótesis de una estructura enterrada infinitamente rígida con profundidad de enterramiento $L$ . Para las configuraciones indicadas por celdas en gris, ninguno de los valores estudiados alcanza errores promedio superiores al 10%. Estructura maciza o hueca ( $\delta = 0.85$ ). . . . .	85
5.1.	Parámetros del sistema comunes a todos los casos de grupos de pilotes $2 \times 2$ estudiados . . . . .	122
5.2.	Casos grupos $2 \times 2$ . . . . .	123
5.3.	Propiedades de la sección transversal U para la definición de los elementos finitos	124
5.4.	Propiedades del material de la viga . . . . .	125
5.5.	Propiedades de la sección transversal del edificio para definir los elementos finitos	128
6.1.	Propiedades de la sección transversal del edificio para definir los elementos finitos	136







# Capítulo 1

## Introducción, desarrollos previos y descripción de objetivos

### 1.1 Introducción

Desde la década de los años 50 del pasado siglo y debido principalmente a la construcción de estructuras altamente sensibles como son los reactores nucleares en lugares de riesgo, la obtención de la respuesta sísmica de una estructura enterrada ha sido un problema de gran interés para los ingenieros civiles. Las eventuales consecuencias que el fallo estructural de este tipo de dispositivos pudiera provocar justifican el esfuerzo y la atención que la comunidad científica y técnica ha dedicado a este problema. Debe decirse que si bien es mucho el conocimiento adquirido de cuáles son los factores principales que deben ser tenidos en cuenta a la hora de abordar la construcción de este tipo de estructuras, son muchos aun los interrogantes que surgen al diseñador y calculista y, por tanto, se hace necesario avanzar en el conocimiento de los fenómenos involucrados y en el desarrollo de modelos precisos y eficientes que permitan arrojar nueva luz sobre la importancia relativa de los diferentes aspectos a tener en cuenta y que a la vez proporcionen al técnico elementos de decisión y herramientas de análisis.

En cuanto al papel que juega el terreno en el que se aloja la estructura enterrada, pronto se puso de manifiesto la importancia que tienen los efectos de interacción suelo–estructura en la respuesta estructural. Para empezar, la rigidez del conjunto estructura–suelo está fuertemente condicionada por la propia rigidez del material que configura el terreno, y por tanto, la hipótesis de base infinitamente rígida puede resultar ciertamente comprometida cuando la rigidez real del suelo no supere a la de la super–estructura en varios órdenes de magnitud. En el caso de una sollicitación dinámica el efecto es, si cabe, aun más claro. La consideración del suelo como parte del sistema bajo estudio implica la consideración de los efectos dinámicos asociados a la masa que aporta. Así pues, frente a la hipótesis de base rígida, la consideración de suelo flexible disminuye la rigidez global y aumenta la masa del sistema. En consecuencia, como pronto se comprendió, la consideración de los efectos de interacción suelo–estructura conlleva que las frecuencias naturales del sistema y las amplitudes de la respuesta dinámica son inferiores a las correspondientes a la hipótesis de base rígida. En ello influye también la consideración del amortiguamiento asociado al medio suelo, tanto el amortiguamiento interno del material como el amortiguamiento geométrico relacionado con la dispersión de la energía en un medio, como

es el suelo, no acotado.

En el caso de una sollicitación dinámica que proviene del terreno, como es el caso de la sollicitación sísmica, existen algunos elementos adicionales a tener en cuenta y que se ponen de manifiesto en el momento en que se relaja la hipótesis de base rígida. Son particularmente importantes los relativos a la naturaleza espacial de la sollicitación, al estar ésta producida por trenes de ondas sísmicas. Así pues, en el caso de estructuras que están en contacto con el terreno a lo largo de un ámbito geométrico que sea del mismo orden de magnitud que la longitud de las ondas sísmicas, los puntos de contacto estructura-suelo estarán sometidos, en cada instante de tiempo, a desplazamientos diferenciales, incluso en desfase, unos de otros. Aun más, la presencia de la estructura puede modificar la cinemática de los puntos en que se aloja la cimentación, en comparación con la que tendría lugar en situación de campo libre. Como consecuencia de todo ello, el cálculo sísmico del conjunto suelo-estructura requiere no solo la determinación precisa de la rigidez y propiedades dinámicas de cada medio, sino también la forma en que ambos se afectan mutuamente por tener vinculados los movimientos de los puntos de contacto. Se concluye que el cálculo dinámico de la estructura debe tener en cuenta todos estos efectos de interacción mutua.

En el caso de tipologías estructurales como puedan ser las correspondientes a silos nucleares, reactores nucleares, pozos de cimentación, etc., al tratarse de estructuras masivas, y siguiendo la línea de los primeros trabajos publicados sobre este problema, la hipótesis de cálculo habitual era considerar la estructura como un sólido rígido enterrado en un suelo considerado como un sólido deformable. Esta hipótesis permitía el empleo de técnicas simplificadas para la obtención de la respuesta (desplazamientos de puntos de la estructura, tensiones en la interfase estructura-suelo, etc.) y se justificaba por las herramientas de análisis que existían en aquellos años y sólo en determinados casos. Debe apuntarse que aun en la actualidad sigue siendo una hipótesis habitual del cálculo si la relación entre la profundidad del embebimiento y el ancho está del orden de 3. Por el contrario, un planteamiento riguroso haciendo uso de un modelo directo que incluya como objeto del análisis tanto de la estructura como el suelo de cimentación permite tener en cuenta la estructura con su rigidez real. Paradójicamente, son muy pocos los trabajos en la literatura que estudian la importancia de la rigidez de la estructura en su respuesta sísmica. Para estructuras tales como pozos, depósitos o estaciones de bombeo semienterradas, y hasta donde conoce el autor de este trabajo, apenas existen referencias que observan el problema, con las características geométricas particulares, en los términos globales planteados.

En este sentido, en el grupo de investigación en el que se ha llevado a cabo esta tesis doctoral, se han desarrollado en los últimos años modelos numéricos basados en el Método de los elementos de Contorno (MEC) y en el Método de los Elementos Finitos (MEF) que permiten el análisis directo del problema teniendo en cuenta los efectos de interacción entre regiones distintas (suelo, estructura) y los acoplamientos mutuos. Es en esta línea en la que se desarrollan los objetivos de esta tesis. Por tanto, con el objeto de poner en contexto el trabajo que se ha llevado a cabo, resulta adecuado exponer de forma breve los modelos desarrollados por el grupo de investigación hasta el momento en que se aborda este trabajo de investigación, y que han sido el punto de partida del mismo. Esta breve exposición, a la que está dedicada el próximo apartado, permite además un acercamiento al estado del arte en cada una de las líneas de trabajo que se van a exponer.

## 1.2 Antecedentes: modelos desarrollados en el grupo de investigación

Esta tesis doctoral es continuación de una línea de trabajo en el campo de la modelización numérica aplicada a problemas de dinámica estructural y propagación de ondas que se lleva a cabo en la División de Mecánica de Medios Continuos y Estructuras del Instituto Universitario SIANI de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria (ULPGC) en la que se ha integrado el autor. Esta línea tiene su origen en el grupo del Profesor José Domínguez Abascal en la Universidad de Sevilla hace casi 30 años y es continuada desde mediados de los años 90 del siglo pasado por este grupo de la ULPGC. Durante estos años, se ha desarrollado e implementado un modelo numérico propio basado en el Método de los Elementos de Contorno (MEC) que permite simular de forma realista la propagación de ondas en medios infinitos y la influencia de los fenómenos de interacción entre regiones de distinta naturaleza, en la respuesta de los sistemas bajo estudio. En el campo de la dinámica estructural, el modelo analiza conjuntamente la estructura, el terreno, el agua en casos como embalses u otras estructuras de contención, e incluso regiones de naturaleza poroelástica (sedimentos, terrenos bajo el nivel freático, etc.). En este tipo de problemas, puede decirse que este modelo ha sido referencia en los últimos años ya que permite, de forma natural, la consideración rigurosa de la interacción entre todos los medios presentes, así como incorporar el carácter viajero de la excitación (onda sísmica, vibración producida por maquinaria, etc.), aspecto éste determinante en la respuesta. Este modelo, si bien de aplicación muy general, se ha utilizado hasta ahora principalmente para el análisis de la respuesta sísmica de presas bóveda [MD93, DM93, MAD00, MAD02, MAD04, AMD06], estructuras pilotadas [VMAO03, MAD03, MAG05] o estructuras enterradas poco esbeltas y masivas donde la hipótesis de infinita rigidez puede comprometer los resultados [VMAA07, VAS<sup>+</sup>13].

En los 10 últimos años, el interés del grupo también se ha dirigido en la realización de un código acoplado de Elementos de Contorno y Elementos Finitos (MEC-MEF) tridimensional para el análisis dinámico directo de estructuras de edificación pilotadas. Este modelo cuenta con las ventajas ya mencionadas del modelo anterior para representar regiones semi-infinitas y la simplificación que supone modelar vigas, pilares y pilotes de la estructura (estructura de barras clásica) con Elementos Finitos. Este modelo ha permitido el análisis de la respuesta de cimentaciones pilotadas (impedancias e interacción cinemática ante un tren de ondas incidente vertical) [PAM07, PAM08, PAMS10, PAMS12, PSAM15, MPA<sup>+</sup>14], así como el estudio directo del conjunto suelo–cimentación–estructura sometido a ondas sísmicas o vibraciones que se propagan por el terreno [PAM09, PAM11] o la caracterización práctica de los efectos de interacción suelo–estructura mediante subestructuración [MPAM13, MPAM15].

Por otra parte, y también basados en el MEC, el grupo ha dedicado parte de sus esfuerzos en estos años al desarrollo de modelos numéricos para el estudio de la propagación de ondas acústicas en campo abierto. Así, se han explotado las ventajas del método para creación de modelos (fundamentalmente 2D) que se han aplicado al estudio en el dominio de la frecuencia de la eficacia acústica de pantallas anti-ruido. En este sentido, una revisión del método orientado a esta aplicación, el código de ordenador desarrollado y los resultados más destacados obtenidos hasta esa fecha fueron publicados en 2005 [MA05]. Posteriormente, y ya ensamblados en códigos con algoritmos genéticos (AG), han comenzado a aplicarse en la búsqueda de perfiles de pantalla que maximicen la atenuación del impacto [GAMW10].

Así, tomando como punto de partida y matriz estos modelos dinámicos acoplados de elementos de contorno, se han incorporado con esta tesis una serie de nuevas habilidades que permiten abordar problemas estructurales que involucran estructuras enterradas o semienterradas del tipo pozo o silo de cimentación, y también estructuras de edificación cimentadas en suelos elásticos

o poroelásticos a través de elementos masivos, rígidos, de cimentación. La modelización toma como elementos de análisis tanto el MEC como otros métodos de cálculo, como pueden ser modelos simplificados tipo Winkler.

A lo largo de este apartado se describen de forma resumida los contenidos de las líneas de trabajo previamente desarrolladas (que han supuesto las herramientas de partida) y los principales resultados a que han dado lugar. En el próximo apartado se centra la atención hacia los objetivos y alcance de las actividades desarrolladas en el marco de esta tesis doctoral.

### 1.2.1 Líneas de trabajo desarrolladas

#### 1.2.1.1 Problemas de interacción suelo–agua–estructura. Respuesta sísmica de presas bóveda.

El nivel de comprensión de los aspectos vinculados al comportamiento estructural bajo carga dinámica ha experimentado importantes avances, en gran medida motivados por el importante desarrollo de herramientas numéricas que permiten cuantificar la respuesta sobre modelos deterministas. En los últimos treinta años se han desarrollado modelos progresivamente más sofisticados y complejos que han permitido representar y cuantificar la verdadera importancia de fenómenos como la interacción entre el suelo y la estructura o la estructura y el fluido, la topografía y geología del emplazamiento, el carácter espacial de la excitación sísmica, etc., en la respuesta sísmica de las estructuras.

El estudio de la respuesta sísmica de presas bóveda es complejo debido a la existencia de medios de diversas características (hormigón, roca, agua, sedimentos de fondo), cada uno de los cuales presenta un comportamiento propio diferente de los demás. Ante una sollicitación sísmica estos medios interactúan entre sí formando un sistema acoplado en el que ninguna de las partes puede ser estudiada aisladamente. Además, para complicar más el análisis, los dominios son muy extensos o prácticamente infinitos en la práctica. Este hecho dificulta el estudio ya que a diferencia del análisis estático, en el caso dinámico accidentes muy alejados de un punto pueden tener una gran influencia sobre el movimiento y tensiones a que éste se ve sometido. Además, en el caso de presas bóveda, el problema tiene una geometría que no permite simplificación dimensional alguna y ha de ser estudiado con modelos que contemplen su realidad tridimensional.

En España, ya desde 1986, el grupo de José Domínguez en la Universidad de Sevilla comenzó el desarrollo de un modelo numérico que hace uso del Método de los Elementos de Contorno y que puede tener en cuenta rigurosamente importantes factores que, o no eran considerados por los modelos existentes de Elementos Finitos o lo eran de una forma simplificada o poco rigurosa. Cabe destacar los efectos de interacción combinada suelo–presa–embalse, el efecto de la geometría real del embalse, la topografía local o el efecto de los desplazamientos diferenciales de la excitación. Inicialmente de carácter bidimensional, aplicado al estudio sísmico de presas de gravedad [DM89a, DM89b] se extendió a principios de los años 90 al análisis de presas bóveda tridimensionales [DM93, MD93] convirtiéndose en un modelo de referencia para muchos investigadores a nivel internacional. Un compendio detallado de los trabajos pioneros del grupo de Sevilla en la formulación y aplicación del MEC a este y otros campos de la elastodinámica pueden consultarse en Domínguez (1993) [Dom93].

Entre los diferentes modelos numéricos previos para abordar el problema cabe destacar los desarrollados por el grupo de Anil K Chopra en la Universidad de California en Berkeley [FC86, FC87]. Se trata de un modelo tridimensional de elementos finitos que tenía en cuenta la existencia de los tres medios, la compresibilidad de agua y la flexibilidad del suelo. Sus principales limitaciones



eran: a) El suelo se representa a través de una malla de elementos finitos que se extiende hasta cierta distancia de la presa. Los efectos de reflexión que implican el truncar la discretización de este medio se evitaban considerando que sus elementos tienen masa nula; b) La interacción suelo-embalse se estima a través de un modelo simplificado haciendo uso de coeficientes de absorción cuyo valor depende de las propiedades del fondo del embalse, e introduce un alto grado de incertidumbre. Si bien este modelo representó un avance importante en el tratamiento riguroso del problema, las simplificaciones descritas le impedían considerar adecuadamente el efecto de interacción mutua. Asimismo, este modelo no podía tener en cuenta la influencia que en la respuesta tiene la distribución espacial de la excitación. Posteriormente Zhang y Chopra [ZC91] y Tan y Chopra [TC95a, TC95b] mejoraron el modelo anterior introduciendo elementos de contorno para el suelo, si bien el estudio de la presa y el terreno no puede realizarse conjuntamente.

Hasta ese momento, son muy pocos los estudios publicados que incluyen una excitación no uniforme para presas bóveda tridimensionales [CH87, ZZ88, NH90, KT91a, KT91b] o más recientemente [Cam00, Alv04, AH06, WC10, CW10]. Todos coinciden en que los efectos de la variación espacial de las ondas son relevantes pero, también todos, incluyen importantes simplificaciones (suelos sin masa, cañones uniformes, etc.). Una revisión reciente de estos procedimientos puede encontrarse en el Chopra (2012) [Cho12].

El arrastre y sedimentación de fangos provoca, con el transcurso del tiempo, la existencia en el fondo del embalse de un depósito de material cuyo espesor puede ser, en algunos casos, del orden de la mitad de la profundidad de la presa. Estos sedimentos no sólo modifican el perfil geométrico del fondo, sino que también afectan a la interacción dinámica entre el agua y los contornos que delimitan el vaso, al tiempo que juegan un importante papel al absorber parte de las ondas que los atraviesan.

Inicialmente, el efecto de los sedimentos en la respuesta dinámica de presas de gravedad se tuvo en cuenta mediante modelos muy simplificados. Así, Fenves y Chopra [FC85] fueron los primeros en presentar un modelo 2D que incluía la absorción en el fondo del embalse mediante un coeficiente de reflexión de acuerdo con la teoría monodimensional de propagación de ondas. El mismo tipo de simplificación fue empleado, ahora ya para problemas tridimensionales, en el modelo ya comentado que Fok y Chopra [FC86, FC87] presentaron para el análisis sísmico de presas bóveda. En ambos casos el valor de este coeficiente de reflexión, que debía ser estimado a partir de las propiedades del sedimento y del terreno, introduce inevitablemente una doble fuente de incertidumbre: por un lado acerca de su valor para una situación real concreta, y por otro acerca de la aptitud de este modelo monodimensional de interacción para representar con rigor los fenómenos de interacción entre el embalse y sus contornos para un problema cuyo carácter real es 2D ó 3D. Aun así, más recientemente, Chuhan et al. [CCwG01] abordan el cálculo de coeficientes de absorción, y proponen de nuevo un modelo monodimensional para una geometría que consiste en una lámina de agua sobre un estrato que representa el sedimento, y que es modelado bien como medio viscoelástico o bien como un medio poroelástico completamente saturado. Los valores obtenidos de dicho coeficiente son utilizados luego por los autores en el código de elementos finitos de Hall y Chopra [HC83] para el estudio del efecto de la compresibilidad del embalse en una presa arco bidimensional.

Modelos posteriores más avanzados consideran el sedimento como una región más del problema y de naturaleza viscoelástica cuasi-incompresible. En estos modelos la interacción dinámica entre regiones se establece de forma rigurosa a través de ecuaciones adicionales de equilibrio y compatibilidad (en problemas 2D Lofti et al. [LRT87] o Medina et al. [MDT90]; en modelos 3D Lin y Tassoulas [LT87]).

Con todo ello, muchos trabajos posteriores coinciden en que el modelo más apropiado para el

estudio del comportamiento dinámico de los sedimentos es el que los representa como un medio de naturaleza poroelástica [Bio56a]. En este modelo, Biot concibe el medio constituido por dos fases (un esqueleto elástico que representa la matriz sólida y un medio fluido compresible que representa el agua que fluye por los intersticios del esqueleto) si bien formula su comportamiento desde un punto de vista no microscópico definiendo variables que pueden ser entendidas con carácter promedio. Así, con un modelo de estas características, Cheng [Che86] estudia la influencia del sedimento y sus propiedades en el perfil de presiones hidrodinámicas sobre la pared de una presa rígida. Se trata de un problema monodimensional que permitió a su autor poner de manifiesto que existen sensibles diferencias en los resultados en función de la compresibilidad del sedimento y su grado de saturación (aire retenido en la masa fluida; [Ver69]). Bougacha y Tassoulas [BT91b, BT91a] desarrollaron un modelo acoplado 2D de elementos finitos para el análisis dinámico de presas de gravedad, que incorpora una lámina uniforme de sedimento poroelástico que descansa sobre un estrato de suelo elástico con base rígida. Los mismos autores [BT06] publican una revisión de este modelo donde referencian en detalle los trabajos realizados por el Grupo del SIANI. Posteriormente, Domínguez et al. [DJG97] ampliaron el modelo de elementos de contorno bidimensional de Domínguez y Medina [DM89a, DM89b] para incorporar sedimentos de naturaleza poroelástica. Esto último fue posible de modo sencillo gracias a una novedosa formulación integral del problema poroelástico llevada a cabo por Domínguez [Dom91, Dom92] aplicada primero a problemas 2D por los mismos autores [JGD97] y que pudo luego extenderse a problemas tridimensionales.

En este punto se presenta el modelo tridimensional de elementos de contorno para el análisis dinámico de presas bóveda desarrollado en el grupo del Instituto SIANI de la ULPGC, desarrollado a partir de la idea básica de los modelos 2D de Domínguez y colaboradores, esto es, el análisis directo acoplado de regiones tratadas con Elementos de Contorno. Se pretendía con ello, formular e implementar una alternativa más realista para el problema que pretende resolverse: determinar la respuesta dinámica de una estructura de estas características ante una excitación consistente en una onda armónica plana que incide con ángulo variable desde zonas alejadas. Sin hipótesis simplificadoras, el modelo tiene en cuenta el carácter tridimensional del problema real, los efectos de interacción mutua entre regiones de diferente naturaleza (presa de hormigón, suelo, agua y sedimentos porosos para los cuales cabe esperar un comportamiento acoplado muy distinto del que presentarían actuando independientemente) y el carácter espacial o naturaleza propagatoria de la excitación.

Todas las regiones implicadas son discretizadas en elementos de contorno y se formulan desde planteamientos integrales propios que implican a variables primarias diferentes y que dependen de la naturaleza del dominio analizado. Los efectos de interacción entre cualesquiera dos de estos dominios se tienen en cuenta de forma rigurosa imponiendo condiciones de equilibrio y compatibilidad adicionales entre estas variables en las interfaces. El agua se modela como un fluido compresible, el terreno rocoso como un medio elástico no finito y los sedimentos como un medio de naturaleza poroelástica saturado o no de agua. El carácter espacial de la excitación, su amortiguamiento por radiación así como los otros factores topográficos y geológicos responsables de efectos locales, son tenidos en cuenta de forma rigurosa y natural.

Ya los primeros trabajos [DM93] pusieron de manifiesto serias discrepancias entre los resultados obtenidos a través del modelo de Fok y Chopra [FC86, FC87] y los resultantes de un modelo de interacción rigurosa.

Posteriormente, se amplía la definición de la excitación [MAD00, MAD02] incorporando ondas planas tipo SH, P, SV y Rayleigh que inciden con ángulo variable sobre el emplazamiento. Se analiza también la influencia de la geometría del cañón, su profundidad y las importantes alteraciones que provoca sobre el campo incidente su carácter tridimensional. Hasta ese momento, la mayoría de los trabajos que ponen de manifiesto estos efectos locales se habían realizado

sobre geometrías bidimensionales: [Tri73, Dra82, Won82, SSBH85, NH90] o posteriormente [ÁRSSBA04].

Se incorporan los sedimentos de fondo como una nueva región de elementos de contorno con propiedades poroelásticas [AMD01, MAD04]. Además de resultados en frecuencia que muestran la influencia del espesor del sedimento y su grado de saturación, en estas referencias se presentan resultados en el dominio del tiempo obtenidos ante terremotos reales. La versatilidad con la que se ha dotado al modelo, también permite estudiar problemas que simulan grados de consolidación crecientes con la profundidad [AMD06] y que van desde fluidos densos en superficie [CH93] hasta sólidos porosos consolidados a lo largo del espesor de la masa sedimentaria.

Estos desarrollos han permitido estudios posteriores exhaustivos de la influencia de las condiciones del embalse (altura de llenado, espesor de sedimentos, grado de saturación, etc.) [GAC<sup>+</sup>14] o las características de la excitación (tipo/s de onda/s incidente, ángulo de incidencia) en la variabilidad de la respuesta del sistema ante terremotos sintetizados a partir espectros de respuesta recogidos en la Normativa [GAM11].

Se puede decir que el modelo desarrollado es actualmente reconocido por ser capaz de representar rigurosamente en tres dimensiones los distintos factores que intervienen en este problema acoplado (topografía y propiedades geológico-geotécnicas del emplazamiento, geometría del embalse, sedimentos, etc.) y es, sin duda, un referente a nivel internacional. Así queda reflejado en las referencias que de él hacen otros autores (ver p.e. la amplia reseña que realiza Zerva [Zer09]) y en el interés que han mostrado en sus posibilidades otros grupos de investigación. En este sentido, en 2005 este modelo fue cedido al grupo del Profesor JH Prevost en el Departamento de Ingeniería Civil y Medioambiental de la Universidad de Princeton y utilizado en sendos trabajos relacionados con la influencia de la geometría del embalse en la respuesta sísmica de presas de gravedad y el estudio dinámico acoplado del conjunto presa–torre de captación [MYP07, MYP09].

### 1.2.1.2 Problemas de interacción suelo–estructura. Respuesta dinámica de estructuras de edificación pilotadas.

Algunos miembros del grupo del Instituto SIANI de la ULPGC ya han venido desarrollando el estudio de rigideces dinámicas de cimentaciones superficiales y enterradas sobre suelos viscoelásticos desde hace más de dos décadas [ED89, EA94] o poroelásticos [AMC99, MAC99]. Estos trabajos están basados en las dos monografías que presenta Domínguez en el M.I.T. en 1978 [DR78a, DR78b] y que, por vez primera, representan la posibilidad de modelado numérico del suelo como un medio tridimensional infinito haciendo uso de la formulación directa del MEC. Aplicable a multitud de problemas en ingeniería civil, este procedimiento constituyó un gran avance en ese momento ya que permitía superar con facilidad las limitaciones del MEF en problemas dinámicos para este tipo de medios. Treinta años después, estos trabajos continúan siendo un referente a nivel internacional (ver p.e. [Bes87, Bes97]) y ya se aplican de forma habitual en multitud de problemas que pretenden tener en cuenta los fenómenos de interacción suelo–estructura de forma rigurosa.

Con respecto a las cimentaciones por pilotaje, la versatilidad del código acoplado de elementos de contorno desarrollado para el análisis de la respuesta sísmica de presas bóveda, permitió al grupo del SIANI–ULPGC implementar de forma sencilla un modelo riguroso en tres dimensiones para el estudio de la respuesta dinámica de este tipo de cimentaciones hincadas en el semiespacio viscoelástico [VMAO03, MAD03] y poroelástico [MAG05] homogéneos. Así, este modelo no desarrolla simplificaciones dimensionales ni de comportamiento como viga para el/los pilotes de la cimentación, sino que éstos son modelados desde una formulación elástica de medio continuo.

Esta característica, si bien lo convierte en un modelo completamente riguroso y aplicable a otros problemas con presencia de pilotes (ver p.e. [KPB99]), representa su principal inconveniente en otros casos ya que implica la generación de discretizaciones con un elevado número de grados de libertad y que, por tanto, necesitan de grandes recursos informáticos para su evaluación.

Por este motivo, el siguiente paso del grupo SIANI–ULPGC fue la formulación e implementación de un modelo que utiliza Elementos de Contorno para el suelo y Elementos Finitos tipo viga Euler–Bernoulli para los pilotes [PAM07] y que permite el estudio de grupos de pilotes con relativamente pocos grados de libertad. Este modelo se ha extendido al análisis dinámico de cimentaciones con pilotes inclinados [PAMS10, PAM11] y ha sido ampliado para incluir la superestructura en un análisis conjunto que permita cuantificar efectos de interacción mutua entre varias estructuras pilotadas presentes en el emplazamiento estudiado [PAM09, PAM11, ÁPAM15]. Inspirado en otro modelo estático de elementos de contorno para el análisis de cimentaciones pilotadas previo [FMdP05], tiene la ventaja procedimental de considerar la interacción pilotes–suelo como una carga interna al terreno, a diferencia de otros modelos similares que discretizan la interfase suelo–pilote para luego aplicar simplificaciones que permiten el acoplamiento con elementos finitos tipo viga [CVA99, MD09].

Ya en esta fase, el código ha permitido el análisis de esfuerzos en pilotes provocados por seísmos artificiales sintetizados a partir de las formas espectrales definidas en la Normativa, y constituidos por trenes de onda de distinto tipo y ángulo de incidencia [ZAPM13]. También, en el caso de pilotes inclinados, ha permitido el estudio de la influencia de su grado de inclinación en los valores máximos de la envolvente de esfuerzos para seísmos con incidencia vertical, también sintetizados a partir de espectros de la Norma [PSAM15].

Si bien el modelo desarrollado permite el análisis conjunto y directo del suelo–cimentación y estructura, también se ha utilizado como herramienta numérica para la realización de estudios paramétricos mediante técnicas de subestructuración [MPAM13, MPAM15]. Estos estudios han permitido comprender y cuantificar (periodo y amortiguamiento de sistemas de 1 gdl equivalentes) los efectos de interacción suelo–estructura en función de las características del problema (cimentación, estructura y rigidez relativa estructura–suelo). Las conclusiones obtenidas tienen aplicación inmediata en análisis estructural práctico. Puede decirse que es éste un procedimiento de análisis clásico en la literatura, y con él el número de referencias bibliográficas es elevado en el caso de estructuras sobre cimentaciones superficiales o poco enterradas (ver e.g. [VM74, Bie75, TT92, APR98]. Sin embargo, han sido muy escasas las aportaciones en esta dirección en el caso de edificios cimentados con pilotes [Rai75, AA03, MMK07]. En [MPAM13] se discute en detalle el procedimiento más adecuado para determinar las propiedades de este sistema equivalente y se aplica a cimentaciones con pilotes verticales. En [MPAM15] se amplía este estudio al caso de cimentaciones con pilotes inclinados.

En la bibliografía y a lo largo de los últimos 30 años, existen modelos similares pero pocos tan versátiles como el desarrollado en el grupo SIANI–ULPGC. Destacan los trabajos de la escuela de los profesores Kausel en el M.I.T. [KK91], Banerjee en Buffalo [SDB85, MB90, GB98] y Gazetas en la Universidad de Atenas [MG92, MG99]. En este apartado, son de referencia obligada los trabajos de Poulos [PD80] y su gran número de contribuciones en el análisis estático/dinámico de cimentaciones pilotadas. En el caso de pilotes hincados en suelos poroelásticos son muchas las referencias a procedimientos analítico–numéricos siguiendo la línea de Muki y Sternberg [MS69]. Así puede citarse [RS87, ZR99, JZ01, XLW10]. Estos últimos autores citan como única referencia de modelo MEC aplicado al problema la publicada por el grupo SIANI–ULPGC [MAG05].

Es importante destacar la colaboración recientemente iniciada con el Grupo del profesor R Gállego (Universidad de Granada) en el sentido de incorporar la experiencia que dicho grupo ha

acumulado en el uso de soluciones fundamentales del semiespacio viscoelástico estratificado [PG02, GPMC06, MCG07], que pueden ser incluidas en los códigos desarrollados por el equipo de la ULPGC para abordar problemas de estructuras pilotadas en suelos estratificados.

### 1.3 Objetivos de la tesis y contribuciones originales

En el contexto que acaba de resumirse en el apartado anterior, esta tesis pretende contribuir al avance en el estado de comprensión de problemas dinámicos que involucran sistemas estructura-suelo-estructura. En concreto, la tesis aborda el estudio particular de tipologías estructurales másicas poco esbeltas, enterradas o semi-enterradas, en las cuales el comportamiento estructural está muy condicionado por la correcta estimación de su rigidez en relación con la rigidez del suelo. Para este análisis se hará uso de modelos muy rigurosos de Elementos de Contorno pero también se desarrollarán modelos simplificados tipo Winkler. Un segundo objetivo de la tesis será el desarrollo de un modelo numérico riguroso y eficiente desde el punto de vista computacional, para el cálculo sísmico de estructuras de edificación cimentado en suelos viscoelásticos o poroelásticos a través de cimentaciones rígidas. El modelo desarrollado para tal fin hará uso del MEC para la modelización del suelo y del MEF para la modelización del edificio.

A continuación se describen con algo más de detalle ambos objetivos.

#### 1.3.1 Problemas de interacción suelo-estructura. Respuesta dinámica de estructuras enterradas poco esbeltas.

Representa posiblemente el problema de referencia en el campo de la investigación de los efectos de interacción dinámica suelo-estructura en la respuesta sísmica. Ya desde la década de los años 50 del siglo XX son bastantes los trabajos que se realizan en el estudio de este problema sobre todo como consecuencia de la construcción de los primeros reactores nucleares civiles en emplazamientos de riesgo.

Al tratarse de estructuras masivas, y siguiendo la línea de los primeros trabajos publicados sobre este problema, la hipótesis de cálculo habitual era tratar la estructura como un sólido rígido enterrado en un suelo considerado un sólido deformable. Esta hipótesis permitía el empleo de técnicas de subestructuración para la obtención de la respuesta. Este tratamiento se justificaba en aquellos años a tenor de las herramientas disponibles y sólo en determinados casos. Considerar la estructura como un sólido rígido en un problema dinámico permite simplificar el análisis de forma considerable. Se trata de una hipótesis de trabajo muy habitual para estructuras enterradas poco esbeltas, si bien, dependiendo del problema, puede dar lugar a resultados que comprometen la seguridad.

Un planteamiento más riguroso haciendo uso de un modelo directo acoplado como el desarrollado previamente en el grupo de la ULPGC permite tener en cuenta la estructura con una estimación más realista de su rigidez y será objeto de esta tesis.

El objetivo último sería la elaboración de un criterio para establecer en qué rango de dimensiones, rigidez relativa suelo-estructura y valores de la frecuencia de excitación son de aplicación las técnicas clásicas. Dicho de otra forma, en qué problemas es necesario acudir a modelos más realistas que consideren la estructura con su verdadera rigidez, las interacciones mutuas y el carácter espacial de la excitación sísmica de forma rigurosa. En la bibliografía hay pocos trabajos en esta línea. Para el problema de impedancias de cimentaciones puede consultarse el trabajo pionero de Elsabee et al. [EMR77] o el más reciente de Saitoh y Watanabe [SW04]

en la misma dirección. Para estructuras tales como pozos, depósitos o estaciones de bombeo semienterradas, y hasta donde el autor de este trabajo conoce, apenas existen referencias que observan el problema en los términos planteados en esta tesis.

### 1.3.2 Problemas de interacción suelo–estructura. Modelo acoplado EF–EC para el análisis dinámico de edificios.

En esta tesis se plantea la posibilidad de ampliar el ámbito de aplicación de los códigos previamente desarrollados para analizar efectos de interacción suelo–estructura en edificios más reales. El objetivo a medio y largo plazo es explorar la posibilidad de validar numéricamente con este código los resultados experimentales existentes en la bibliografía y poner de manifiesto los posibles efectos de interacción suelo–estructura y estructura–suelo–estructura (varios edificios cercanos).

Para ello se ha confeccionado un modelo con alto grado de generalidad incorporando simplificaciones razonables asociadas al carácter del problema. Así, se formula e incorpora el acoplamiento de regiones consideradas rígidas (cimentación) con medios viscoelásticos o poroelásticos deformables y condiciones de contacto permeable e impermeable. En lo que se refiere a la excitación, ésta puede estar constituida por trenes de onda con incidencia variable en el caso del semiespacio viscoelástico o con incidencia vertical en caso de terrenos de naturaleza poroelástica. Los edificios se modelan haciendo uso de elementos finitos tipo viga Timoshenko con propiedades equivalentes. Esta estrategia garantiza problemas con un número razonable de grados de libertad y permite analizar la respuesta de varios edificios simultáneamente.

Así por tanto, y con lo dicho, los objetivos de tesis que se presenta pueden sintetizarse en los siguientes:

1. Aplicación del modelo MEC al estudio sísmico de estructuras enterradas flexibles poco esbeltas. Además de por su flexibilidad, la respuesta de estas estructuras está determinada también por las propiedades del terreno y las dimensiones de la propia estructura en relación con el intervalo de longitudes de onda relevantes de la excitación sísmica. Se pretende poner de manifiesto las discrepancias en la respuesta (en relación a la obtenida con modelos simplificados) sobre un problema real de estas características.
2. Abordar la formulación de un modelo tipo Winkler sencillo y de fácil aplicación para el análisis de este tipo de estructuras. La utilización de los resultados obtenidos del uso del modelo MEC permitirá la formulación y calibración de un modelo simple de este tipo que permita el análisis dinámico de este tipo de estructuras de forma accesible al colectivo profesional.
3. Avanzar en el desarrollo del modelo numérico acoplado de elementos de contorno, incorporando al mismo nuevas prestaciones. En este sentido, se propone un modelo acoplado de elementos finitos y elementos de contorno para el análisis de estructuras de edificación. Así, se formula e incorpora el acoplamiento de regiones consideradas rígidas (cimentaciones) con medios viscoelásticos o poroelásticos deformables y condiciones de contacto permeable e impermeable. En lo que se refiere a la excitación, ésta puede estar constituida por trenes de onda con incidencia variable en el caso del semiespacio viscoelástico o con incidencia vertical en caso de terrenos de naturaleza poroelástica. Los edificios se modelan haciendo uso elementos finitos tipo viga Timoshenko con propiedades equivalentes. Esta estrategia garantiza problemas con un número razonable de grados de libertad y permitiría analizar la respuesta sísmica de varios edificios simultáneamente.

## 1.4 Organización del documento

En el presente documento de tesis se describen en detalle las metodologías empleadas, las formulaciones implementadas así como los procesos de validación. Asimismo se discuten los resultados obtenidos y los análisis paramétricos llevados a cabo.

Después de los antecedentes expuestos en los apartados anteriores, en el Capítulo 2 se presentan las ecuaciones básicas que gobiernan el comportamiento dinámico de los medios elásticos y poroelásticos, así como la teoría de propagación de ondas a través de este tipo de medios. Se expone la formulación integral y la solución fundamental, para después, relacionando las variables fundamentales del dominio con los valores que adoptan éstas y sus derivadas en el contorno, presentar la formulación integral en el contorno. Las ecuaciones de dicha formulación integral en el contorno se discretizan usando para ello el método de elementos de contorno, con una breve mención a los aspectos numéricos más relevantes. Se continúa con la definición y aplicación de las condiciones de contorno para el acoplamiento entre regiones con distinta naturaleza y/o diferentes propiedades, en términos de las variables fundamentales y sus derivadas, en las interfases entre ambas. Para acabar el capítulo se presentan las ecuaciones que definen el campo incidente en un semiespacio viscoelástico o poroelástico. En el caso viscoelástico se presentan las expresiones necesarias para definir los campos de desplazamientos y tensiones cuando se propagan ondas de tipo SH, P, SV y Rayleigh que llegan a la superficie con un ángulo de incidencia totalmente general. Para el caso poroelástico las expresiones que se muestran son las correspondientes a ondas transversales S y longitudinales P con incidencia vertical.

En el Capítulo 3 se presenta el estudio de la respuesta de una estructura real de grandes dimensiones, la cual está enterrada en gran parte de su longitud, y que puede ser considerada como poco esbelta por el valor de la relación entre la longitud y el ancho de la misma. Para el análisis de esta tipología estructural se ha utilizado tradicionalmente el método de los tres pasos. Para el estudio que aquí se presenta se usa el método de elementos de contorno expuesto en el Capítulo 2, con el objetivo de comprar la respuesta obtenida a través de dos metodologías, una de subestructuración, basada en la hipótesis de rigidez infinita de la estructura, y otra directa en la que se considera un valor más realista de su rigidez estructural. La comparativa de los resultados obtenidos aplicando ambas metodologías muestran que la hipótesis de rigidez infinita puede infravalorar la respuesta, poniendo de manifiesto que debe prestarse la debida atención en la elección de la metodología empleada para estos problemas clásicos de interacción suelo-estructura.

De las conclusiones sacadas del Capítulo 3, se crea la necesidad de abordar un estudio que permita determinar la importancia de la verdadera flexibilidad de la estructura enterrada para la obtención de su respuesta sísmica. Así, en el Capítulo 4 se pretende presentar y desarrollar un estudio paramétrico sobre este aspecto y que permita cuantificar el error que supone hacer uso de un modelo basado en la rigidez infinita de la estructura. Para dicho estudio se utiliza un modelo simple tipo Winkler debido a que la gran cantidad de casos para los que se aborda la obtención de la respuesta obliga a utilizar una herramienta de cálculo poco costosa computacionalmente. En esa línea se aborda numéricamente la resolución de las ecuaciones del problema mediante el uso de elementos finitos sencillos tipo viga, o bien si la complejidad del modelo y problema lo permite, mediante la obtención directa de la solución analítica de las mismas. Se muestran resultados estimando el error cometido al aplicar la hipótesis de rigidez infinita respecto a los resultados de una metodología que considera la flexibilidad de la estructura. Estos resultados permiten por lo tanto tener un criterio de elección para la metodología a aplicar en función del error cometido.

En el Capítulo 5 se presenta la formulación de un modelo acoplado de elementos de contorno y elementos finitos para el estudio de la respuesta dinámica y sísmica de estructuras de edificación. Cuando la hipótesis de rigidez infinita es aplicable a la cimentación, este modelo permite incorporar regiones con comportamiento de sólido rígido embebidas en el terreno, el cual se modela como un semiespacio viscoelástico o poroelástico. Se expone la implementación al modelo de elementos de contorno del Capítulo 2 la estrategia de acoplamiento entre la malla de elementos de contorno y cimentación rígida, basada en la aplicación de ecuaciones adicionales de equilibrio y compatibilidad en las interfases entre el suelo y la cimentación. La superestructura se modela como una viga elástica y homogénea usando elementos finitos de dos nodos tipo Timoshenko que incluyen la excentricidad torsional del edificio. Al final de este capítulo se presentan varios resultados de validación del modelo.

El Capítulo 6 muestra los resultados de aplicación del modelo MEC-MEF, formulado en el Capítulo 5, para el estudio de la respuesta dinámica de una estructura de edificación que presenta excentricidad torsional por la forma en U de su sección transversal. Se presentan resultados de la respuesta dinámica de esta estructura cimentada en un terreno viscoelástico ante la acción de ondas P, SV, SH y Rayleigh con incidencia variable, para mostrar la influencia del ángulo de incidencia de la excitación o de la interacción estructura-suelo-estructura por la presencia de otra estructura cercana. También se estudia la influencia en la respuesta al considerar el terreno como poroelástico, así como los efectos de interacción estructura-suelo-estructura, ante la acción de ondas S y P verticales.

El documento finaliza con un capítulo de revisión general, en que se destacan las principales conclusiones y se propone una relación de posibles desarrollos futuros de esta investigación.

### 1.5 Financiación recibida y productividad científica

Esta tesis doctoral ha sido realizada con la financiación recibida a través del contrato predoctoral FPI asociada al Proyecto de investigación “Estudio del comportamiento dinámico de presas y pilotes incluyendo efectos de interacción suelo-estructura, acciones sísmicas y propagación de ondas” (BIA2007-67612-C02-01). El autor de esta tesis es el beneficiario de la beca FPI para la investigación, con referencia BES-2009-029161, otorgada por el Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO) y asociada al mencionado proyecto. El trabajo de investigación realizado durante la confección de esta tesis doctoral también ha sido financiado por la Subdirección General de Proyectos de Investigación del Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO) a través del proyecto BIA2010-21399-C02-01 y por la Agencia Canaria de Investigación Innovación y Sociedad de la Información (ACIISI) del Gobierno de las Islas Canarias y FEDER a través del proyecto ProID20100224.

Productividad científica

Artículos en revistas científicas ISI-JCR:

- L A Padrón, J J Aznárez, O Maeso, A Santana. Dynamic stiffness of deep foundations with inclined piles. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 39:1343–1367, 2010.
- J Vega, J J Aznárez, A Santana, E Alarcón, L A Padrón, J J Pérez, O Maeso. On soil-structure interaction in large non-slender partially buried structures. *Bulletin of Earthquake Engineering*, 11(5):1403–1421, 2013
- C Medina, L A Padrón, J J Aznárez, A Santana, O Maeso. Kinematic interaction factors of



deep foundations with inclined piles. *Soil Dynamic and Earthquake Engineering*, 53:160–175, 2013.

- A Santana, J J Aznárez, L A Padrón, O Maeso. A BEM–FEM model for the dynamic analysis of building structures founded on viscoelastic or poroelastic soils. *Bulletin of Earthquake Engineering*, 2015

#### Comunicaciones y ponencias en congresos:

- Autores: J J Aznárez, A Santana, L A Padrón, O Maeso  
Título: Modelo simple para el cálculo de la respuesta sísmica de una estructura enterrada  
Tipo de participación: Presentación oral  
Congreso: IX Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica  
Lugar: Las Palmas de Gran Canaria (España)  
Fecha: 17–20/11/2009
- Autores: L. A. Padrón, J. J. Aznárez, O Maeso, A. Santana  
Título: Analysis of the dynamic response of deep foundations with inclined piles by a BEM–FEM model  
Tipo de participación: Presentación oral  
Congreso: International conference On Boundary Element Techniques (BeTeq-2010). Advances in Boundary Element Techniques XI  
Lugar: Berlín (Alemania)  
Fecha: 12–14/07/2010
- Autores: A Santana, J J Aznárez, O Maeso, L A Padrón  
Título: A BEM–FEM model for dynamic soil–structure and structure–soil–structure problems in elastic or poroelastic soils  
Tipo de participación: Presentación oral  
Congreso: 11<sup>th</sup> World Congress on Computational Mechanics (WCCM XI)  
Lugar: Barcelona (España)  
Fecha: 20–25/07/2014
- Autores: L A Padrón, C Medina, G M Álamo, J J Aznárez, A Santana, O Maeso, F García, F Chirino  
Título: Pilotes inclinados: situación normativa y ventajas e inconvenientes de su uso en proyectos de edificación en zonas con riesgo sísmico  
Tipo de participación: Presentación oral  
Congreso: 19<sup>th</sup> International Congress on Project Management and Engineering  
Lugar: Granada (España)  
Fecha: 15–17/07/2015



# Capítulo 2

## Ecuaciones básicas y propagación de ondas en problemas elásticos y poroelásticos. Formulación mediante el MEC

### 2.1 Introducción

Este capítulo comienza presentando las ecuaciones básicas que gobiernan el comportamiento dinámico de los medios elásticos y poroelásticos, así como la propagación de ondas a través de los mismos, en las secciones 2.2 y 2.3 respectivamente. En el apartado 2.4 se exponen tanto la formulación integral como la solución fundamental para ambos tipos de medios, para después, relacionando las variables fundamentales del dominio con los valores que adoptan éstas y sus derivadas en el contorno, presentar la formulación integral en el contorno. Posteriormente se explica en el apartado 2.5 el procedimiento de discretización de las ecuaciones presentadas para la formulación integral en el contorno, usando para ello el método de elementos de contorno. En el apartado 2.6 se explica el acoplamiento entre regiones que por diferencia entre propiedades y/o naturaleza, necesitan del cumplimiento de condiciones de contorno, en términos de variables fundamentales y sus derivadas, en las interfases entre ambas. El último apartado 2.7 de este capítulo presenta las ecuaciones que definen el campo incidente en un semiespacio viscoelástico o poroelástico. En el caso viscoelástico se presentan las expresiones que definen el campo incidente para ondas sísmicas de tipo SH, P, SV y Rayleigh cuando llegan a la superficie con un ángulo de incidencia totalmente general. Para el caso poroelástico las expresiones que se muestran son las correspondientes a ondas transversales S y longitudinales P con incidencia vertical.

### 2.2 Ecuaciones de gobierno en elastodinámica y poroelastodinámica armónicas

La formulación presentada en este trabajo está encaminada a obtener, de manera numérica, la solución de problemas dinámicos planteados en medios elásticos y/o poroelásticos, homogéneos, isotrópicos y lineales. Al igual que en el caso estático, el primer paso es establecer las ecuaciones de equilibrio y la ley de comportamiento del material que gobiernan el comportamiento dinámico de los medios implicados en el problema. Sin embargo, en el caso dinámico, las variables

del problema serán funciones con dependencia no sólo espacial sino también temporal, siendo necesario incluir las fuerzas inerciales y de disipación en las ecuaciones.

### 2.2.1 Ecuaciones de gobierno en elastodinámica armónica

Siendo  $\mathbf{x}$  el vector que representa la posición de cualquier punto del sólido  $\Omega$  con respecto a un sistema de referencia cartesiano fijo y  $t$  la variable tiempo, el tensor de deformaciones  $\varepsilon_{ij}$  en cualquier punto del sólido  $\Omega$  puede ser obtenido a través del vector desplazamiento  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_1, u_2, u_3)$  de dicho punto como

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad ; \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

Por otro lado, las ecuaciones de equilibrio de cualquier punto se expresan como

$$\sigma_{ij,j} + X_i = \rho \ddot{u}_i \quad ; \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.2)$$

donde  $\sigma_{ij}$  representa el tensor de tensiones,  $X_i$  las componentes de las fuerzas de volumen y  $\rho$  la densidad del material.

Por último, la relación entre el tensor de tensiones y el tensor de deformaciones se establece a través de la ley de comportamiento. Esta relación, también conocida como ley constitutiva, viene dada, para materiales homogéneos, isotrópos, con comportamiento elástico y lineal, por la siguiente expresión:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad ; \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.3)$$

siendo  $\delta_{ij}$  la delta de Kronecker ( $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$ ;  $\delta_{ij} = 0$  si  $i \neq j$ ). La dilatación volumétrica  $\varepsilon_{kk}$  será llamada en adelante  $e$ . La constante de Lamé  $\lambda$  y el módulo de elasticidad transversal  $\mu$  se relacionan con el módulo de elasticidad  $E$  y el coeficiente de Poisson  $\nu$  mediante las expresiones:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad ; \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.4)$$

El comportamiento dinámico de un cuerpo elástico, homogéneo, isotrópico y lineal está gobernado por las expresiones (2.1), (2.2) y (2.3), las cuales, para el caso tridimensional, forman un sistema de 15 ecuaciones y 15 incógnitas. De esta manera, sustituyendo (2.1) en (2.3), y luego la expresión resultante en (2.2) se obtiene la ecuación:

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{X} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (2.5)$$

la cual es conocida como ecuación de Navier. Ésta constituye en el caso tridimensional un grupo de tres ecuaciones que gobierna el movimiento en términos del vector desplazamiento  $\mathbf{u}$ , y ha de satisfacerse para todos los puntos del dominio  $\Omega$ . La integración de (2.5) para la obtención del campo de desplazamientos requiere de la imposición de restricciones en el contorno  $\Gamma$  del dominio  $\Omega$  en términos de desplazamientos y/o tensiones conocidos, así como de condiciones iniciales para  $t = 0$  en cada punto del medio  $\forall \mathbf{x} \in \Omega$ .

Asumiendo que la excitación y las condiciones de contorno son de tipo armónico, el vector desplazamiento puede escribirse como  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}; \omega) e^{i\omega t}$ , siendo  $\omega$  la frecuencia angular e  $i$  la unidad imaginaria. La expresión (2.5) puede escribirse entonces como

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla e + \mathbf{X} = -\rho \omega^2 \mathbf{u} \quad (2.6)$$

teniendo en cuenta que  $e = \nabla \cdot \mathbf{u}$ .

Las variables del conjunto de ecuaciones (2.6) dependen de la posición y de la frecuencia. Ahora, la disipación del medio elástico puede ser tomada en cuenta considerando un valor complejo de  $\mu(\lambda)$  de la forma:

$$\mu = \text{Re}[\mu] (1 + 2\xi i) \quad (2.7)$$

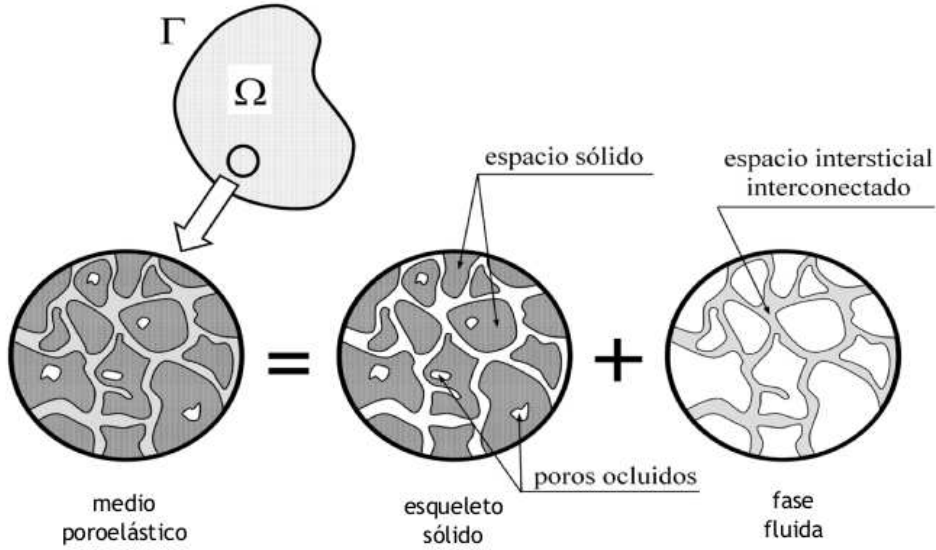
siendo  $\xi$  el factor de amortiguamiento de un sistema de un grado de libertad (ver [Dom93]).

### 2.2.2 Ecuaciones de gobierno en poroelastodinámica armónica

El medio poroelástico puede describirse como aquel en el que coexisten dos fases (ver figura 2.1), una sólida denominada esqueleto sólido y otra fluida, la cual se considerará en este estudio como líquida, pero que podría ser también gaseosa. El esqueleto sólido es la fase de material sólido provisto de huecos o poros de tal forma que es posible el tránsito de la fase fluida a través del medio. El índice de huecos se denomina *porosidad*, la cual contabiliza el espacio hueco del esqueleto interconectado ocupado por la fase fluida. Es más adecuado llamarla porosidad efectiva ya que los poros aislados se consideran parte de la matriz sólida y no son tenidos en cuenta para determinar este índice. La *porosidad efectiva* ( $\phi$ ) (en adelante se le llamará porosidad) es una de las principales características de este tipo de medios y representa la fracción del volumen total de material homogéneo ocupada por los intersticios o poros interconectados. Si la fase fluida llena completamente los intersticios del esqueleto diremos que el medio poroelástico está completamente saturado. Por el contrario, si la fase fluida llena parcialmente los poros de la matriz sólida nos encontramos con un medio cuasisaturado.

Fue Karl Terzaghi [Ter23, Ter25] el primero en proponer un modelo del medio similar al de la figura 2.1. Maurice Biot publica una serie de artículos [Bio41b, Bio41a, BC41] en las que desarrolla la teoría general del comportamiento de sólido poroelásticos bajo carga estática. El sólido poroelástico de Biot es un medio constituido por dos fases que se corresponde con la imagen de la figura 2.1. El medio en su conjunto es homogéneo e isótropo y tiene comportamiento elástico lineal en el rango de pequeñas deformaciones. El mismo Biot, algunos años después, generaliza la formulación cuasiestática anterior al caso dinámico para sólidos poroelásticos isótropos [Bio56a, Bio56b].

Aún considerando el medio poroelástico de naturaleza bifásica, es posible abordar su comportamiento a nivel macroscópico estableciendo unas propiedades medias del mismo de forma tal que sean de aplicación las hipótesis de isotropía y homogeneidad clásicas de la mecánica del medio continuo. Por tanto, en cada punto geométrico del medio con vector de posición  $\mathbf{x}$  respecto de un sistema de referencia fijo y para cada instante  $t$ , se definen dos vectores desplazamiento, uno asociado a la partícula sólida (esqueleto sólido)  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_1, u_2, u_3)$  y otro correspondiente a la partícula del fluido  $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = (U_1, U_2, U_3)$ . Ambos desplazamientos deben entenderse como variables promedio. Se define el tensor de deformaciones en la fase sólida de la forma habitual (2.1):



**Figura 2.1:** Carácter bifásico del medio poroso. Superposición de la matriz sólida y la red de poros.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad ; \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.8)$$

De igual manera, las dilataciones volumétricas en ambas fases responden a las expresiones:

$$e = u_{i,i} \quad ; \quad \text{Esqueleto sólido} \quad (2.9a)$$

$$\varepsilon = U_{i,i} \quad ; \quad \text{Fase fluida} \quad (2.9b)$$

En lo que a las variables dinámicas se refiere, se comienza introduciendo el tensor de tensiones sobre el material homogéneo  $\sigma_{ij}$  o tensor de tensiones totales. No existe ninguna diferencia conceptual respecto del tensor de tensiones para sólidos elásticos. Para caracterizar completamente el medio, junto al tensor de tensiones totales se introduce una variable dinámica asociada a la fase fluida, la *presión intersticial* o *presión de poro* ( $p$ ), ésta es la presión del fluido que ocupa los intersticios del esqueleto sólido. Sin embargo, se utilizarán como variables dinámicas otras dos relacionadas directamente con las anteriores.

Una es la *tensión equivalente en el fluido* ( $\tau$ ), la cual se define como la tensión sobre el fluido si se toma como referencia el área total de material homogéneo. Así  $\tau = -\phi p$ . El signo negativo está relacionado con el convenio de signos adoptado para esta variable: positiva para la tracción y negativa para la compresión (la presión intersticial positiva representa la compresión).

La otra variable es el *tensor de tensiones sobre el esqueleto sólido* ( $\tau_{ij}$ ), la cual se define como la tensión aplicada en la fase sólida del medio tomando como referencia el área total de material homogéneo.

El tensor de tensiones sobre el material homogéneo  $\sigma_{ij}$  puede escribirse en términos de estas dos nuevas variables como

$$\sigma_{ij} = \tau_{ij} + \tau \delta_{ij} \quad ; \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.10)$$

Entendido el medio poroelástico como un material homogéneo, en términos del tensor de tensiones total las ecuaciones de equilibrio tienen una expresión análoga a la correspondiente a sólido elásticos teniendo en cuenta las fuerzas de inercia de ambas fases

$$\sigma_{ij,j} + \bar{X}_i = \rho_1 \ddot{u}_i + \rho_2 \ddot{U}_i \quad ; \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.11)$$

donde  $\rho_1 = (1 - \phi)\rho_s$  y  $\rho_2 = \phi\rho_f$ , siendo  $\phi$  la porosidad,  $\rho_s$  la densidad del material que conforma la matriz sólida y  $\rho_f$  la densidad del fluido. Así,  $\rho_1$  y  $\rho_2$  son las densidades de la fase sólida y líquida respectivamente referidas al volumen total del material homogéneo.  $\bar{X}_i$  es la fuerza por unidad de volumen sobre el medio homogéneo, que constituye un promedio de las fuerzas por unidad del volumen sobre el material que constituye cada fase a través de la porosidad que se escribe  $\bar{X}_i = (1 - \phi)F_i + \phi f_i$ , siendo  $F_i$  las fuerzas por unidad de volumen sobre el material sólido y  $f_i$  sobre la fase fluida.

Siguiendo la teoría de Biot, las ecuaciones de equilibrio en términos de las tensiones para ambas fases, esqueleto sólido y fase fluida, que gobiernan el comportamiento de medios poroelásticos en régimen dinámico son respectivamente:

$$\tau_{ij,j} + X_i = \rho_{11} \ddot{u}_i + \rho_{12} \ddot{U}_i + b(\dot{u}_i + \dot{U}_i) \quad (2.12a)$$

$$\tau_{,i} + X'_i = \rho_{12} \ddot{u}_i + \rho_{22} \ddot{U}_i - b(\dot{u}_i + \dot{U}_i) \quad (2.12b)$$

para  $i, j = 1, 2, 3$  y donde  $\rho_{11} = \rho_1 - \rho_{12}$ ,  $\rho_{22} = \rho_2 - \rho_{12}$  y  $\rho_{12} = -\rho_a$ , siendo  $X_i$  y  $X'_i$  las fuerzas de volumen de la fase sólida y fluida respectivamente, y  $\rho_a$  la densidad añadida. La constante de disipación  $b$  se expresa como:

$$b = \rho_f g \frac{\phi^2}{k} \quad (2.13)$$

donde  $k(\text{m/s}^2)$  es la conductividad hidráulica de Darcy y  $g(\text{m/s}^2)$  la aceleración de la gravedad [BT91b]. Esta constante  $b$  representa las fuerzas de viscosidad por unidad de volumen y por unidad de velocidad relativa del fluido respecto de la matriz sólida. El término del que forma parte constituye la componente disipativa que distingue al modelo poroelástico. Esta disipación está vinculada a la velocidad relativa entre ambas fases y se anula cuando no existe movimiento relativo entre ellas.

En términos de la tensión equivalente en el sólido y fluido y las deformaciones en ambas fases [Bio56a], la expresión de la ley de comportamiento que se utiliza a lo largo de este trabajo se escribe como:

$$\tau_{ij} = \left( \lambda + \frac{Q^2}{R} \right) e \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} + Q\varepsilon \delta_{ij} \quad (2.14a)$$

$$\tau = Qe + R\varepsilon \quad (2.14b)$$

donde  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $Q$  y  $R$  representan las constantes elásticas del medio o constantes de Biot. Por un lado  $\lambda$  y  $\mu$  son la constante de Lamé y el módulo de elasticidad transversal correspondientes al esqueleto sólido drenado. Las constantes  $Q$  y  $R$  están relacionadas con el comportamiento acoplado de ambas fases.

Sustituyendo las ecuaciones (2.14) en (2.12), pueden escribirse las ecuaciones de equilibrio en términos de las tres componentes del desplazamiento de cada fase ( $u_i, U_i$ ) como sigue:

$$\mu \nabla^2 u_i + \left( \lambda + \mu + \frac{Q^2}{R} \right) e_{,i} + Q \varepsilon_{,i} + X_i = \rho_{11} \ddot{u}_i + \rho_{12} \ddot{U}_i + b(\dot{u}_i - \dot{U}_i) \quad (2.15a)$$

$$(Qe + R\varepsilon)_{,i} + X'_i = \rho_{12} \ddot{u}_i + \rho_{22} \ddot{U}_i - b(\dot{u}_i - \dot{U}_i) \quad (2.15b)$$

Por tanto, las ecuaciones de Navier para un cuerpo poroelástico, que representan las ecuaciones de gobierno en términos de desplazamientos ( $\mathbf{u}, \mathbf{U}$ ), son expresadas como:

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla \left[ \left( \lambda + \mu + \frac{Q^2}{R} \right) \nabla \cdot \mathbf{u} + Q \nabla \cdot \mathbf{U} \right] + \mathbf{X} = \rho_{11} \ddot{\mathbf{u}} + \rho_{12} \ddot{\mathbf{U}} + b(\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{U}}) \quad (2.16a)$$

$$\nabla (Q \nabla \cdot \mathbf{u} + R \nabla \cdot \mathbf{U}) + \mathbf{X}' = \rho_{12} \ddot{\mathbf{u}} + \rho_{22} \ddot{\mathbf{U}} - b(\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{U}}) \quad (2.16b)$$

siendo  $\mathbf{X}$  y  $\mathbf{X}'$  los vectores de las fuerzas de volumen de la fase sólida y fluida respectivamente. Este sistema de ecuaciones diferenciales (2.16) ha de satisfacerse en todo punto del dominio poroelástico y para cada instante. La solución de estas ecuaciones requiere el establecimiento de condiciones de contorno e iniciales en términos de desplazamientos y tensiones en los puntos del dominio. Conocidos los desplazamientos de ambas fases pueden obtenerse las variables cinemáticas deseadas y con ellas, las tensiones en ambas fases a través de la ley de comportamiento.

Suponiendo un comportamiento armónico del campo de desplazamientos de ambas fases,  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}; \omega) e^{i\omega t}$  y  $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{x}; \omega) e^{i\omega t}$ , las ecuaciones de Navier para la poroelasticidad dinámica serán:

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla \left[ \left( \lambda + \mu + \frac{Q^2}{R} \right) e + Q \varepsilon \right] + \mathbf{X} = -\omega^2 (\hat{\rho}_{11} \mathbf{u} + \hat{\rho}_{12} \mathbf{U}) \quad (2.17a)$$

$$\nabla (Qe + R\varepsilon) + \mathbf{X}' = -\omega^2 (\hat{\rho}_{12} \mathbf{u} + \hat{\rho}_{22} \mathbf{U}) \quad (2.17b)$$

Con el fin de simplificar la formulación, se utilizan en las ecuaciones (2.17) parámetros complejos de densidad que incorporan la constante de disipación a los términos de densidad conocidos. Estos parámetros de densidad son expresados de la forma siguiente [Nor85]:

$$\hat{\rho}_{11} = \rho_{11} - i \frac{b}{\omega} \quad ; \quad \hat{\rho}_{22} = \rho_{22} - i \frac{b}{\omega} \quad ; \quad \hat{\rho}_{12} = \rho_{12} + i \frac{b}{\omega} \quad (2.18)$$

Mientras que la formulación de ecuaciones de gobierno (2.16) escritas en el dominio del tiempo implica seis variables primarias, tres componentes del desplazamiento para la fase sólida y fluida respectivamente, la formulación del problema armónico (2.17) puede hacerse en función de cuatro variables fundamentales. Esto es, tres componentes del desplazamiento del esqueleto sólido y la tensión equivalente en el fluido. Así, de las ecuaciones (2.17b) y (2.14b), el vector desplazamiento de la fase fluida puede escribirse en términos de la tensión equivalente en la misma y del desplazamiento de las partículas del sólido como sigue:

$$\mathbf{U} = - \frac{\nabla \tau + \mathbf{X}' + \omega^2 \hat{\rho}_{12} \mathbf{u}}{\omega^2 \hat{\rho}_{22}} \quad (2.19)$$



Sustituyendo ahora esta última expresión del desplazamiento de las partículas de fluido en (2.17a), se obtienen tres ecuaciones de equilibrio en términos de  $\mathbf{u}$  y  $\tau$ . La cuarta ecuación necesaria se obtiene aplicando el operador divergencia sobre la expresión (2.17b) y considerando la ley de comportamiento (2.14b) para hacer desaparecer  $\varepsilon$ . Este procedimiento descrito da como resultado las siguientes ecuaciones:

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla e + \left( \frac{Q}{R} - \frac{\hat{\rho}_{12}}{\hat{\rho}_{22}} \right) \nabla \tau + \omega^2 \left( \frac{\hat{\rho}_{12} \hat{\rho}_{22} - \hat{\rho}_{12}^2}{\hat{\rho}_{22}} \right) \mathbf{u} + \mathbf{X} - \frac{\hat{\rho}_{12}}{\hat{\rho}_{22}} \mathbf{X}' = 0 \quad (2.20a)$$

$$\nabla^2 \tau + \omega^2 \frac{\hat{\rho}_{22}}{R} \tau + \omega^2 \left( \hat{\rho}_{12} - \frac{Q}{R} \hat{\rho}_{22} \right) e + \nabla \cdot \mathbf{X}' = 0 \quad (2.20b)$$

Estas cuatro ecuaciones y las condiciones de contorno completan la formulación dinámica del medio poroelástico en el dominio de la frecuencia. El carácter disipativo del esqueleto sólido drenado es considerado a través de las expresiones de las constantes de Lamé del tipo (2.7).

## 2.3 Propagación de ondas en medios elásticos y poroelásticos

### 2.3.1 Propagación de ondas en medios elásticos

La integración de la ecuación (2.5) para el caso general no es una tarea trivial, teniendo en cuenta que las variables fundamentales (las tres componentes del desplazamiento) se encuentran acopladas. Para expresar dichas ecuaciones de Navier, de manera que su solución pueda ser obtenida de manera más sencilla para algunos problemas en particular, existen varios procedimientos. Entre ellos, los procedimientos que permiten desacoplar este sistema de ecuaciones parten de los trabajos de Poisson, si bien es Stokes [Sto49] el primero que presenta una formulación en términos de dilatación volumétrica  $e$  y el vector rotación  $\mathbf{w}$ .

$$e = \varepsilon_{kk} = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (2.21a)$$

$$\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{u} \quad (2.21b)$$

Asumiendo nulas las fuerzas de volumen y aplicando el operador divergencia y rotacional sobre la ecuación (2.5), se pueden escribir, respectivamente, las siguientes ecuaciones de onda:

$$\nabla^2 e = \frac{\ddot{e}}{c_P^2} \quad (2.22a)$$

$$\nabla^2 \mathbf{w} = \frac{\ddot{\mathbf{w}}}{c_S^2} \quad (2.22b)$$

donde

$$c_P^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \quad y \quad c_S^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad (2.23)$$

Las ecuaciones (2.22a) y (2.22b) representan respectivamente la versión desacoplada de las ecuaciones de Navier en términos de la dilatación y las tres componentes del vector rotación.

Se trata de ecuaciones de onda, la primera escalar y la segunda vectorial. Así, la componente dilatacional o irrotacional (asociada a cambios de volumen) se propaga con velocidad  $c_P$ , mientras que la componente rotacional o equivoluminal (asociada a cambios de forma) viaja con velocidad  $c_S$ . En un medio homogéneo e isótropo infinito ambas componentes coexisten y se propagan de manera independiente siendo  $c_P > c_S$ , razón por la cual en sismología se denomina a las ondas irrotacionales *ondas primarias* (ondas P) y a las equivoluminales *ondas secundarias* (ondas S), ya que las primeras alcanzan la estación en menor tiempo desde el epicentro del seísmo.

Utilizando  $c_P$  y  $c_S$  como constantes características del medio, podemos escribir las ecuaciones de Navier como sigue:

$$-c_S^2 \nabla \times \mathbf{w} + c_P^2 \nabla e = \ddot{\mathbf{u}} \quad (2.24)$$

Para un problema de propagación plana con velocidad de onda  $c$  y dirección de propagación determinada por el vector unitario  $\mathbf{s}$ , el campo de desplazamientos, en notación compleja y con amplitud unitaria, puede expresarse como sigue:

$$\mathbf{u} = e^{i(\omega t - k\mathbf{s} \cdot \mathbf{x})} \mathbf{d} \quad (2.25)$$

siendo  $\mathbf{x}$  el vector de posición,  $\omega$  la frecuencia angular,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $k = \omega/c$  el número de onda y  $\mathbf{d}$  el vector unitario en la dirección del movimiento. Sustituyendo ahora (2.25), cada uno de los términos de (2.24) será:

$$\nabla \times \mathbf{w} = -k^2 \mathbf{s} \times (\mathbf{s} \times \mathbf{d}) e^{i(\omega t - k\mathbf{s} \cdot \mathbf{x})} \quad (2.26a)$$

$$\nabla e = -k^2 (\mathbf{s} \cdot \mathbf{d}) \mathbf{s} e^{i(\omega t - k\mathbf{s} \cdot \mathbf{x})} \quad (2.26b)$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = -\omega^2 e^{i(\omega t - k\mathbf{s} \cdot \mathbf{x})} \mathbf{d} \quad (2.26c)$$

Por tanto, teniendo en cuenta que  $\mathbf{s} \times (\mathbf{s} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{s} \cdot \mathbf{d}) \mathbf{s} - \mathbf{d}$ , la ecuación (2.24) puede expresarse como sigue:

$$(c_S^2 - c^2) \mathbf{d} + (c_P^2 - c_S^2) (\mathbf{s} \cdot \mathbf{d}) \mathbf{s} = 0 \quad (2.27)$$

y en consecuencia

$$\text{si } \begin{cases} c = c_S \Rightarrow \mathbf{s} \cdot \mathbf{d} = 0 \\ c = c_P \Rightarrow \mathbf{s} \times \mathbf{d} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{movimiento perpendicular a la dirección de propagación} \\ \text{movimiento paralelo a la dirección de propagación} \end{cases}$$

como se ilustra en la figura 2.2.

En este apartado sólo se han tratado los conceptos esenciales de la propagación de ondas para facilitar una mejor comprensión de las próximas secciones y capítulos. Una explicación más profunda de la propagación de ondas en elastodinámica puede encontrarse en [Ach73] y [ES75].

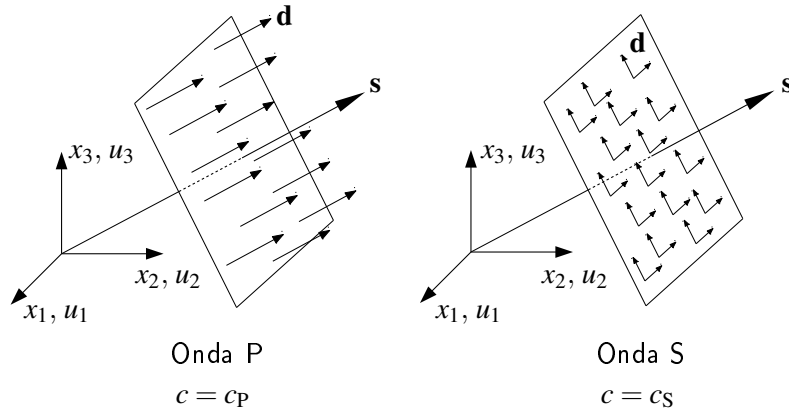


Figura 2.2: Desplazamientos y dirección de propagación. Ondas planas P y S.

### 2.3.2 Propagación de ondas en medios poroelásticos

De manera análoga al caso elástico, también para un medio poroelástico, se pueden desacoplar y plantear las ecuaciones de Navier en términos de la dilatación ( $e, \varepsilon$ ) y el vector rotación ( $\mathbf{w}, \Omega$ ) de ambas fases [Bio56a]:

$$e = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad \varepsilon = \nabla \cdot \mathbf{U} \quad (2.28a)$$

$$\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{u} \quad \Omega = \nabla \times \mathbf{U} \quad (2.28b)$$

Considerando estos operadores y aplicando el operador divergencia a las ecuaciones (2.16), suponiendo además nulas las fuerzas de volumen, se obtiene:

$$\nabla^2 \left[ \left( \lambda + 2\mu + \frac{Q^2}{R} \right) e + Q\varepsilon \right] = \rho_{11} \ddot{e} + \rho_{12} \ddot{\varepsilon} + b(\dot{e} - \dot{\varepsilon}) \quad (2.29a)$$

$$\nabla^2 (Qe + R\varepsilon) = \rho_{12} \ddot{e} + \rho_{22} \ddot{\varepsilon} - b(\dot{e} - \dot{\varepsilon}) \quad (2.29b)$$

De igual manera, la aplicación del operador rotacional sobre las ecuaciones de Navier (2.16), permite escribirlas como:

$$\mu \nabla^2 \mathbf{w} = \rho_{11} \ddot{\mathbf{w}} + \rho_{12} \ddot{\Omega} + b(\dot{\mathbf{w}} - \dot{\Omega}) \quad (2.30a)$$

$$0 = \rho_{12} \ddot{\mathbf{w}} + \rho_{22} \ddot{\Omega} - b(\dot{\mathbf{w}} - \dot{\Omega}) \quad (2.30b)$$

Éstas últimas son las ecuaciones que gobiernan la componente equivoluminal del movimiento (ondas transversales). Comenzando el estudio con esta componente, se considera una onda armónica que se propaga con igual velocidad en ambas fases del medio y en sentido positivo del eje  $x_3$ . De esta manera, los vectores rotación pueden escribirse como sigue:

$$\mathbf{w} = \mathbf{D}_w \mathbf{e}^{i(\omega t - k_S x_3)} \quad (2.31a)$$

$$\Omega = \mathbf{D}_\Omega \mathbf{e}^{i(\omega t - k_S x_3)} \quad (2.31b)$$

siendo  $\omega$  la frecuencia angular,  $k_S$  el número de onda y  $\mathbf{D}_w$ ,  $\mathbf{D}_\Omega$  las amplitudes de la rotación del sólido y fluido respectivamente. Sustituyendo (2.31) en (2.30b) y operando de manera sencilla, se obtiene la relación entre la rotación del sólido y la del fluido como:

$$\Omega = \Lambda w \quad (2.32)$$

donde

$$\Lambda = \frac{i\omega b + \omega^2 \rho_{12}}{i\omega b - \omega^2 \rho_{22}} \quad (2.33)$$

La expresión (2.33) depende de las propiedades inerciales del medio, de la constante de disipación y de la frecuencia. El carácter complejo de  $\Lambda$  indica que ambos vectores rotación están desfasados. Teniendo en cuenta las relaciones (2.18), se puede escribir (2.33) como

$$\Lambda = -\frac{\hat{\rho}_{12}}{\hat{\rho}_{22}} \quad (2.34)$$

Sustituyendo (2.31) y (2.32) en (2.30a), la expresión del número de onda correspondiente puede escribirse como:

$$k_S^2 = \frac{\rho \omega^2}{\mu} \quad (2.35)$$

donde se introduce una variable  $\rho$  cuya expresión es:

$$\rho = \frac{\omega^2 (\rho_{12}^2 - \rho_{11} \rho_{22}) + i\omega b (\rho_{11} + 2\rho_{12} + \rho_{22})}{i\omega b - \omega^2 \rho_{22}} \quad (2.36)$$

Por tanto, en estos medios existe un sólo tipo de ondas rotacionales que se propagan a través de ambas fases. Al igual que en elastodinámica, son ondas transversales o de corte y su velocidad de propagación se obtiene de:

$$c_S^2 = \frac{\omega^2}{k_S^2} \quad (2.37)$$

Esta velocidad no es constante y depende de la frecuencia en el caso de sólidos poroelásticos con disipación ( $b \neq 0$ ). Tanto  $k_S$  como  $c_S$  son números complejos en el caso más general. Así, el número de onda tendrá una expresión del tipo:

$$k_S = k_S^r + i k_S^i \quad (2.38)$$

La solución de la expresión (2.35) sólo tiene significado físico para  $k_S$  cuando la parte real e imaginaria de (2.38) toman valores positivos ( $k_S^r \geq 0$  y  $k_S^i \geq 0$ ). Teniendo en cuenta (2.38), el vector rotación del sólido (2.31a) puede escribirse como:

$$\mathbf{w} = \mathbf{D}_w \mathbf{e}^{-k_S^i x_3} \mathbf{e}^{i(\omega t - k_S^r x_3)} \quad (2.39)$$

En esta expresión, el primer término exponencial ( $k_S^i \geq 0$ ) amortigua la amplitud de la onda en sentido creciente con la coordenada  $x_3$ . El segundo término representa un armónico espacio-temporal que indica que la onda se propaga en dirección positiva del eje  $x_3$  ( $k_S^r \geq 0$ ).

Si se considera que la fase fluida que ocupa los intersticios tiene viscosidad nula ( $b = 0$ ), las expresiones (2.32) y (2.37) pueden escribirse como:

$$\Omega = -\frac{\rho_{12}}{\rho_{22}} \mathbf{w} \quad (2.40)$$

$$c_S^2 = \frac{\mu}{\rho_{11} \left(1 - \frac{\rho_{12}^2}{\rho_{11} \rho_{22}}\right)} \quad (2.41)$$

En este supuesto, teniendo en cuenta que  $\rho_{12} \leq 0$ , el fluido y el sólido rotan en fase y la perturbación se propaga con velocidad constante sin amortiguamiento ( $c_S \in \Re$ ). Cuando la densidad añadida es nula ( $\rho_{12} = 0$ ) el movimiento del fluido es irrotacional a nivel macroscópico y la velocidad de propagación de las ondas de corte será:

$$c_S^2 = \frac{\mu}{\rho_{11}} = \frac{\mu}{(1 - \phi) \rho_s} \quad (2.42)$$

lo que significa que, a efectos de la onda de corte, el sólido poroelástico se comporta como un medio viscoelástico cuyas propiedades son las correspondientes al esqueleto sólido drenado, es decir, la onda de corte se propaga exclusivamente a través de la matriz sólida.

Por el contrario, si el medio es altamente disipativo ( $b \rightarrow \infty$ ), las expresiones (2.32) y (2.37) se pueden escribir respectivamente como:

$$\Omega = \mathbf{w} \quad (2.43)$$

$$c_S^2 = \frac{\mu}{\rho_{11} + 2\rho_{12} + \rho_{22}} = \frac{\mu}{(1 - \phi) \rho_s + \phi \rho_f} = \frac{\mu}{\rho_h} \quad (2.44)$$

La rotación es igual en ambas fases, siendo la densidad efectiva que determina la velocidad de propagación, la densidad promedio del material poroelástico homogéneo ( $\rho_h$ ).

La componente irrotacional se estudia considerando la existencia de una onda plana armónica de frecuencia angular  $\omega$  que se propaga en sentido positivo del eje  $x_3$  a través del sólido y fluido, con igual velocidad de propagación en ambas fases. El desplazamiento en esa dirección de las partículas del esqueleto sólido ( $u_3$ ) y de las correspondientes al fluido intersticial ( $U_3$ ) pueden expresarse como:

$$u_3 = \mathbf{D}_u e^{i(\omega t - k_p x_3)} \quad (2.45a)$$

$$U_3 = \mathbf{D}_U e^{i(\omega t - k_p x_3)} \quad (2.45b)$$

siendo  $k_p$  el número de onda y ( $\mathbf{D}_u, \mathbf{D}_U$ ) las amplitudes del desplazamiento del sólido y fluido respectivamente. Sustituyendo (2.45) en las ecuaciones (2.29), se obtiene un sistema de ecuaciones con solución distinta de la trivial para valores específicos de  $k_p$  (i.e., autovalores del problema). La ecuación característica de este sistema se expresa como sigue:

$$A(k_p^2)^2 - Bk_p^2 + C = 0 \quad (2.46)$$

siendo A, B y C constantes complejas en el caso general como puede verse:

$$A = \lambda + 2\mu \quad (2.47a)$$

$$B = \rho \omega^2 + \frac{(\omega^2 \rho_{22} - i \omega b)}{R} (\lambda + 2\mu) - \left[ \frac{Q}{R} (\omega^2 \rho_{22} - i \omega b) - (\omega^2 \rho_{12} + i \omega b) \right] \left( \frac{Q}{R} - \frac{\omega^2 \rho_{12} + i \omega b}{\omega^2 \rho_{22} - i \omega b} \right) \quad (2.47b)$$

$$C = \rho \omega^2 \frac{(\omega^2 \rho_{22} - i \omega b)}{R} \quad (2.47c)$$

Existen, por tanto, dos raíces complejas de la forma:

$$k_{P1}^2 = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} ; \quad k_{P2}^2 = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (2.48)$$

Estas dos raíces representan los números de onda (al cuadrado) de dos ondas irrotacionales o longitudinales compatibles con el problema planteado. Las velocidades de propagación serán:

$$c_{P1}^2 = \frac{\omega^2}{k_{P1}^2} ; \quad c_{P2}^2 = \frac{\omega^2}{k_{P2}^2} \quad (2.49)$$

A la onda de mayor velocidad de propagación ( $c_{P1}$ ), que corresponde a la menor de las raíces en módulo, se la denomina *onda de primer tipo* (onda P rápida u onda P larga). La más lenta ( $c_{P2}$ ) se denomina *onda de segundo tipo* (onda P corta). Ambas velocidades de propagación son números complejos que dependen de la frecuencia en el caso general. Este carácter complejo, como en el caso anterior, implica que ambas ondas se amortiguan en sentido creciente del eje  $x_3$ . Notar que este amortiguamiento es mucho mayor en la onda P2, la cual se atenúa rápidamente y sólo puede detectarse en las proximidades de la perturbación. Si la disipación viscosa es nula ( $b = 0$ ), ambos valores de la velocidad son constantes reales positivas. En este caso, ambas componentes se propagan sin amortiguarse.

Para cada una de las raíces (autovalores) de la ecuación característica (2.46) pueden obtenerse los valores de  $\mathbf{D}_u$  y  $\mathbf{D}_U$  (autovectores). El cálculo de autovectores (amplitudes de las ondas en la fase sólida y en la fase fluida) correspondientes a cada uno de los autovalores anteriores conduce en el caso de la onda P1 a la obtención de  $\mathbf{D}_u^{P1}$  y  $\mathbf{D}_U^{P1}$ , de igual signo, lo que significa que la fase sólida y el fluido vibran en fase para las ondas de primer tipo. Por el contrario, para las ondas de tipo P2, las amplitudes de ambas fases  $\mathbf{D}_u^{P2}$  y  $\mathbf{D}_U^{P2}$  tienen signos contrarios (las partículas de sólido y fluido vibran en contra-fase). Para más detalles sobre la propagación de ondas en medios poroelásticos ver p.e. [Bio56a, Bio56b, Azn02].

## 2.4 Formulación integral y solución fundamental armónica

En los apartados anteriores se ha descrito el comportamiento de cuerpos elásticos o poroelásticos, homogéneos, isótropos y lineales por medio de las ecuaciones de gobierno. La transformación de estas ecuaciones diferenciales en expresiones integrales conduce a la formulación integral

del problema. Estas expresiones integrales se extienden al contorno del dominio en estudio y permiten relacionar las variables fundamentales en puntos internos del dominio  $\Omega$  con estas mismas y sus derivadas en el contorno  $\Gamma$ . Para resolver estas expresiones integrales es necesario la definición de un estado virtual de referencia, llamado *solución fundamental*, que satisfaga las ecuaciones de Navier.

Se presenta primero la formulación integral para la poroelastodinámica armónica y luego para la elastodinámica armónica como un caso particular de la anterior. A continuación se presentan las expresiones de la solución fundamental en el caso armónico para la elastodinámica y la poroelastodinámica. El procedimiento de obtención de la formulación integral y también de la solución fundamental correspondiente se expone de manera somera ya que se sale de los objetivos de este trabajo, pudiendo consultarse de manera más profunda en [Dom92] y/o [Azn02].

### 2.4.1 Formulación integral en poroelastodinámica armónica

El punto de partida para la formulación integral apareció de forma casi simultánea con los trabajos de Cheng et al. [CBB91] y Domínguez [Dom91, Dom92] para problemas armónicos bidimensionales. La diferencia más obvia entre ambos es el tipo de variables derivadas que utilizan y el procedimiento de obtención de la formulación integral. Por un lado, en la formulación propuesta por Cheng et al. la ecuación integral se deriva del teorema de reciprocidad análogo al primer teorema de Betti para elasticidad. Por otra parte, Domínguez parte de una expresión que anula la integral del residuo ponderado de las ecuaciones de equilibrio en ambas fases. Ambos planteamientos se convierten en formulaciones en el contorno mediante técnicas de integración por partes y la aplicación del teorema de la divergencia.

La formulación integral que aquí se presenta es posible obtenerla desde ambos planteamientos. En el caso de un medio poroelástico, la formulación integral viene dada por el siguiente conjunto de cuatro ecuaciones:

$$u_j^k + \int_{\Gamma} t_{ji}^* u_i d\Gamma + \int_{\Gamma} U_{nj}^* \tau d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ji}^* t_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \tau_j^* U_n d\Gamma \quad (2.50a)$$

$$-J \tau^k + \int_{\Gamma} t_{oi}^* u_i d\Gamma - \int_{\Gamma} (U_{no}^* - J X_i'^* n_i) \tau d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{oi}^* t_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \tau_o^* U_n d\Gamma \quad (2.50b)$$

siendo

$$J = \frac{1}{i\omega b - \omega^2 \rho_{22}} \quad (2.51)$$

La expresión (2.50a) es un grupo de tres ecuaciones el cual relaciona el desplazamiento  $u_j^k$  en la dirección  $j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) de un punto interno  $k$  del dominio  $\Omega$  con los desplazamientos  $u_i, U_n$ , las tensiones  $t_i$  y la tensión equivalente en el fluido  $\tau$  de los puntos del contorno  $\Gamma$ .  $U_n$  es el desplazamiento normal al contorno del fluido.  $u_{ji}^*$  y  $t_{ji}^*$  representan respectivamente los desplazamientos y las tensiones de la matriz sólida en la dirección  $i$  debidos a la carga puntual aplicada según la dirección  $j$  actuando sobre dicha matriz sólida. Para la misma carga,  $\tau_j^*$  y  $U_{nj}^*$  son respectivamente la tensión equivalente y el desplazamiento normal al contorno de la fase fluida. Estos términos corresponden a la solución fundamental.

La expresión (2.50b) es la representación integral de la tensión equivalente en el fluido  $\tau^k$  en un punto interno  $k$  del dominio  $\Omega$ . Esta ecuación relaciona dicha variable con los desplazamientos

$u_i$ ,  $U_n$ , las tensiones  $t_i$  y la tensión equivalente en el fluido  $\tau$  de los puntos del contorno  $\Gamma$ .  $u_{oi}^*$  y  $t_{oi}^*$  son respectivamente la componente  $i$  de los desplazamientos y tensiones en el esqueleto sólido provocados por la fuente puntual en el fluido (el subíndice 'o' se corresponde con  $j=4$  e indica que la carga está aplicada en la fase fluida).  $\tau_o^*$  y  $U_{no}^*$  son la respuesta en tensión equivalente y el desplazamiento normal del propio fluido para la misma sollicitación. Estos cuatro términos corresponden a la solución fundamental en el caso en que la carga esté aplicada en la fase fluida del medio.

### 2.4.2 Formulación integral en elastodinámica armónica

En este caso, el teorema de reciprocidad fue establecido por Graffi [Gra46] en el dominio del tiempo y generalizado por Wheeler y Sternberg [WS68] a dominios no acotados. En el dominio de la frecuencia, la representación integral del campo de desplazamientos puede realizarse a partir de la expresión (2.50a) considerando un medio poroso completamente drenado ( $\tau$  y  $\tau^*$  nulas). Suponiendo nulas las fuerzas de volumen, la representación integral del campo de desplazamientos en puntos  $k$  internos de un dominio  $\Omega$  acotado con contorno  $\Gamma$  viene dado por:

$$u_j^k + \int_{\Gamma} t_{ji}^* u_i d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ji}^* t_i d\Gamma \quad (2.52)$$

donde  $u_j^k$  es el desplazamiento en la dirección  $j$  ( $j=1, 2, 3$ ) del punto  $k$ .  $u_i$ ,  $t_i$  son respectivamente las incógnitas en desplazamientos y tensiones en dirección  $i$  del problema que se pretende resolver.  $u_{ji}^*$ ,  $t_{ji}^*$  son respectivamente los desplazamientos y las tensiones en dirección  $i$  de la solución fundamental que verifica la ecuación de Navier:

$$\mu \nabla^2 u_{ij}^* + (\lambda + \mu) \nabla e_{ji}^* - \rho \omega^2 u_{ji}^* + \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \delta_{ji} = 0 \quad (2.53)$$

### 2.4.3 Solución fundamental armónica en elasticidad

La respuesta en desplazamientos y tensiones de un medio infinito, isótropo, homogéneo, elástico y lineal ante una carga aplicada en un punto del mismo es un problema clásico resuelto por Stockes [Sto49] en el dominio del tiempo, por Cruse y Rizzo [CR68] en el dominio transformado de Laplace y algunos años antes por Kupradze [Kup63] para problemas armónicos.

Para un punto  $\mathbf{x}$  a una distancia  $r$  del punto de aplicación  $\mathbf{l}$ , el desplazamiento en dirección  $k$  para una carga aplicada en dirección  $l$  viene dado por:

$$u_{lk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \omega) = \frac{1}{4\pi\mu} [\psi \delta_{lk} - \chi r_{,l} r_{,k}] \quad (2.54)$$

donde

$$\psi = \sum_{m=1}^2 \left[ 1 - \left( \frac{z_1}{z_2} \right)^2 \delta_{m1} \right] \left( \frac{1}{z_m^2 r^2} - \frac{1}{z_m r} + \delta_{m2} \right) E_m \quad (2.55a)$$

$$\chi = \sum_{m=1}^2 \left[ 1 - \left( \frac{z_1}{z_2} \right)^2 \delta_{m1} \right] \left( \frac{3}{z_m^2 r^2} - \frac{3}{z_m r} + 1 \right) E_m \quad (2.55b)$$



siendo  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{l}|$ ,  $E_m = \frac{1}{r} e^{-ik_m r}$ ,  $z_1 = -ik_p$  y  $z_2 = -ik_s$ .

A partir de estas expresiones y haciendo uso de la ley de comportamiento del material, las tensiones para una superficie de normal  $\mathbf{n}$  serán:

$$t_{lk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \omega) = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} (A \delta_{lk} + B r_{,l} r_{,k}) + (A r_{,k} n_l + C r_{,l} n_k) \right] \quad (2.56)$$

donde

$$A = \frac{d\psi}{dr} - \frac{\chi}{r} \quad (2.57a)$$

$$B = 2 \left( 2 \frac{\chi}{r} - \frac{d\chi}{dr} \right) \quad (2.57b)$$

$$C = \frac{\lambda}{\mu} \left( \frac{d\psi}{dr} - \frac{d\chi}{dr} - 2 \frac{\chi}{r} \right) - 2 \frac{\chi}{r} \quad (2.57c)$$

Hay que resaltar que esta solución fundamental presenta una singularidad cuando  $\omega r \rightarrow 0$ , lo que hace necesario un tratamiento especial de las integrales de dichas funciones alrededor del punto de aplicación de la carga (ver, p.e., [Dom93, Azn02]).

#### 2.4.4 Solución fundamental armónica en poroelasticidad

En este caso, la fuerza puntual puede estar aplicada tanto en la matriz sólida como en la fase fluida. Por tanto, la solución fundamental es obtenida tanto en términos de las variables en la fase sólida y fluida.

De esta manera, si la fuerza está aplicada sobre el esqueleto sólido en la dirección  $l$ , la respuesta en desplazamientos de la misma en dirección  $k$  es:

$$u_{lk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \omega) = \frac{1}{4\pi\mu} [\tilde{\psi} \delta_{lk} - \tilde{\chi} r_{,l} r_{,k}] \quad (2.58)$$

Para la misma fuerza aplicada en la matriz sólida en dirección  $l$ , la respuesta en tensiones equivalentes de la fase fluida es:

$$\tau_l^*(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \omega) = \frac{i\omega\eta}{4\pi} \tilde{\phi} r_{,l} \quad (2.59)$$

Por otro lado, si se considera la carga aplicada en la fase fluida, la respuesta en desplazamientos de la matriz sólida en dirección  $k$  es:

$$u_{ok}^*(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \omega) = \frac{\gamma}{4\pi} \tilde{\phi} r_{,k} \quad (2.60)$$

y la tensión equivalente en el fluido será:

$$\tau_o^*(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \omega) = \frac{1}{4\pi} \tilde{\kappa} \quad (2.61)$$

donde

$$\begin{aligned}
 \tilde{\psi} &= \sum_{m=1}^3 \left[ (-1)^m \frac{\mu}{(\lambda + 2\mu) z_{21}} \left( \frac{i\omega}{K} - z_m^2 \right) (\delta_{m1} + \delta_{m2}) + \delta_{m3} \right] \left( \frac{1}{z_m^2 r^2} - \frac{1}{z_m r} + \delta_{m3} \right) E_m \\
 \tilde{\chi} &= \sum_{m=1}^3 \left[ (-1)^m \frac{\mu}{(\lambda + 2\mu) z_{21}} \left( \frac{i\omega}{K} - z_m^2 \right) (\delta_{m1} + \delta_{m2}) + \delta_{m3} \right] \left( \frac{3}{z_m^2 r^2} - \frac{3}{z_m r} + 1 \right) E_m \\
 \tilde{\phi} &= \sum_{m=1}^2 \frac{(-1)^{m+1}}{(\lambda + 2\mu) z_{21}} z_m \left( \frac{1}{z_m r} - 1 \right) E_m \\
 \tilde{\kappa} &= \sum_{m=1}^2 \frac{(-1)^{m+1}}{z_{21}} \left( \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} z_3^2 - z_m^2 \right) E_m
 \end{aligned} \tag{2.62}$$

siendo  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{l}|$ ,  $E_m = \frac{1}{r} e^{-ik_m r}$ ,  $z_m = -ik_m$  ( $m = 1, 2, 3$ ) y  $z_{21} = z_2^2 - z_1^2$ .

Una vez conocida la respuesta en desplazamientos de la fase sólida y tensiones equivalentes en la fase fluida, pueden obtenerse las componentes del vector tensión en el esqueleto y el desplazamiento normal del fluido asociados a una superficie con normal exterior  $\mathbf{n}$ .

Para el vector tensión se hace uso de la ley de comportamiento del material poroelástico. Por tanto, si la carga está aplicada en dirección  $l$  sobre el esqueleto sólido, la componente del vector tensión sobre el mismo en dirección  $k$  es:

$$t_{lk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \omega) = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} (\tilde{A} \delta_{lk} + \tilde{B} r_{,l} r_{,k}) + (\tilde{A} r_{,k} n_l + \tilde{C} r_{,l} n_k) \right] \tag{2.63}$$

Si la fuente puntual se aplica sobre el fluido, la componente  $k$  del vector tensión en el esqueleto es:

$$t_{ok}^*(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \omega) = \frac{\gamma}{4\pi} \left( \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \tilde{F} r_{,k} + \tilde{G} n_k \right) \tag{2.64}$$

La solución fundamental en términos del desplazamiento normal del fluido se determina a partir de la expresión (2.19) una vez conocidos el desplazamiento del sólido y la tensión equivalente. Ahora, si la carga está aplicada sobre el esqueleto según  $l$ , el desplazamiento normal del fluido es:

$$U_{nl}^*(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \omega) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \tilde{D} r_{,l} + \tilde{E} n_l \right) \tag{2.65}$$

y si la carga actúa sobre la fase fluida:

$$U_{no}^* - J X_l' n_l = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \tilde{H} \tag{2.66}$$

Las expresiones  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{C}$ ,  $\tilde{D}$ ,  $\tilde{E}$ ,  $\tilde{F}$ ,  $\tilde{G}$  y  $\tilde{H}$ , en función de  $\tilde{\psi}$ ,  $\tilde{\chi}$ ,  $\tilde{\phi}$  y  $\tilde{\kappa}$  se escriben a continuación:

$$\tilde{A} = \frac{d\tilde{\psi}}{dr} - \frac{\tilde{\chi}}{r} \quad (2.67a)$$

$$\tilde{B} = 2 \left( 2 \frac{\tilde{\chi}}{r} - \frac{d\tilde{\chi}}{dr} \right) \quad (2.67b)$$

$$\tilde{C} = \frac{\lambda}{\mu} \left( \frac{d\tilde{\psi}}{dr} - \frac{d\tilde{\chi}}{dr} - 2 \frac{\tilde{\chi}}{r} \right) - 2 \frac{\tilde{\chi}}{r} + \frac{Q}{R} i \omega \eta \tilde{\phi} \quad (2.67c)$$

$$\tilde{D} = i \omega \eta J \left( \frac{d\tilde{\phi}}{dr} - \frac{\tilde{\phi}}{r} \right) - \frac{Z}{\mu} \tilde{\chi} \quad (2.67d)$$

$$\tilde{E} = i \omega \eta J \frac{\tilde{\phi}}{r} + \frac{Z}{\mu} \tilde{\psi} \quad (2.67e)$$

$$\tilde{F} = 2\mu \left( \frac{d\tilde{\phi}}{dr} - \frac{\tilde{\phi}}{r} \right) \quad (2.67f)$$

$$\tilde{G} = \lambda \left( \frac{d\tilde{\phi}}{dr} + 2 \frac{\tilde{\phi}}{r} \right) - 2\mu \frac{\tilde{\phi}}{r} + \frac{Q}{R\gamma} \tilde{\kappa} \quad (2.67g)$$

$$\tilde{H} = J \frac{d\tilde{\kappa}}{dr} + Z\gamma \tilde{\phi} \quad (2.67h)$$

#### 2.4.5 Formulación integral en el contorno

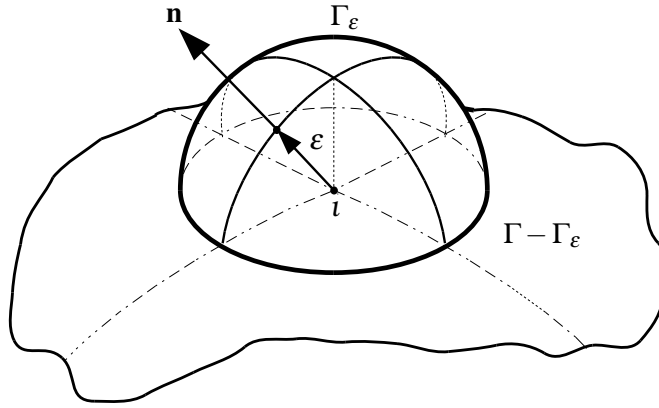
La formulación integral expuesta en los apartados 2.4.1 y 2.4.2 anteriores permite, a través de (2.50) para medios poroelásticos y (2.52) para medios elásticos, determinar las variables fundamentales en puntos internos de  $\Omega$  en función de los valores que adoptan éstas y sus derivadas en puntos del contorno  $\Gamma$ . La aplicación del MEC para la resolución numérica de problemas en el que están involucrados estos tipos de medios requiere que dicha formulación integral implique únicamente variables en el contorno. Por tanto se hace necesario que los puntos de colocación de la carga estén situados en el contorno. Existen, sin embargo, algunas dificultades asociadas a esta operación teniendo en cuenta que las expresiones de los integrandos son singulares en el punto de colocación.

La manera de solventar esta singularidad al evaluar estas integrales en el contorno consiste en recrear artificialmente el dominio en el entorno del punto de colocación  $\iota$  a través de una semiesfera  $\Gamma_\varepsilon$  de radio  $\varepsilon \rightarrow 0$ . La figura 2.3 muestra dicha semiesfera, cuyo centro es el punto de colocación  $\iota$ . Por tanto así, cada una de las integrales de contorno pueden descomponerse en otras dos extendidas respectivamente a los contornos  $\Gamma - \Gamma_\varepsilon$  y  $\Gamma_\varepsilon$ .

Aplicando este proceso de subdivisión a la expresión (2.52), para el caso de regiones viscoelásticas, puede escribirse ésta como:

$$u_l^l + \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} t_{lk}^* u_k d\Gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon} t_{lk}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} u_{lk}^* t_k d\Gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon} u_{lk}^* t_k d\Gamma \quad (2.68)$$

Para que esta igualdad implique sólo variables en el contorno, será necesario estudiar el comportamiento de estas integrales cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Así, las integrales sobre  $\Gamma - \Gamma_\varepsilon$  no presentan problemas ya que el contorno sobre el que se extienden no incluye la singularidad y en el límite han de entenderse en el sentido del Valor Principal de Cauchy (C.P.V.) (ver, p.e., [DG98]).



**Figura 2.3:** Igualdad integral en el contorno. Procedimiento de extracción de la singularidad.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} t_{lk}^* u_k d\Gamma = \text{C.P.V.} \int_{\Gamma} t_{lk}^* u_k d\Gamma \quad (2.69a)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} u_{lk}^* t_k d\Gamma = \text{C.P.V.} \int_{\Gamma} u_{lk}^* t_k d\Gamma \quad (2.69b)$$

Por otra parte, las integrales extendidas al contorno diferencial  $\Gamma_\varepsilon$  están perfectamente definidas en el límite. Teniendo en cuenta que  $u_{lk}^* \sim O(1/\varepsilon)$ ,  $t_{lk}^* \sim O(1/\varepsilon^2)$  y  $d\Gamma \sim O(\varepsilon^2)$ , se puede escribir:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} u_{lk}^* t_k d\Gamma = 0 \quad (2.70a)$$

$$u_l^l + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} t_{lk}^* u_k d\Gamma = c_{lk}^l u_k^l \quad (2.70b)$$

donde  $c_{lk}^l$  es el *término libre*, idéntico al que aparece en elastoestática, cuyo valor depende de la geometría del contorno en el punto  $l$  y del coeficiente de Poisson del medio (ver, p.e. [Har81]). Si el contorno es suave en el punto de colocación (superficie normal continua)  $c_{lk}^l = 1/2 \delta_{lk}$ . Teniendo en cuenta las ecuaciones (2.69) y (2.70), la ecuación (2.68) puede escribirse como:

$$c_{lk}^l u_k^l + \int_{\Gamma} t_{lk}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{lk}^* t_k d\Gamma \quad (2.71)$$

donde todas las integrales en el contorno han de entenderse en el sentido del Valor Principal de Cauchy (por comodidad en la notación se omite 'C.P.V.' en adelante). Recogiendo de forma conjunta la colocación en las tres direcciones, la expresión (2.71) puede escribirse en notación matricial más compacta de la forma siguiente:

$$\mathbf{c}^l \mathbf{u}^l + \int_{\Gamma} \mathbf{p}^* \mathbf{u} d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{u}^* \mathbf{p} d\Gamma \quad (2.72)$$

donde  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{p}$  son respectivamente los vectores de los desplazamientos y las tensiones:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} \quad (2.73)$$

$\mathbf{u}^*$  y  $\mathbf{p}^*$  son los tensores  $3 \times 3$  de la solución fundamental:

$$\mathbf{u}^* = \begin{pmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* & u_{13}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* & u_{23}^* \\ u_{31}^* & u_{32}^* & u_{33}^* \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{p}^* = \begin{pmatrix} t_{11}^* & t_{12}^* & t_{13}^* \\ t_{21}^* & t_{22}^* & t_{23}^* \\ t_{31}^* & t_{32}^* & t_{33}^* \end{pmatrix} \quad (2.74)$$

y  $\mathbf{c}^l$  es el tensor  $3 \times 3$  del término libre elastoestático en el punto de colocación ( $\mathbf{c}^l = \mathbf{I}$  en puntos internos, siendo  $\mathbf{I}$  la matriz unitaria diagonal  $3 \times 3$ )

$$\mathbf{c}^l = \begin{pmatrix} c_{11}^l & c_{12}^l & c_{13}^l \\ c_{21}^l & c_{22}^l & c_{23}^l \\ c_{31}^l & c_{32}^l & c_{33}^l \end{pmatrix} \quad (2.75)$$

En el caso de medios poroelásticos, llevando 2.50 al contorno y realizando el estudio en el límite, se obtiene una ecuación matricial del tipo (2.72), donde ahora:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \tau \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ U_n \end{pmatrix} \quad (2.76)$$

$$\mathbf{u}^* = \begin{pmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* & u_{13}^* & -\tau_1^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* & u_{23}^* & -\tau_2^* \\ u_{31}^* & u_{32}^* & u_{33}^* & -\tau_3^* \\ u_{o1}^* & u_{o2}^* & u_{o3}^* & -\tau_o^* \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{p}^* = \begin{pmatrix} t_{11}^* & t_{12}^* & t_{13}^* & -U_{n1}^* \\ t_{21}^* & t_{22}^* & t_{23}^* & -U_{n2}^* \\ t_{31}^* & t_{32}^* & t_{33}^* & -U_{n3}^* \\ t_{o1}^* & t_{o2}^* & t_{o3}^* & -\hat{U}_{no}^* \end{pmatrix} \quad (2.77)$$

siendo  $\hat{U}_{no}^* = U_{no}^* - JX_i' n_i$ . Ahora, el tensor correspondiente al término libre se escribe como:

$$\mathbf{c}^l = \begin{pmatrix} c_{11}^l & c_{12}^l & c_{13}^l & 0 \\ c_{21}^l & c_{22}^l & c_{23}^l & 0 \\ c_{31}^l & c_{32}^l & c_{33}^l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Jc^l \end{pmatrix} \quad (2.78)$$

Este tensor  $\mathbf{c}^l$  dependerá de la geometría del contorno en el punto  $l$ , del coeficiente de Poisson  $\nu$  del material drenado y del valor de  $J$ .

## 2.5 El método de los elementos de contorno

La formulación integral en el contorno para cada uno de los medios junto con las condiciones de contorno y de contacto en las interfases entre regiones permiten abordar la solución para el campo de desplazamientos y tensiones. Salvo para problemas muy sencillos, la solución analítica del problema es inabordable. Por esta razón y utilizando el método de los elementos de contorno, se lleva a cabo un proceso de discretización de estas ecuaciones con el fin de obtener un sistema

algebraico de ecuaciones del cual se obtendrá la solución numérica del problema en los puntos del contorno.

### 2.5.1 Discretización del contorno

El planteamiento numérico de la ecuación (2.72) requiere la discretización del contorno  $\Gamma$  en un número  $\mathcal{N}_e$  de elementos  $\Gamma_j$ , de manera que:

$$\Gamma \simeq \bigcup_{j=1}^{\mathcal{N}_e} \Gamma_j \quad (2.79)$$

Cada elemento  $j$  se define por un número de nodos  $\mathcal{N}_n^j$ , de manera que los campos de desplazamientos  $\mathbf{u}$  y tensiones  $\mathbf{p}$  sobre el mismo pueden interpolarse a través de los valores nodales haciendo uso de un grupo de funciones de forma, las cuales serán definidas más adelante. Así, sobre un elemento genérico  $j$  se pueden expresar como:

$$\mathbf{u}(\xi) = \Phi(\xi) \mathbf{u}^j \quad ; \quad \mathbf{p}(\xi) = \Phi(\xi) \mathbf{p}^j \quad (2.80)$$

siendo  $\mathbf{u}^j$  y  $\mathbf{p}^j$  los vectores que contienen respectivamente los desplazamientos y las tensiones nodales.  $\Phi(\xi)$  es una matriz que contiene las funciones de forma del elemento, donde  $\xi$  representa el conjunto de las coordenadas naturales usadas para definir un punto cualquiera sobre el mismo. Las dimensiones de los vectores  $\mathbf{u}^j$  y  $\mathbf{p}^j$  pueden ser  $3 \mathcal{N}_n^j \times 1$  en el caso de dominios viscoelásticos o bien  $4 \mathcal{N}_n^j \times 1$  en el caso de los poroelásticos. De la misma forma, la matriz  $\Phi(\xi)$  puede ser de dimensiones  $3 \times 3 \mathcal{N}_n^j$  en el caso viscoelástico

$$\Phi(\xi) = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & 0 & \dots & \phi_{\mathcal{N}_n^j} & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & \dots & 0 & \phi_{\mathcal{N}_n^j} & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & \dots & 0 & 0 & \phi_{\mathcal{N}_n^j} \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

o  $4 \times 4 \mathcal{N}_n^j$  en el caso de dominios poroelásticos

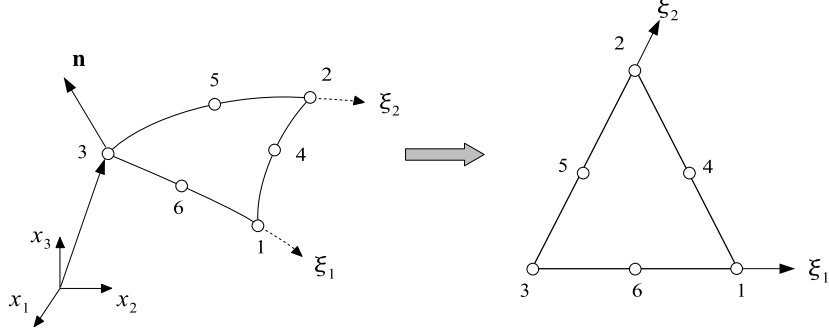
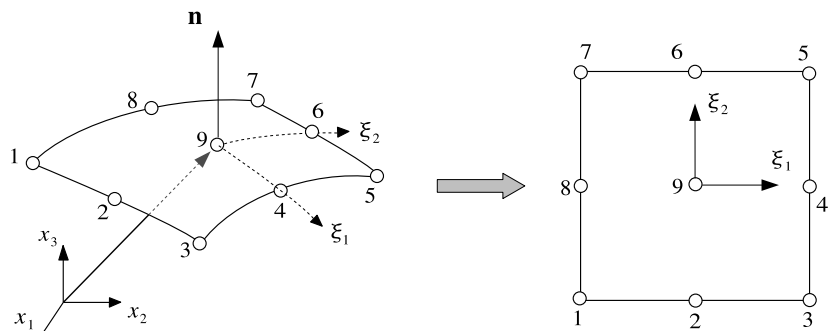
$$\Phi(\xi) = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & 0 & 0 & \dots & \phi_{\mathcal{N}_n^j} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & \phi_{\mathcal{N}_n^j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1 & 0 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & \phi_{\mathcal{N}_n^j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \phi_1 & 0 & 0 & 0 & \phi_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & \phi_{\mathcal{N}_n^j} \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

La geometría del elemento se aproximará usando las mismas funciones de forma (elemento isoparamétrico):

$$\mathbf{x}(\xi) = \Phi(\xi) \mathbf{x}^j \quad (2.83)$$

donde  $\mathbf{x}^j$  es un vector de dimensiones  $3 \mathcal{N}_n^j \times 1$  que contiene las coordenadas de los nodos que definen el elemento  $j$ . Aunque el tratamiento numérico es extrapolable a cualquier tipo de elemento, en el modelo que se presenta se han utilizado elementos cuadráticos cuadriláteros y triangulares de nueve y seis nodos respectivamente [Dom93]. En la tabla 2.1 se presenta

Tabla 2.1: Tipología de los elementos cuadráticos triangulares y cuadriláteros

 $\begin{aligned}\phi_1 &= \xi_1(2\xi_1 - 1) & ; & & \phi_4 &= 4\xi_1\xi_2 \\ \phi_2 &= \xi_2(2\xi_2 - 1) & ; & & \phi_5 &= 4\xi_2\xi_3 \\ \phi_3 &= \xi_3(2\xi_3 - 1) & ; & & \phi_6 &= 4\xi_1\xi_3 \\ \xi_3 &= 1 - \xi_1 - \xi_2 & ; & 0 \leq \xi_1 \leq 1 & ; & 0 \leq \xi_2 \leq 1\end{aligned}$
 $\begin{aligned}\phi_1 &= \frac{1}{4}\xi_1(\xi_1 - 1)\xi_2(\xi_2 - 1) & ; & & \phi_2 &= \frac{1}{2}(1 - \xi_1^2)\xi_2(\xi_2 - 1) \\ \phi_3 &= \frac{1}{4}\xi_1(\xi_1 + 1)\xi_2(\xi_2 - 1) & ; & & \phi_4 &= \frac{1}{2}\xi_1(1 + \xi_1)(1 - \xi_2^2) \\ \phi_5 &= \frac{1}{4}\xi_1(\xi_1 + 1)\xi_2(\xi_2 + 1) & ; & & \phi_6 &= \frac{1}{2}(1 - \xi_1^2)\xi_2(\xi_2 + 1) \\ \phi_7 &= \frac{1}{4}\xi_1(\xi_1 - 1)\xi_2(\xi_2 + 1) & ; & & \phi_8 &= \frac{1}{2}\xi_1(\xi_1 - 1)(1 - \xi_2^2) \\ \phi_9 &= (1 - \xi_1^2)(1 - \xi_2^2) \\ & -1 \leq \xi_1 \leq 1 & ; & -1 \leq \xi_2 \leq 1\end{aligned}$

la tipología de los elementos junto con sus funciones de forma escritas en términos de las coordenadas naturales  $\xi_1$  y  $\xi_2$ .

Aclarar que la geometría aproximada por la ecuación (2.83) no es, en general, completamente coincidente con el contorno original como expresa la expresión (2.79). El error de aproximación depende de la complejidad de la geometría, la discretización realizada y las funciones de forma. Sin embargo, esta clase de errores son inherentes a la aproximación en la cual el método de elementos de contorno, y muchos otros métodos, se basan, y en consecuencia no los invalidan.

Una vez que los contornos han sido discretizados y teniendo en cuenta que  $\mathbf{u}^j$  y  $\mathbf{p}^j$  son vectores constantes dentro del elemento  $\Gamma_j$ , la sustitución de (2.80) en (2.72) permite escribir:

$$\mathbf{c}^t \mathbf{u}^t + \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_e} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{p}^* \Phi d\Gamma \right\} \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_e} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^* \Phi d\Gamma \right\} \mathbf{p}^j \quad (2.84)$$

lo cual constituye un conjunto de tres ecuaciones algebraicas cuyos coeficientes dependen del valor de la solución fundamental en los nodos del contorno cuando la carga unidad actúa en el punto de aplicación. La expresión (2.84) puede ser escrita en forma matricial de la siguiente manera:

$$\mathbf{c}^t \mathbf{u}^t + \sum_{m=1}^{\mathcal{N}_n} \hat{\mathbf{H}}^{tm} \mathbf{u}^m = \sum_{m=1}^{\mathcal{N}_n} \mathbf{G}^{tm} \mathbf{p}^m \quad (2.85)$$

donde ahora los sumatorios se extienden a todos los nodos de la discretización. Los vectores  $\mathbf{u}^m$  y  $\mathbf{p}^m$  representan las componentes nodales en desplazamientos y tensiones en el nodo  $m$ . Las matrices  $\hat{\mathbf{H}}^{tm}$  y  $\mathbf{G}^{tm}$  representan la respuesta del nodo  $m$  debida a una carga armónica unitaria en el punto de colocación  $t$ , y se definen como:

$$\hat{\mathbf{H}}^{tm} = \sum_{e_m} \int_{\Gamma_{e_m}} \mathbf{p}^* \phi_k d\Gamma \quad (2.86)$$

$$\mathbf{G}^{tm} = \sum_{e_m} \int_{\Gamma_{e_m}} \mathbf{u}^* \phi_k d\Gamma \quad (2.87)$$

donde los sumatorios se extienden a todos los elementos  $e_m$  a los cuales pertenece el nodo  $m$ , y siendo  $\phi_k$  la función de forma correspondiente al nodo  $m$  cuando pertenece al elemento  $\Gamma_{e_m}$ . El punto de colocación  $t$  normalmente coincidirá con un determinado nodo  $m$  de la discretización, en ese caso, llamando a:

$$\mathbf{H}^{tm} = \begin{cases} \hat{\mathbf{H}}^{tm} & , \text{ si } t \neq m \\ \mathbf{c}^t + \hat{\mathbf{H}}^{tm} & , \text{ si } t = m \end{cases} \quad (2.88)$$

la ecuación (2.85) puede ser escrita como:

$$\sum_{m=1}^{\mathcal{N}_n} \mathbf{H}^{tm} \mathbf{u}^m = \sum_{m=1}^{\mathcal{N}_n} \mathbf{G}^{tm} \mathbf{p}^m \quad (2.89)$$

Finalmente, al aplicar la carga en todos y cada uno de los nodos de la discretización se tiene para cada uno de ellos un grupo de ecuaciones como (2.85), y todos constituyen un sistema de ecuaciones independientes de la forma:



$$\mathbf{H}\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{G}\bar{\mathbf{p}} \quad (2.90)$$

donde  $\bar{\mathbf{u}}$  y  $\bar{\mathbf{p}}$  son los vectores que contienen los valores nodales del problema. Las matrices  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{G}$  están compuestas por las submatrices  $\mathbf{H}^{lm}$  y  $\mathbf{G}^{lm}$  respectivamente. Una vez aplicadas las condiciones de contorno se puede reordenar (2.90) y escribir el sistema resultante:

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{f}} \quad (2.91)$$

donde  $\bar{\mathbf{x}}$  es el vector de incógnitas (componentes de  $\mathbf{u}$  o  $\mathbf{p}$  según el caso) y  $\bar{\mathbf{f}}$  el vector de coeficientes que se obtiene de multiplicar las columnas de  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{G}$  por las componentes conocidas de  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{p}$  respectivamente.

### 2.5.2 Aspectos numéricos

Como se ha visto hasta ahora, la resolución de un problema mediante el método de elementos de contorno reside en varios aspectos, como es la discretización de los contornos, la evaluación numérica de las submatrices  $\mathbf{H}^{lm}$  y  $\mathbf{G}^{lm}$ , el montaje del sistema de ecuaciones a través de la matriz  $\mathbf{A}$  y la obtención del vector  $\bar{\mathbf{f}}$  tras la aplicación de las condiciones de contorno y finalmente la resolución del sistema lineal de ecuaciones algebraicas. Esto permite la obtención de una solución numérica aproximada en términos de los campos de desplazamientos y tensiones en los puntos del contorno, lo que permite a su vez la obtención de los desplazamientos para cualquier punto interno  $\mathbf{x} \in \Omega$  a través de las ecuaciones (2.50) y (2.52) para medios poroelásticos o elásticos respectivamente. En todo este proceso, uno de los aspectos clave del método es la correcta evaluación numérica de las integrales de la manera más eficiente.

En este sentido hay algunos aspectos a destacar. Cuando el punto de colocación no pertenece al elemento  $j$  sobre el que se integra, las integrales en las ecuaciones (2.86) y (2.87) son regulares en  $\Gamma_j$  y, en consecuencia, éstas pueden ser evaluadas haciendo uso de la cuadratura Gaussiana estándar sobre los elementos rectangulares o triangulares según el caso (ver, p.e., [SS66, AS64]). Aún así, cuando la distancia  $r$  del punto de colocación al elemento sobre el que se integra es relativamente pequeña, estas integrales están cerca de ser singulares debido a que los integrandos son inversamente proporcionales a  $r$ . En ese caso, se emplea un esquema de regularización como el presentado por Telles [Tel87]. Por otro lado, cuando el punto de colocación pertenece al elemento  $j$  sobre el que se integra, los núcleos  $\mathbf{u}^*$  y  $\mathbf{p}^*$  presentan singularidades del tipo  $O(1/r)$  y  $O(1/r^2)$  respectivamente. Las singularidades de primer tipo, conocidas también como *singularidad débil*, pueden ser tratadas mediante la técnica de subdivisión del elemento en conjunción con un procedimiento de transformación de coordenadas para hacer el integrando regular (ver [LHM85, Tel87, ACD89]). El segundo tipo de singularidades, llamadas *fuertemente singulares*, son evaluadas siguiendo la técnica propuesta por Chirino et al. [CMA00], que continua la línea de los trabajos previos de Cruse et al. [Cru69] y Li et al. [LHM85], en el sentido de identificar los términos fuertemente singulares para regularizarlos directamente en coordenadas cartesianas de forma conveniente y obtener así una integral de superficie y otra de línea extendida al perímetro del elemento, ambas no singulares y evaluables mediante cuadratura estándar. Las singularidades se cancelan al incorporar la contribución de los elementos adyacentes.

La explicación de estos aspectos numéricos está fuera de los objetivos de este trabajo. Una exposición más profunda de la evaluación numérica de las integrales y otros detalles numéricos del método de elementos de contorno, como es el problema de esquina, pueden ser revisados en [Dom93, Azn02].

## 2.6 Modelo acoplado. Condiciones de contorno en las interfases

La completa definición del problema en el dominio de la frecuencia requiere que las condiciones de contorno se cumplan en términos de las variables fundamentales y sus derivadas. Las condiciones iniciales en el dominio del tiempo no son necesarias al haber eliminado la dependencia temporal de las ecuaciones de gobierno.

Para sólidos viscoelásticos, el vector tensión  $t_i^s(\mathbf{x}, \omega)$  en el punto  $\mathbf{x}$  del contorno  $\Gamma$  con normal exterior  $\mathbf{n}$  se define como:

$$t_i^s(\mathbf{x}, \omega) = \sigma_{ij}^s(\mathbf{x}, \omega) n_j(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (2.92)$$

donde  $\sigma_{ij}^s$  es el tensor de tensiones en el punto  $\mathbf{x}$ . En el caso de sólidos poroelásticos, el vector tensión sobre el esqueleto  $t_i^e(\mathbf{x}, \omega)$  en cualquier punto del contorno es:

$$t_i^e(\mathbf{x}, \omega) = \tau_{ij}(\mathbf{x}, \omega) n_j(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (2.93)$$

siendo  $\tau_{ij}$  el tensor de tensiones equivalentes sobre la matriz sólida. Por tanto, el vector tensión total sobre el material poroelástico homogéneo es

$$t_i^p(\mathbf{x}, \omega) = t_i^e(\mathbf{x}, \omega) + \tau(\mathbf{x}, \omega) n_j(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (2.94)$$

Para ambos tipos de sólido, viscoelástico y poroelástico, en una parte del contorno ( $\Gamma_1$ ) son conocidas las variables fundamentales. En la parte complementaria restante ( $\Gamma_2$ ) del contorno se conocen las variables derivadas. Por tanto, para sólidos viscoelásticos

$$u_i^s = \bar{u}_i^s \quad \text{in } \Gamma_1 \quad (2.95a)$$

$$t_i^s = \bar{t}_i^s \quad \text{in } \Gamma_2 \quad (2.95b)$$

siendo  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$  y  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ .

Tratándose de sólidos poroelásticos, las variables fundamentales son el vector desplazamiento del esqueleto sólido  $\mathbf{u}^e$  y la tensión equivalente en el fluido  $\tau$ . Las variables derivadas son el vector de tensiones sobre el esqueleto  $\mathbf{p}^e$  y el desplazamiento normal al contorno del fluido  $U_n$ . Para este tipo de sólidos, es interesante distinguir entre contornos permeables o impermeables. Estas dos consideraciones representan los dos casos extremos de la teoría presentada por Deresiewicz y Skalak [DS63] para representar la realidad física del problema. Si se considera caso permeable, la presión de poro es nula ( $\tau = 0$ ). En este caso puede ser conocido el vector desplazamiento de la fase sólida ( $u_i^e = \bar{u}_i^e$ ) o la tensión equivalente sobre ella ( $t_i^e = \bar{t}_i^e$ ). Si el contorno es impermeable, son iguales las componentes normales del desplazamiento en ambas fases ( $u_n^e = U_n$ ). Esto último puede ser conocido ( $u_n^e = U_n = \bar{u}_n$ ) y las incógnitas serán las tensiones equivalentes en ambas fases o bien será conocida la tensión total sobre el contorno ( $t_i^p = \bar{t}_i^p$ ) y el desplazamiento incógnita.

El análisis dinámico de modelos donde coexisten varios tipos de medios debe tener en cuenta el efecto de interacción entre ellos a través de las interfases o contornos comunes a dos regiones. Esta interacción se establece matemáticamente a través de las ecuaciones de equilibrio de

tensiones y compatibilidad de desplazamientos de ambos medios en todos los puntos de estos contornos. En relación a los problemas que van a ser tratados en este trabajo y dependiendo de la naturaleza de los medios que interactúan, hablaremos de dos tipos de interfase posibles: *viscoelástico-viscoelástico* y *viscoelástico-poroelástico*. En este último caso, la condición de contacto en la interfase puede ser considerado como permeable o impermeable.

*Interfase viscoelástico-viscoelástico*: siendo  $S1$  y  $S2$  dos sólidos viscoelásticos, las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad en este caso son inmediatas. Así:

$$\text{Condición de equilibrio: } \mathbf{p}^{S1} + \mathbf{p}^{S2} = 0 \quad (2.96a)$$

$$\text{Compatibilidad cinemática: } \mathbf{u}^{S1} - \mathbf{u}^{S2} = 0 \quad (2.96b)$$

*Interfase viscoelástico-poroelástico*: en este caso, y teniendo en cuenta que el medio poroso puede ser impermeable o permeable, la condición de equilibrio entre el vector de tensiones  $\mathbf{p}^s$  del medio viscoelástico y el vector de tensiones  $\mathbf{p}^p$  ( $\mathbf{p}^p = \mathbf{p}^e + \boldsymbol{\tau} \mathbf{n}$ ) del medio poroelástico puede ser expresada como:

$$\text{Condición de equilibrio (impermeable): } \mathbf{p}^s + \mathbf{p}^e + \boldsymbol{\tau} \mathbf{n} = 0 \quad (2.97a)$$

$$\text{Condición de equilibrio (permeable, } \boldsymbol{\tau} = 0): \mathbf{p}^s + \mathbf{p}^e = 0 \quad (2.97b)$$

La condición de compatibilidad se cumple cuando los vectores de desplazamiento del esqueleto del medio poroelástico  $\mathbf{u}^e$  y del medio elástico  $\mathbf{u}^s$  son iguales:

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{u}^s \quad (2.98)$$

En el caso de que el medio poroso sea impermeable, también se cumple que el desplazamiento normal de los puntos del esqueleto y el desplazamiento normal a la interfase del fluido son iguales

$$\mathbf{u}_n^e = U_n \quad (2.99)$$

## 2.7 Ecuaciones de campo incidente en el semiespacio

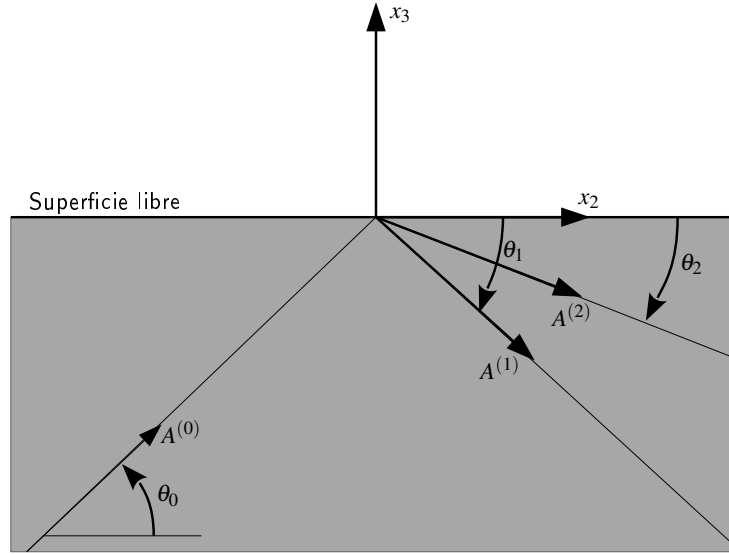
En este apartado se establecen las expresiones que definen los campos de desplazamientos y tensiones producidos por la incidencia de ondas planas a través del semiespacio elástico o poroelástico.

En el caso elástico se estudiará el comportamiento del mismo cuando a través del semiespacio se propagan ondas de tipo SH, SV, P y de Rayleigh incidiendo con un ángulo totalmente genérico. Primero se tratará el caso bidimensional con un ángulo de incidencia cualquiera para después extender las expresiones bidimensionales al problema en tres dimensiones.

Cuando se trata de un semiespacio poroelástico, el campo incidente se presenta sólo para ondas planas transversales S y longitudinales P con incidencia vertical.

### 2.7.1 Semiespacio elástico

En este apartado se presentarán las ecuaciones del campo incidente en un semiespacio elástico sometido a la incidencia de ondas sísmicas tipo SH, P, SV y de Rayleigh que llegan a la superficie con un ángulo de incidencia totalmente genérico. Se considera un semiespacio, con propiedades mecánicas homogéneas dadas por su módulo de elasticidad  $E$  y su coeficiente de Poisson  $\nu$ . A través del medio se propaga un tren de ondas cuya dirección se encuentra contenida en un plano perpendicular a la superficie libre del semiespacio, plano  $x_2x_3$ , formando un ángulo  $\theta_0$  con el eje  $x_2$  (ver figura 2.4).



**Figura 2.4:** Ondas incidente y reflejadas en un semiespacio elástico. Ángulos de interés.

En la figura 2.4 se muestran los parámetros que definen completamente el problema. Se observa no sólo el ángulo  $\theta_0$  de la onda incidente, sino también los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  de las ondas reflejadas debido al proceso de reflexión cuando el frente llega a la superficie libre del semiespacio. Se definen también las amplitudes de la onda incidente como  $A^{(0)}$  y de las ondas reflejadas como  $A^{(1)}$  y  $A^{(2)}$ . La cantidad de ondas reflejadas depende del tipo de onda incidente: una onda reflejada en el caso de que incida una onda SH y de dos ondas reflejadas en el caso de ondas P o SV incidentes.

En cuanto a la propagación de ondas en un semiespacio elástico, lo expuesto aquí es una explicación somera y condensada, para una estudio con mayor profundidad y detalle ver *p.e.* [Ach73, ES75, Dom93].

#### 2.7.1.1 Reflexión de ondas SH, P y SV

El campo de desplazamientos para una onda de cualquiera (SH, P o SV) se puede escribir en notación de índices de la siguiente manera

$$u_i = \sum_{j=0}^{n-1} d_i^{(j)} A^{(j)} e^{ik_j(s^{(j)} \cdot \mathbf{r})} \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.100)$$

siendo  $u_i$  la componente en dirección  $i$  del vector desplazamiento  $\mathbf{u}$ , donde  $n$  es el número de

ondas que intervienen considerando la incidente y las reflejadas,  $d_i^{(j)}$  es la componente en la dirección  $i$  del vector  $\mathbf{d}^{(j)}$  que contiene los cosenos directores de los desplazamientos producidos por la onda  $j$ ,  $A^{(j)}$  y  $k_j$  son respectivamente la amplitud y el número de onda de la onda  $j$ ,  $\mathbf{s}^{(j)}$  es el vector que contiene los cosenos directores de la dirección de propagación de la onda  $j$ ,  $\mathbf{r}$  es el vector de posición del punto del semiespacio donde se desea determinar el desplazamiento,  $i$  es la unidad imaginaria.

Como ya se ha dicho, dependiendo del tipo de onda incidente, la reflexión de la misma en la superficie libre del terreno puede generar una o dos ondas reflejadas. Si se trata de una onda SH, únicamente se genera una onda reflejada también de tipo SH. En el caso de ondas incidentes P o SV se reflejan dos ondas, una de tipo P y otra SV. En la tabla 2.2 se recogen los tres casos posibles de ondas incidentes que se estudian en este apartado, así como las ondas que se reflejan y los vectores  $\mathbf{s}$  y  $\mathbf{d}$  que contienen respectivamente los cosenos directores de la dirección de propagación y de los desplazamientos. El superíndice (0) se refiere a la onda incidente y los superíndices (1) y (2) a las ondas reflejadas. En el caso de la onda SH, los desplazamientos se producen en la dirección del eje  $x_1$  perpendicular a la de propagación (fuera del plano  $x_2x_3$ ). Para la onda P la dirección de propagación y de los desplazamientos (contenidos en el plano  $x_2x_3$ ) que ésta produce es la misma. Si se trata de una onda SV, los desplazamientos están contenidos en el plano  $x_2x_3$  y se producen en dirección perpendicular a la de propagación. En la tabla 2.3 se presentan las componentes del campo de desplazamientos definido por la expresión (2.100), que se obtiene como la suma de las contribuciones de la onda incidente y las reflejadas.

Al tratarse de un semiespacio, en cualquier plano  $x_2x_3$  perpendicular a la superficie libre del mismo debe cumplirse la independencia de la condición de contorno con  $x_2$ . Por ello se pueden establecer las relaciones entre el ángulo de la onda incidente y de las ondas reflejadas, siendo  $\theta_1$  (ángulo de la onda reflejada del mismo tipo que la onda incidente) igual a  $\theta_0$  en todos los casos. El ángulo  $\theta_2$  tiene diferentes expresiones dependiendo de si la onda incidente es de tipo P o SV (para una onda SH no existe segunda onda reflejada). En la tabla 2.4 se muestran las relaciones entre los ángulos de la onda incidente y las reflejadas, siendo  $\kappa$  la relación entre las velocidades de propagación de la onda transversal S y la onda longitudinal P cuyas expresiones están dadas por (2.23) ( $\kappa = c_S/c_P$ ).

En el caso de una onda SV incidente, existe una particularidad analizando la expresión que determina  $\theta_2$ . Para un valor de  $\theta_0$  que cumple  $\cos(\theta_0) = \kappa$ , el ángulo  $\theta_2$  de la onda P reflejada se anula. Al ángulo que produce este efecto se le denomina ángulo crítico  $\theta_{cr}$ . Para valores del ángulo de incidencia menores al ángulo crítico se cumple que  $\cos(\theta_0) > \kappa$ , por tanto  $\cos(\theta_2) = (1/\kappa)\cos(\theta_0) > 1$ , lo cual supone una singularidad que implica que  $\sin(\theta_2)$  es un número complejo. Debido a esto se hace necesaria una modificación de la formulación que permita tener en cuenta este hecho (ver p.e. [Ach73]).

Habiendo determinado el campo de desplazamientos para cualquier punto del semiespacio, el tensor de deformaciones y el tensor de tensiones pueden obtenerse respectivamente a través de las ecuaciones de compatibilidad (2.1) y de la ley de comportamiento (2.3), que se repiten a continuación para mayor comodidad

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad ; \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad ; \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.3)$$

Una vez obtenido el tensor de tensiones se establecen las condiciones de contorno que permiten determinar las relaciones entre la amplitud de la onda incidente y las amplitudes de las ondas reflejadas. Dichas condiciones deben cumplirse para la cota de superficie libre ( $x_3 = 0$ ) y deben

ser nulas en términos de la tensión normal y tangencial. En la tabla 2.5 se presenta el tensor de deformaciones y el tensor de tensiones para cada caso de onda incidente, junto con las condiciones de contorno.

Aplicando las condiciones de contorno sobre los términos del tensor de tensiones correspondientes se obtiene un sistema algebraico de ecuaciones con una incógnita más que el número de ecuaciones, pero considerando la amplitud de la onda incidente como unitaria, se puede resolver dicho sistema para obtener los valores de las amplitudes de las ondas reflejadas. En la tabla 2.6 se presentan las expresiones de las amplitudes de la onda incidente y las reflejadas. Si se analizan las expresiones de las amplitudes de las ondas reflejadas para el caso de una onda P incidente, se puede ver que existe un cierto ángulo  $\theta_0$  que produce que la amplitud de la onda P reflejada se anule, produciéndose un fenómeno conocido como cambio de modo. De esta manera, una onda P incidente se refleja en forma de una única onda de tipo SV (de ahí el cambio de modo). El valor de dicho ángulo de incidencia para el que sólo se refleja una onda SV está dado por el valor del coeficiente de Poisson. Este fenómeno de cambio de modo se da también en la incidencia de ondas SV, por lo que una onda SV incidente se refleja en una única onda de tipo P. Para más detalles sobre el cambio de modo ver *p.e.* [Ach73, Dom93].

**Tabla 2.2:** Ondas reflejadas y vectores  $\mathbf{s}$  y  $\mathbf{d}$  según la onda incidente

Onda incidente	Onda/s reflejada/s	Vectores $\mathbf{s}$	Vectores $\mathbf{d}$
SH (0)	SH (1)	$\mathbf{s}^{(0)} = [0, \cos(\theta_0), \sin(\theta_0)]$	$\mathbf{d}^{(0)} = [1, 0, 0]$
		$\mathbf{s}^{(1)} = [0, \cos(\theta_1), -\sin(\theta_1)]$	$\mathbf{d}^{(1)} = [1, 0, 0]$
P (0)	P (1) SV (2)	$\mathbf{s}^{(0)} = [0, \cos(\theta_0), \sin(\theta_0)]$	$\mathbf{d}^{(0)} = [0, \cos(\theta_0), \sin(\theta_0)]$
		$\mathbf{s}^{(1)} = [0, \cos(\theta_1), -\sin(\theta_1)]$	$\mathbf{d}^{(1)} = [0, \cos(\theta_1), -\sin(\theta_1)]$
		$\mathbf{s}^{(2)} = [0, \cos(\theta_2), -\sin(\theta_2)]$	$\mathbf{d}^{(2)} = [0, -\sin(\theta_2), -\cos(\theta_2)]$
SV (0)	SV (1) P (2)	$\mathbf{s}^{(0)} = [0, \cos(\theta_0), \sin(\theta_0)]$	$\mathbf{d}^{(0)} = [0, \sin(\theta_0), -\cos(\theta_0)]$
		$\mathbf{s}^{(1)} = [0, \cos(\theta_1), -\sin(\theta_1)]$	$\mathbf{d}^{(1)} = [0, -\sin(\theta_1), -\cos(\theta_1)]$
		$\mathbf{s}^{(2)} = [0, \cos(\theta_2), -\sin(\theta_2)]$	$\mathbf{d}^{(2)} = [0, \cos(\theta_2), -\sin(\theta_2)]$

**Tabla 2.3:** Ondas reflejadas y campo de desplazamientos según la onda incidente

Onda incidente	Onda/s reflejada/s	Campo de desplazamientos
SH (0)	SH (1)	$u_1 = d_1^{(0)} A_{SH}^{(0)} e^{-ik_S(\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} + d_1^{(1)} A_{SH}^{(1)} e^{-ik_S(\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})}$
		$u_2 = 0$
P (0)	P (1) SV (2)	$u_3 = 0$
		$u_1 = 0$
		$u_2 = d_2^{(0)} A_P^{(0)} e^{-ik_P(\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} + d_2^{(1)} A_P^{(1)} e^{-ik_P(\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})} + d_2^{(2)} A_{SV}^{(2)} e^{-ik_S(\mathbf{s}^{(2)} \cdot \mathbf{r})}$
SV (0)	SV (1) P (2)	$u_3 = d_3^{(0)} A_P^{(0)} e^{-ik_P(\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} + d_3^{(1)} A_P^{(1)} e^{-ik_P(\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})} + d_3^{(2)} A_{SV}^{(2)} e^{-ik_S(\mathbf{s}^{(2)} \cdot \mathbf{r})}$
		$u_1 = 0$
		$u_2 = d_2^{(0)} A_{SV}^{(0)} e^{-ik_S(\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} + d_2^{(1)} A_{SV}^{(1)} e^{-ik_S(\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})} + d_2^{(2)} A_P^{(2)} e^{-ik_P(\mathbf{s}^{(2)} \cdot \mathbf{r})}$
		$u_3 = d_3^{(0)} A_{SV}^{(0)} e^{-ik_S(\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} + d_3^{(1)} A_{SV}^{(1)} e^{-ik_S(\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})} + d_3^{(2)} A_P^{(2)} e^{-ik_P(\mathbf{s}^{(2)} \cdot \mathbf{r})}$

**Tabla 2.4:** Ondas reflejadas. Relaciones con el ángulo de incidencia  $\theta_0$ 

Onda incidente	Onda/s reflejada/s	Ángulos
SH (0)	SH (1)	$\theta_1 = \theta_0$
P (0)	P (1)	$\theta_1 = \theta_0$
	SV (2)	$\theta_2 = \cos^{-1}[\kappa \cos(\theta_0)]$
SV (0)	SV (1)	$\theta_1 = \theta_0$
	P (2)	$\theta_2 = \cos^{-1}[\frac{1}{\kappa} \cos(\theta_0)]$

**Tabla 2.5:** Tensores de deformaciones y tensor de tensiones. Condiciones de contorno.

Onda incidente	Onda/s reflejada/s	Tensor de deformaciones	Tensor de tensiones	Condiciones de contorno
SH (0)	SH (1)	$\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & 0 & 0 \\ \varepsilon_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & 0 & 0 \\ \sigma_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$x_3 = 0 \rightarrow \{ \sigma_{13} = 0$
P (0)	P (1)	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ 0 & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ 0 & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$	$x_3 = 0 \rightarrow \begin{cases} \sigma_{23} = 0 \\ \sigma_{33} = 0 \end{cases}$
	SV (2)			
SV (0)	SV (1)	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ 0 & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ 0 & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$	$x_3 = 0 \rightarrow \begin{cases} \sigma_{23} = 0 \\ \sigma_{33} = 0 \end{cases}$
	P (2)			

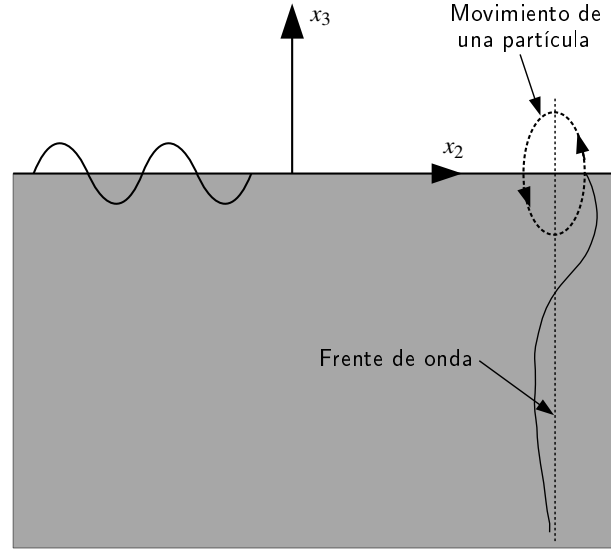


**Tabla 2.6:** Amplitudes de la onda incidente y las ondas reflejadas

Onda incidente	Onda/s reflejada/s	Condiciones de contorno	Amplitudes
SH (0)	SH (1)	$x_3 = 0 \rightarrow \{ \sigma_{13} = 0$	$A_{SH}^{(0)} = A_{SH}^{(1)} = 1$
P (0)	P (1) SV (2)	$x_3 = 0 \rightarrow \begin{cases} \sigma_{23} = 0 \\ \sigma_{33} = 0 \end{cases}$	$A_P^{(0)} = 1$ $A_P^{(1)} = \frac{\kappa^2 \sin(2\theta_0) \sin(2\theta_2) - \cos^2(2\theta_2)}{\kappa^2 \sin(2\theta_0) \sin(2\theta_2) + \cos^2(2\theta_2)}$ $A_{SV}^{(2)} = \frac{2\kappa \sin(2\theta_0) \cos(2\theta_2)}{\kappa^2 \sin(2\theta_0) \sin(2\theta_2) + \cos^2(2\theta_2)}$
SV (0)	SV (1) P (2)	$x_3 = 0 \rightarrow \begin{cases} \sigma_{23} = 0 \\ \sigma_{33} = 0 \end{cases}$	$A_{SV}^{(0)} = 1$ $A_{SV}^{(1)} = \frac{\kappa^2 \sin(2\theta_0) \sin(2\theta_2) - \cos^2(2\theta_2)}{\kappa^2 \sin(2\theta_0) \sin(2\theta_2) + \cos^2(2\theta_2)}$ $A_P^{(2)} = \frac{\kappa \sin(4\theta_0)}{\kappa^2 \sin(2\theta_0) \sin(2\theta_2) + \cos^2(2\theta_2)}$

### 2.7.1.2 Ondas de Rayleigh

Se estudia en este apartado la existencia de ondas de Rayleigh (ondas superficiales) en el caso de ondas planas que se propagan en la dirección del eje  $x_2$  (ver figura 2.5).



**Figura 2.5:** Propagación y movimiento de una partícula provocado por una onda de Rayleigh

Para este tipo de ondas el desplazamiento decae de manera exponencial con la profundidad. Las componentes del campo de desplazamientos provocado por una onda de esta naturaleza que se propaga en la dirección positiva del eje  $x_2$  con una velocidad  $c$  y un número de onda  $k = \omega/c$  se define como

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 \\ u_2 &= A e^{b x_3} e^{i k (c t - x_2)} \\ u_3 &= B e^{b x_3} e^{i k (c t - x_2)} \end{aligned} \quad (2.101)$$

Las expresiones no nulas del campo de desplazamientos definido por las expresiones (2.101) son el resultado del producto de dos exponenciales. Para valores positivos de  $b$ , el primer exponencial  $e^{b x_3}$  posee un exponente negativo (el valor de la coordenada  $x_3$  es siempre negativa tal y como se han definido los ejes), lo cual implica que la amplitud de la onda disminuye con la profundidad. El segundo exponencial  $e^{i k (c t - x_2)}$  representa una onda que se propaga con velocidad  $c$  en la dirección positiva del eje  $x_2$ .

Para este problema, debe verificarse la ecuación de gobierno del problema. Por tanto, se sustituyen en la ecuación de Navier (2.6) las componentes no nulas del campo de desplazamientos ( $u_2, u_3$ ) dado por las expresiones (2.101). Se obtiene de esta manera un sistema de dos ecuaciones cuyas incógnitas son  $A$  y  $B$ . Para que dicho sistema tenga solución distinta de la trivial, el determinante del sistema debe ser uno. Se trata por tanto de un problema de autovalores que determina los valores de  $b$  que conducen a una solución no trivial. La ecuación característica de dicho sistema se escribe a continuación como

$$[b^2 \mu - k^2 (\lambda + 2\mu) + \rho \omega^2] [b^2 (\lambda + 2\mu) - k^2 \mu + \rho \omega^2] - [i b k (\lambda + \mu)]^2 = 0 \quad (2.102)$$

Dividiendo dicha ecuación característica entre  $\rho$  y teniendo en cuenta las siguientes identidades

$$c_S^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad ; \quad c_P^2 = \left( \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right) \quad ; \quad c_P^2 - c_S^2 = \left( \frac{\lambda + \mu}{\rho} \right) \quad ; \quad \omega^2 = k^2 c^2 \quad (2.103)$$

la ecuación (2.102) puede escribirse como

$$b^4 c_S^2 c_P^2 + b^2 [k^2 c_S^2 (c^2 - c_S^2) + k^2 c_P^2 (c^2 - c_P^2) + k^2 (c_P^2 - c_S^2)] + k^4 (c^2 - c_P^2) (c^2 - c_S^2) = 0 \quad (2.104)$$

De las cuatro soluciones de esta última ecuación, sólo se toman las raíces positivas debido a la necesidad de que el parámetro  $b$  sea positivo para que la amplitud disminuya con la profundidad y se cumpla la realidad física del problema. Estas dos raíces positivas son

$$b_1^2 = k^2 \left( 1 - \frac{c^2}{c_S^2} \right) \quad ; \quad b_2^2 = k^2 \left( 1 - \frac{c^2}{c_P^2} \right) \quad (2.105)$$

debiendo cumplirse además que la velocidad de propagación  $c$  de este tipo de ondas sea menor que la velocidad  $c_S$  de las ondas S y por tanto menor que la velocidad  $c_P$  de las ondas P, esto es,  $c < c_S < c_P$ . Sustituyendo estas dos raíces (2.105) en la primera de las ecuaciones de Navier que da lugar a la ecuación característica (2.102) se obtienen dos expresiones que relacionan las amplitudes de las dos ondas involucradas y que se escriben a continuación como

$$\left( \frac{B}{A} \right)_1 = -\frac{ik}{b_1} \quad ; \quad \left( \frac{B}{A} \right)_2 = \frac{b_2}{ik} \quad (2.106)$$

A la vista del desarrollo podemos concluir que para que exista solución al problema debe darse una relación entre las amplitudes  $A$  y  $B$  que depende de los valores de  $b$ . De esta forma, el campo de desplazamientos para este tipo de ondas que satisface la ecuación de gobierno se define como

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 \\ u_2 &= [A_1 e^{b_1 x_3} + A_2 e^{b_2 x_3}] e^{ik(ct-x_2)} \\ u_3 &= \left[ -\frac{ik}{b_1} A_1 e^{b_1 x_3} + \frac{b_2}{ik} A_2 e^{b_2 x_3} \right] e^{ik(ct-x_2)} \end{aligned} \quad (2.107)$$

Para definir completamente los desplazamientos es necesario determinar el valor de las amplitudes  $A_1$  y  $A_2$  así como el número de onda  $k$ . Para ello se deben aplicar las condiciones de contorno en términos de tensiones nulas a la cota de la superficie libre del semiespacio ( $x_3 = 0$ ). A través del campo de desplazamientos y aplicando la ecuación de compatibilidad (2.1) y posteriormente haciendo uso de la ley de comportamiento (2.3) se obtienen respectivamente el tensor de deformaciones  $\varepsilon_{ij}$  y el tensor de tensiones  $\sigma_{ij}$ , los cuales se escriben a continuación

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ 0 & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad ; \quad \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ 0 & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (2.108)$$

Las condiciones de contorno a aplicar para  $x_3 = 0$  en términos de los elementos de tensor de tensiones son  $\sigma_{23} = 0$  y  $\sigma_{33} = 0$ . Con esto se obtiene un sistema de dos ecuaciones tal que

$$\begin{aligned}(2 - \gamma_S)A_1 + 2(1 - \gamma_P)^{1/2}(1 - \gamma_S)^{1/2}A_2 &= 0 \\ 2A_1 + (2 - \gamma_S)A_2 &= 0\end{aligned}\quad (2.109)$$

cumpléndose que

$$\frac{k^2}{b_1^2} = \frac{1}{1 - \gamma_S} \quad ; \quad \frac{b_2^2}{k^2} = 1 - \gamma_P \quad (2.110)$$

y siendo  $\gamma_S = c^2/c_S^2$  y  $\gamma_P = c^2/c_P^2$ .

Para que exista solución distinta de la trivial para  $A_1$  y  $A_2$ , el determinante del sistema (2.109) debe ser nulo. Nuevamente se trata de un problema de autovalores en los que la ecuación característica es

$$(2 - \gamma_S)^2 - 4 \left(1 - \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \gamma_S\right)^{1/2} (1 - \gamma_S)^{1/2} = 0 \quad (2.111)$$

teniendo en cuenta la relación  $\gamma_P = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \gamma_S$ . La solución de esta ecuación característica conduce al valor de  $\gamma_S$ , y por tanto a la velocidad de propagación  $c$  si se conocen las propiedades del medio.

Por otro lado, a través de la segunda de las ecuaciones del sistema (2.109) se encuentra la siguiente relación entre  $A_1$  y  $A_2$

$$A_2 = - \left( \frac{2}{2 - \gamma_S} \right) A_1 \quad (2.112)$$

Si introducimos esta relación en el campo de desplazamientos dado por (2.107), éste finalmente queda como

$$\begin{aligned}u_1 &= 0 \\ u_2 &= A_1 \left( e^{b_1 x_3} - \frac{2}{2 - \gamma_S} e^{b_2 x_3} \right) e^{ik(ct - x_2)} \\ u_3 &= A_1 \left( -\frac{ik}{b_1} e^{b_1 x_3} - \frac{b_2}{ik} \frac{2}{2 - \gamma_S} e^{b_2 x_3} \right) e^{ik(ct - x_2)}\end{aligned}\quad (2.113)$$

Es posible encontrar un paralelismo entre las expresiones del campo de desplazamientos provocado por una onda de Rayleigh y la expresión (2.100) del campo de desplazamientos provocado por ondas P y S. Si se comparan la expresión general del campo dado por (2.100) con el campo de desplazamientos (2.113) obtenido para una onda de Rayleigh, en lo que respecta a los vectores  $\mathbf{d}^{(j)}$  y  $\mathbf{s}^{(j)}$ , que contienen respectivamente los cosenos directores de la dirección de los desplazamientos y la dirección de propagación, se puede escribir

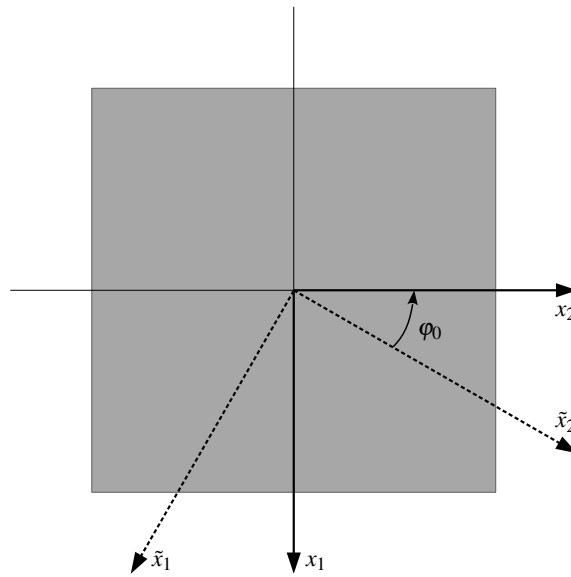
$$\begin{aligned}\mathbf{d}^{(0)} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{ik}{b_1} \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{d}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{b_2}{ik} \end{bmatrix} \\ \mathbf{s}^{(0)} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{ib_1}{k} \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{s}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{ib_2}{k} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (2.114)$$

Es evidente la naturaleza compleja en la dirección del eje  $x_3$  de estos vectores.

### 2.7.1.3 Extensión de las expresiones bidimensionales al problema general en 3 dimensiones

La formulación planteada hasta este momento permite tener en cuenta una onda con incidencia genérica contenida en el plano  $x_2x_3$ . Sin embargo, no se refleja en ella la posible incidencia contenida en cualquier otro plano. Se muestra en este apartado la implementación de esa posibilidad.

En la figura 2.6 se puede observar una representación del sistema de ejes empleado y de la relación existente entre los ejes en los que se ha abordado el problema hasta el momento, denominados en adelante  $(\tilde{x}_2\tilde{x}_3)$  y los nuevos ejes genéricos  $(x_2x_3)$  donde  $(x_3 = \tilde{x}_3)$



**Figura 2.6:** Relación entre los ejes  $(\tilde{x}_2\tilde{x}_3)$  y  $(x_2x_3)$ . Ángulo  $\varphi_0$ .

Definiendo un conjunto de vectores unitarios en la dirección de los tres ejes cartesianos del problema inicial  $(\tilde{\mathbf{i}}_1, \tilde{\mathbf{i}}_2, \tilde{\mathbf{i}}_3)$  y otro  $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$  en dirección de los nuevos ejes, se puede demostrar que existe entre ellos la siguiente relación

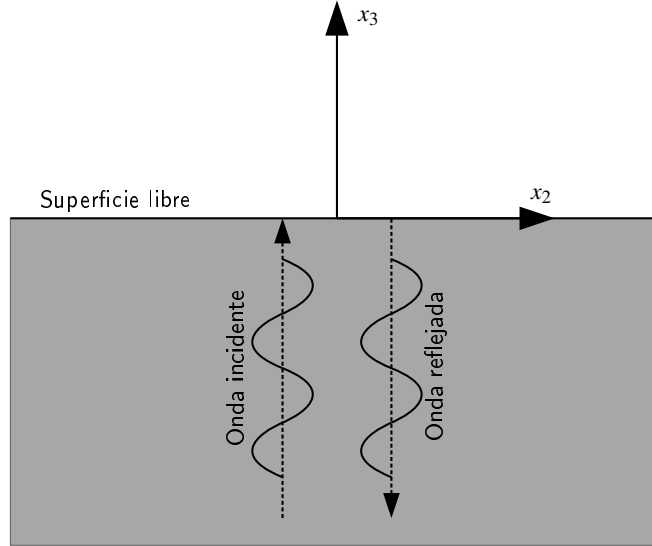
$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_2 \\ \mathbf{i}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_0) & \sin(\varphi_0) & 0 \\ -\sin(\varphi_0) & \cos(\varphi_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{i}}_1 \\ \tilde{\mathbf{i}}_2 \\ \tilde{\mathbf{i}}_3 \end{bmatrix} \quad (2.115)$$

La matriz que relaciona el conjunto de vectores unitarios del sistema de ejes inicial con el del sistema  $x_1x_2x_3$  se denomina matriz de rotación y se denotará como  $\mathbf{R}$ . De esta forma cualquier vector escrito respecto al sistema de referencia anterior  $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$  puede escribirse en el nuevo sistema  $(x_1, x_2, x_3)$  premultiplicando por dicha matriz  $\mathbf{R}$ . Se muestran a continuación los vectores que están afectados por el cambio de ejes coordenados

$$\mathbf{u} = \mathbf{R}\tilde{\mathbf{u}} \quad ; \quad \mathbf{d}^{(j)} = \mathbf{R}\tilde{\mathbf{d}}^{(j)} \quad ; \quad \mathbf{s}^{(j)} = \mathbf{R}\tilde{\mathbf{s}}^{(j)} \quad ; \quad \mathbf{r} = \mathbf{R}\tilde{\mathbf{r}} \quad (2.116)$$

### 2.7.2 Semiespacio poroelástico

Se presentan en este apartado las expresiones del campo de desplazamientos y tensiones que provoca un tren de ondas que se propaga a través del semiespacio poroelástico. Se estudiarán en este caso ondas de tipo S y P con incidencia vertical (ver figura 2.7), motivo por el cual únicamente se refleja una única onda del mismo tipo que la incidente.



**Figura 2.7:** Onda incidente y reflejada en dirección vertical en un semiespacio poroelástico.

#### 2.7.2.1 Onda tipo S vertical

Se supone una onda plana transversal S con incidencia vertical contenida en el plano  $x_2x_3$  propagándose, a través de un semiespacio continuo, lineal y homogéneo de tipo poroelástico, en dirección del eje  $x_3$  y produciendo desplazamientos en la dirección de  $x_2$ . Al llegar a la superficie libre del semiespacio se refleja una onda del mismo tipo que se propaga en la misma dirección pero en sentido contrario (ver figura 2.7). Teniendo en cuenta la contribución de la onda incidente y reflejada, las componentes del campo de desplazamientos  $\mathbf{u}_I$  que se produce sobre el esqueleto sólido se puede escribir como

$$\begin{aligned} (u_1)_I &= 0 \\ (u_2)_I &= A_{\text{inc}} e^{-ik_S x_3} + A_{\text{ref}} e^{ik_S x_3} \\ (u_3)_I &= 0 \end{aligned} \quad (2.117)$$

siendo  $A_{\text{inc}}$  y  $A_{\text{ref}}$  las amplitudes de la onda incidente y reflejada respectivamente,  $k_S$  el número de onda e  $i$  la unidad imaginaria. El campo de desplazamientos en la fase fluida  $\mathbf{U}_I$  se puede obtener teniendo en cuenta las expresiones (2.28b), (2.32) y (2.34), así las componentes del mismo se escriben como

$$\begin{aligned}
 (U_1)_I &= 0 \\
 (U_2)_I &= -\frac{\hat{\rho}_{12}}{\hat{\rho}_{22}} (u_2)_I = -\frac{\hat{\rho}_{12}}{\hat{\rho}_{22}} \left( A_{\text{inc}} e^{-ik_S x_3} + A_{\text{ref}} e^{ik_S x_3} \right) \\
 (U_3)_I &= 0
 \end{aligned} \tag{2.118}$$

Por tanto, falta sólo determinar las amplitudes de la ondas incidente y reflejada para definir completamente el campo de desplazamientos. Para ello se aplican las condiciones de contorno en la superficie libre del semiespacio ( $x_3 = 0$ ). El tensor de deformaciones se obtiene a partir del campo de desplazamientos del esqueleto sólido a través de la ecuación de compatibilidad (2.8) y se escribe como

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{23} \\ 0 & \varepsilon_{32} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.119}$$

siendo la expresión de los términos no nulos del tensor la siguiente

$$\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \frac{1}{2} i k_S \left( -A_{\text{inc}} e^{-ik_S x_3} + A_{\text{ref}} e^{ik_S x_3} \right) \tag{2.120}$$

El tensor de tensiones sobre el esqueleto sólido se obtiene haciendo uso de la expresión de la ley de comportamiento (2.14a), la cual, teniendo en cuenta que se trata de una onda equivoluminal ( $e = \varepsilon = 0$ ), queda como  $\tau_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij}$ . Se ve de manera obvia según la expresión (2.14b) que para este tipo de ondas la tensión en el fluido  $\tau$  es nula. Los términos no nulos del tensor de tensiones son por tanto

$$\tau_{23} = \tau_{32} = i\mu k_S \left( -A_{\text{inc}} e^{-ik_S x_3} + A_{\text{ref}} e^{ik_S x_3} \right) \tag{2.121}$$

Una vez obtenido el tensor de tensiones podemos aplicar la condición en términos de tensión libre en la superficie libre del semiespacio, esto es,  $\tau_{23} = 0$  para  $x_3 = 0$ . Aplicando esta condición de contorno en (2.121) se obtiene que

$$-A_{\text{inc}} + A_{\text{ref}} = 0 \quad \rightarrow \quad A_{\text{inc}} = A_{\text{ref}} \tag{2.122}$$

Ahora, para establecer el valor de estas amplitudes se puede plantear la condición de contorno en términos de desplazamientos de dos maneras. Una de ellas es considerando como unitario el desplazamiento del esqueleto sólido  $(u_2)_I = 1$  en la superficie libre ( $x_3 = 0$ ). Aplicando esto en la expresión (2.117) y teniendo en cuenta (2.122) se obtiene

$$A_{\text{inc}} = A_{\text{ref}} = \frac{1}{2} \tag{2.123}$$

Por otro lado, puede considerarse como unitario un desplazamiento promedio  $(\tilde{u}_2)_I$  del esqueleto sólido y la fase fluida que se expresa como  $(\tilde{u}_2)_I = (1 - \phi)(u_2)_I + \phi(U_2)_I$ . Aplicando la condición de contorno  $(\tilde{u}_2)_I = 1$  para  $x_3 = 0$ , teniendo en cuenta las expresiones (2.117), (2.118), la relación entre las amplitudes (2.122) y operando se llega a que

$$A_{\text{inc}} = A_{\text{ref}} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \phi \left( 1 + \frac{\hat{\rho}_{12}}{\hat{\rho}_{22}} \right)} \quad (2.124)$$

### 2.7.2.2 Onda tipo P vertical

Se vio en la sección 2.3.2 que al aplicar el operador divergencia sobre las ecuaciones de gobierno (2.16) y considerando una onda armónica plana con incidencia vertical contenida en el plano  $x_2x_3$ , se resolvía un problema de autovalores y autovectores, que evidenciaba la existencia de dos ondas de tipo P o dos modos de vibración. Una de ellas se denomina onda de primer tipo (P1) con una velocidad de propagación  $c_{P1}$ , mayor que la de la otra, llamada onda de segundo tipo (P2), con una velocidad de propagación  $c_{P2}$ . Ambas velocidades de propagación son los autovalores del problema y daban lugar, cada una, respectivamente, a los autovectores que definen los modos para la onda P1 ( $\mathbf{D}_u^{P1}, \mathbf{D}_U^{P1}$ ) y la onda P2 ( $\mathbf{D}_u^{P2}, \mathbf{D}_U^{P2}$ ). Se dijo también que el amortiguamiento es mucho mayor para la onda P2, por lo que ésta se atenúa rápidamente y sólo se detecta en las proximidades de la perturbación (fuente lejana). Los autovectores del modo P1 se calculan sustituyendo (2.45) en (2.29) y considerando  $k_P = k_{P1}$ . Después de resolver el sistema se obtienen los valores de ( $\mathbf{D}_u^{P1}, \mathbf{D}_U^{P1}$ ), los cuales se muestran a continuación

$$\mathbf{D}_u^{P1} = (1 + 0i) \quad ; \quad \mathbf{D}_U^{P1} = \frac{k_{P1}^2 \left( \lambda + 2\mu + \frac{\mathcal{Q}^2}{R} \right) - \omega^2 \hat{\rho}_{11}}{\omega^2 \hat{\rho}_{12} - k_{P1}^2 \mathcal{Q}} \quad (2.125)$$

Con todo esto, si consideramos una onda plana longitudinal de tipo P con incidencia vertical que se propaga a través de una semiespacio continuo, lineal, homogéneo y poroelástico, la cual está contenida en el plano  $x_2x_3$  y se propaga en dirección  $x_3$ , ésta se refleja en una onda P que se propaga en la misma dirección pero sentido contrario (ver figura 2.7). El campo de desplazamientos que produce la contribución de la onda incidente y reflejada sólo tiene componente en la dirección del eje  $x_3$ . Como se ha dicho anteriormente, la onda P2 se amortigua rápidamente y no se considera ya que es fácil demostrar que una onda incidente de tipo P1 se refleja sólo en una onda del mismo tipo. Teniendo en cuenta por tanto sólo el modo P1, la componente vertical del campo de desplazamientos de la fase sólida y fluida pueden escribirse respectivamente como

$$(u_3)_I = \mathbf{D}_u^{P1} \left( A_{\text{inc}}^{P1} e^{-ik_{P1}x_3} + A_{\text{ref}}^{P1} e^{ik_{P1}x_3} \right) \quad (2.126a)$$

$$(U_3)_I = \mathbf{D}_U^{P1} \left( A_{\text{inc}}^{P1} e^{-ik_{P1}x_3} + A_{\text{ref}}^{P1} e^{ik_{P1}x_3} \right) \quad (2.126b)$$

siendo  $A_{\text{inc}}^{P1}$  y  $A_{\text{ref}}^{P1}$  las amplitudes de la onda incidente y reflejada respectivamente,  $k_{P1}$  el número de onda e  $i$  la unidad imaginaria.

Para determinar las amplitudes de las ondas incidente y reflejada es necesario aplicar condiciones de contorno. Para ello se obtiene primero el tensor de deformaciones sobre el esqueleto sólido a través de la ecuación de compatibilidad (2.8) y que queda como

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (2.127)$$



El único término no nulo  $\varepsilon_{33}$  del tensor de tensiones representa además la dilatación volumétrica  $e$  de la fase sólida. La dilatación volumétrica de ambas fases se obtiene a través de las expresiones (2.9a) que para este caso se escriben como

$$e = \mathbf{D}_u^{P1} i k_{P1} \left( -A_{\text{inc}}^{P1} e^{-i k_{P1} x_3} + A_{\text{ref}}^{P1} e^{i k_{P1} x_3} \right) \quad (2.128a)$$

$$\varepsilon = \mathbf{D}_U^{P1} i k_{P1} \left( -A_{\text{inc}}^{P1} e^{-i k_{P1} x_3} + A_{\text{ref}}^{P1} e^{i k_{P1} x_3} \right) \quad (2.128b)$$

Una vez obtenidos el tensor de deformaciones y las dilataciones volumétricas  $e$  y  $\varepsilon$ , a través de la ley de comportamiento (2.14) se obtiene el tensor de tensiones  $\tau_{ij}$  sobre el esqueleto sólido y la tensión equivalente en el fluido  $\tau$ . Las siguientes expresiones representan los términos no nulos del tensor de tensiones y la tensión equivalente en el fluido

$$\tau_{11} = \left( \lambda + \frac{Q^2}{R} \right) e + Q \varepsilon \quad (2.129a)$$

$$\tau_{22} = \left( \lambda + \frac{Q^2}{R} \right) e + Q \varepsilon \quad (2.129b)$$

$$\tau_{33} = \left( \lambda + \frac{Q^2}{R} + 2\mu \right) e + Q \varepsilon \quad (2.129c)$$

$$\tau = Q e + R \varepsilon \quad (2.129d)$$

Las condiciones de contorno para este problema están dados en términos de la tensión  $\tau_{33}$  y la tensión equivalente en el fluido  $\tau$ , ambas nulas a la cota de la superficie libre del semiespacio poroelástico. Por tanto, particularizando (2.128a) para  $x_3 = 0$  y sustituyendo en (2.129c) y (2.129d) se pueden escribir las siguientes ecuaciones

$$\tau_{33}(x_3 = 0) = i k_{P1} \left[ \left( \lambda + \frac{Q^2}{R} + 2\mu \right) \mathbf{D}_u^{P1} + Q \mathbf{D}_U^{P1} \right] (-A_{\text{inc}}^{P1} + A_{\text{ref}}^{P1}) = 0 \quad (2.130a)$$

$$\tau(x_3 = 0) = i k_{P1} (Q \mathbf{D}_u^{P1} + R \mathbf{D}_U^{P1}) (-A_{\text{inc}}^{P1} + A_{\text{ref}}^{P1}) = 0 \quad (2.130b)$$

Es evidente que para que ambas ecuaciones se cumplan la relación entre las amplitudes de la onda incidente y reflejada debe ser

$$-A_{\text{inc}}^{P1} + A_{\text{ref}}^{P1} = 0 \quad \rightarrow \quad A_{\text{inc}}^{P1} = A_{\text{ref}}^{P1} \quad (2.131)$$

Ahora, igual que para el caso de las ondas transversales con incidencia vertical, para determinar el valor de las amplitudes se puede plantear la condición de contorno en términos de desplazamientos de dos maneras. Por un lado considerando unitario el desplazamiento vertical del esqueleto sólido  $(u_3)_I = 1$  a la cota de la superficie ( $x_3 = 0$ ), o bien por contra considerando el desplazamiento vertical promedio  $(\tilde{u}_3)_I = (1 - \phi)(u_3)_I + \phi(U_3)_I$  como unitario para  $x_3 = 0$ . La primera de las consideraciones conduce a que

$$A_{\text{inc}}^{P1} = A_{\text{ref}}^{P1} = \frac{1}{2} \quad (2.132)$$

mientras que si se considera  $(\tilde{u}_3)_I = 1$  se obtiene que

$$A_{\text{inc}}^{\text{P1}} = A_{\text{ref}}^{\text{P1}} = \frac{1}{2} \frac{1}{(1 - \phi) \mathbf{D}_u^{\text{P1}} + \phi \mathbf{D}_U^{\text{P1}}} \quad (2.133)$$

# Capítulo 3

## Caso práctico de estudio: respuesta dinámica y sísmica. Importancia de la evaluación real de la rigidez estructural

### 3.1 Introducción

El análisis de la respuesta dinámica de una estructura másica con poca esbeltez, parcial o totalmente enterrada, históricamente se ha realizado asumiendo la hipótesis de rigidez infinita de ésta. Se encuadran en esta tipología estructuras tales como cimentaciones, pozos de cimentación, silos, reactores, etc... En concreto, las estructuras embebidas se consideran como rígidas cuando la relación entre la profundidad del embebimiento y el ancho es menor a 2, 3 ó 4, dependiendo del autor y la aplicación [Myl01a, VAG09], por tanto muchas de estas estructuras han sido diseñadas siguiendo dicha hipótesis de rigidez.

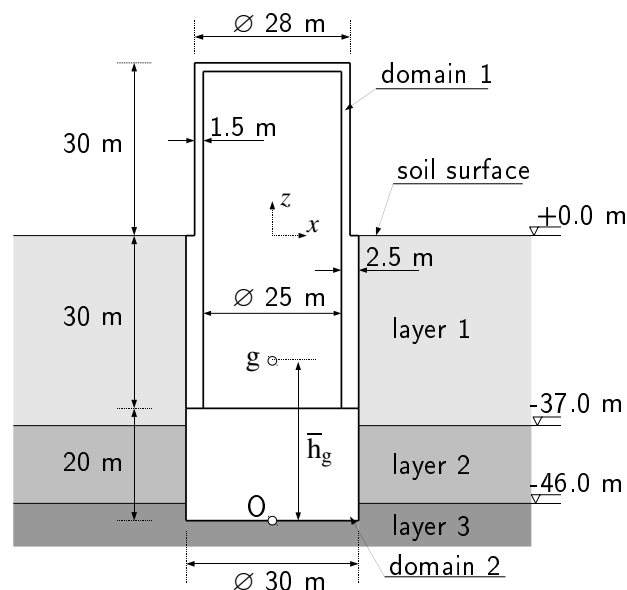
Este capítulo muestra el estudio de la respuesta sísmica de una estructura real de grandes dimensiones, la cual está enterrada en gran parte de su longitud total. La relación entre la longitud de embebimiento y el ancho de la estructura es menor a 2, aproximadamente 1.7, por lo que debe ser considerada como poco esbelta, siendo ésta una tipología estructural analizada tradicionalmente a través del método de los tres pasos. Para dicho estudio se utiliza el método de elementos de contorno expuesto en el capítulo 2 anterior, con el objetivo principal de comparar la respuesta a través de dos metodologías, una de subestructuración, basada en la hipótesis de rigidez infinita de la estructura, y otra directa, en la que por contra se considera un valor finito más realista para la rigidez estructural.

El estudio del problema de aplicación que aquí se presenta tiene como objetivo, no sólo mostrar el uso del método de los elementos de contorno en un problema de interacción suelo-estructura, sino también realizar un estudio de las consecuencias que puede provocar en la estimación de la respuesta sísmica del sistema la hipótesis de rigidez infinita de la estructura. Esto último se analizará comparando los resultados obtenidos a través de dos metodologías diferentes, una de ellas considerando la estructura como perfectamente rígida (método de los 3 pasos) y otra asumiendo la verdadera flexibilidad de la misma (metodología directa). Se determinará en el dominio de la frecuencia el desplazamiento en varios puntos de la estructura normalizados con el desplazamiento de campo libre del terreno. Dichos resultados serán posteriormente transformados al dominio del tiempo usando la transformada de Fourier.

Primero se describe el problema a analizar y se revisan de manera breve el método de los tres pasos y la metodología directa. Finalmente se presentan de manera comparativa los resultados obtenidos usando ambas metodologías. Se mencionarán no sólo aspectos importantes de los resultados finales, sino también de algunos resultados parciales. Los resultados muestran que asumir comportamiento de sólido rígido para la estructura puede infravalorar la respuesta de la misma. El método de los elementos de contorno se utiliza en la aplicación de ambas metodologías.

## 3.2 Descripción del problema

La figura 3.1 muestra la descripción geométrica de la estructura a estudiar, junto con la estratigrafía del emplazamiento. Ésta es de hormigón y casi cilíndrica de 80 metros de longitud, cuyos 50 metros inferiores están embebidos en el terreno. El diámetro exterior de la parte no embebida es de 28 metros. En la parte enterrada se han añadido los muros de excavación, resultando en un diámetro exterior de 30 metros. Los 20 metros inferiores de la estructura están compuestos por un gran número de forjados y rigidizadores que la dotan de una alta rigidez en esa zona. Es por ello que esta parte inferior, definida como dominio 2, (el dominio 1 corresponde al resto de la estructura) ha sido considerada maciza con la misma rigidez del hormigón pero con una densidad equivalente, de manera que no se modifican los valores inerciales de la estructura. La tabla 3.1 muestra los valores de las propiedades de los dominios de la estructura y terreno, siendo  $\mu$  el módulo de rigidez transversal,  $\nu$  el coeficiente de Poisson,  $\rho$  la densidad,  $\xi$  el coeficiente de amortiguamiento y  $c_s$  la velocidad de propagación de la onda S. La masa total de la estructura  $M = 61.3 \cdot 10^6$  kg, el momento de inercia  $I_g = 3.51 \cdot 10^{10}$  kg·m<sup>2</sup> y la distancia desde la base al centro de gravedad  $h_g = 28.36$  m. La citada estructura es parte de una gran instalación industrial y en su interior se encuentran dispositivos sensibles, como pueden ser una unidad de bombeo o una grúa, que pueden verse seriamente afectados durante un terremoto. Es por esta razón que parte del análisis sísmico se centrará en las frecuencias naturales de estos dispositivos, estimadas en torno a 3.89, 7.69 y 12.05 Hz.



$$M = 61.3 \cdot 10^6 \text{ kg} ; I_g = 3.51 \cdot 10^{10} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 ; h_g = 28.36 \text{ m}$$

Figura 3.1: Descripción geométrica de la estructura.

El suelo en el que se encuentra embebida la estructura está compuesto por tres estratos. El

Tabla 3.1: Propiedades elásticas de la estructura y el terreno

	domain 1	domain 2	soil layer 1	soil layer 2	soil layer 3
$\nu$	0.2	0.2	0.3	0.3	0.3
$\xi$	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	2685.85	2253.42	2000	2100	2200
$\mu$ (N/m <sup>2</sup> )	$1.15 \cdot 10^{10}$	$1.15 \cdot 10^{10}$	$5 \cdot 10^8$	$1.029 \cdot 10^9$	$2.2 \cdot 10^9$
$c_s$ (m/s)	2069.23	2259.06	500	700	1000

primero es una formación de arcillas rígidas que llega a 37 metros de profundidad. El segundo está formado por conglomerados y tiene 9 metros de espesor. Finalmente, el estrato inferior es un semiespacio de roca sedimentaria detrítica muy consolidada. La determinación de las propiedades que caracterizan el terreno se llevó a cabo a partir de ensayos de campo de tipo estático. A partir de éstos y utilizando correlaciones y reglas empíricas bien establecidas [Ish96, SI70], se estimaron las velocidades de propagación de la onda S y el módulo de elasticidad transversal. Para encontrar, entre varios posibles (todos compatibles con las pruebas de campo), el perfil de terreno más conservador se realizó un análisis de sensibilidad. Después de definir los acelerogramas de diseño a cota de la superficie libre, los correspondientes espectros de aceleraciones fueron obtenidos a la cota de -50 metros (usando SHAKE [SLS72] para obtener los acelerogramas a dicha cota). El perfil de terreno mostrado en la figura 3.2 fue finalmente elegido ya que con éste se obtuvieron los valores más conservadores en el rango de frecuencias de interés en relación a los dispositivos alojados en la estructura. Todos los resultados mostrados se basan en este perfil. La tabla 3.1 incluye también las propiedades que caracterizan los diferentes estratos que componen el terreno.

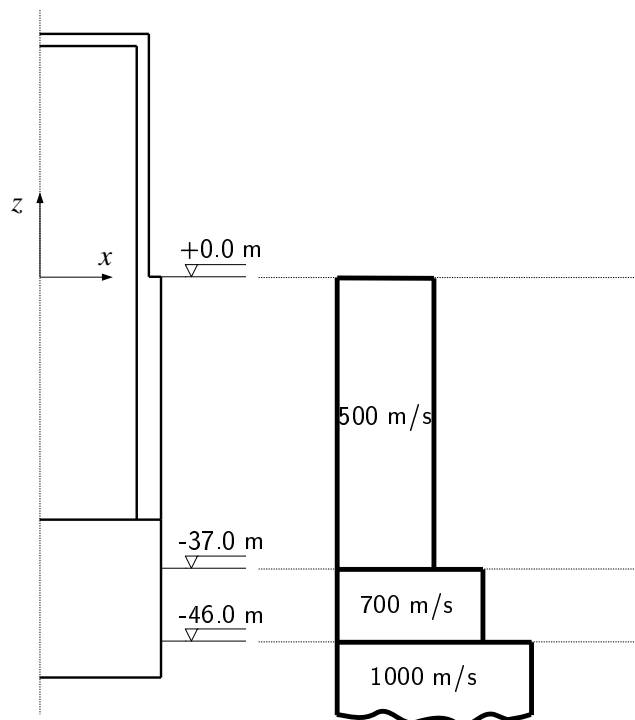


Figura 3.2: Perfil de velocidades de onda del terreno.

El objetivo del estudio dinámico es establecer el movimiento en puntos de la estructura coherente con un campo de desplazamientos conocido del terreno. Éste último ha sido definido a partir del espectro de respuesta mostrado en la figura 3.3a, para un pico de aceleración del suelo

### 3 Caso práctico de estudio. Importancia de la rigidez estructural

igual a 0.17 g y 10 s de duración convencional. Con el fin de darle sentido estadístico, se han generado tres señales diferentes usando SIMQKE [Gas76] y luego se han modulado usando el esquema representado en la figura 3.3b [JHT68]. Los acelerogramas horizontales obtenidos son mostrados en la figura 3.4, mientras que los correspondientes espectros de respuesta son representados en la figura 3.5 junto con el espectro de respuesta de diseño.

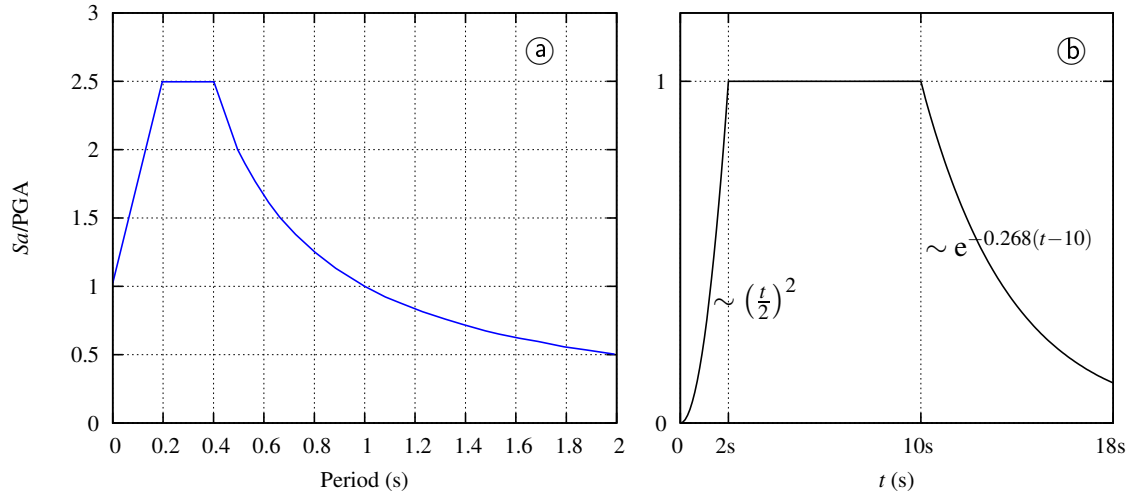


Figura 3.3: (a) Espectro de respuesta de diseño en aceleraciones, (b) Esquema de modulación.

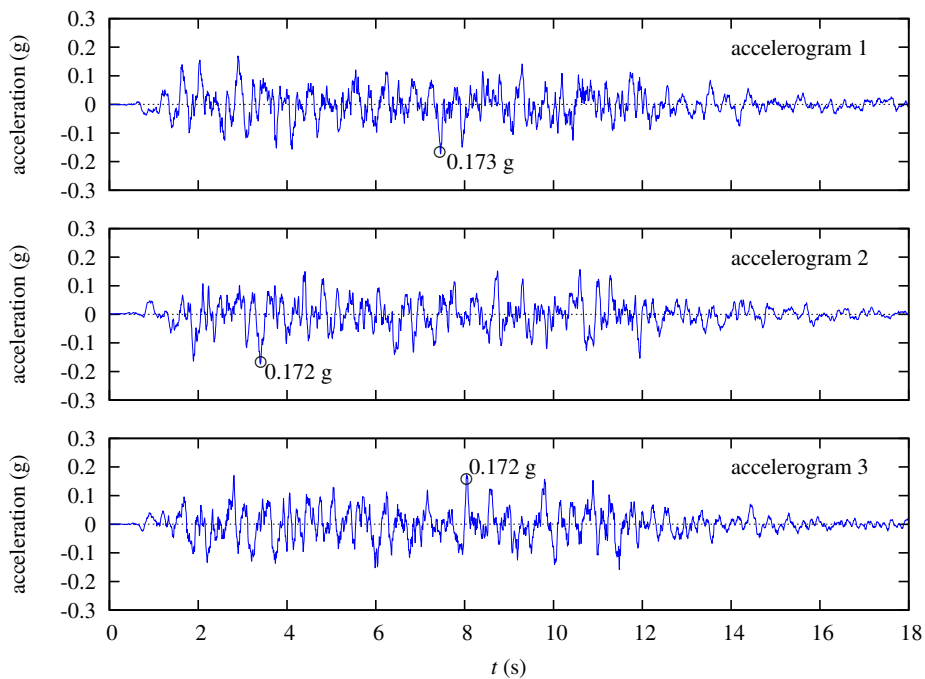


Figura 3.4: Acelerogramas horizontales

### 3.3 Metodología

Una vez que la geometría de la estructura, la estratigrafía del terreno y la acción sísmica han sido definidas, se estudiará la respuesta del sistema usando dos metodologías: en una de ellas se admitirá la hipótesis de rigidez infinita de la estructura y se llevará a cabo a través del método de los tres pasos; por contra en la otra se considerará la verdadera rigidez de la estructura a partir de las propiedades definidas en el apartado anterior y se ejecutará mediante el estudio directo acoplado de todo el sistema suelo-estructura (ver figura 3.6). El objetivo es obtener

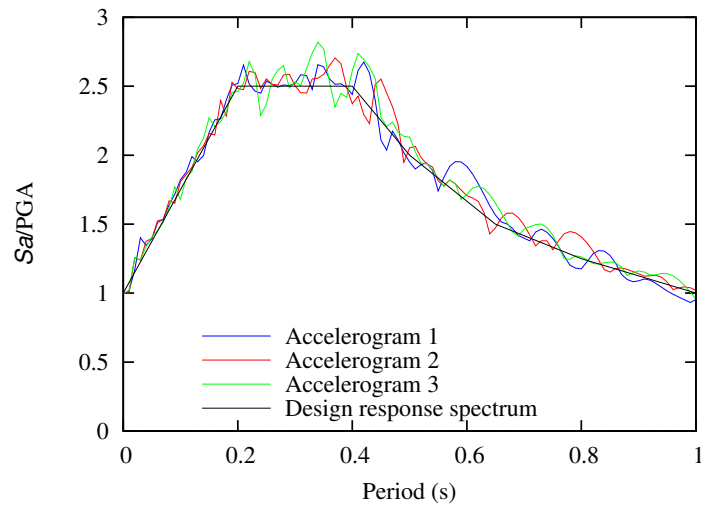


Figura 3.5: Espectro de respuesta en aceleraciones de campo libre

simultáneamente la respuesta en la superficie y en puntos de la estructura considerando como excitación una onda plana S con incidencia vertical.

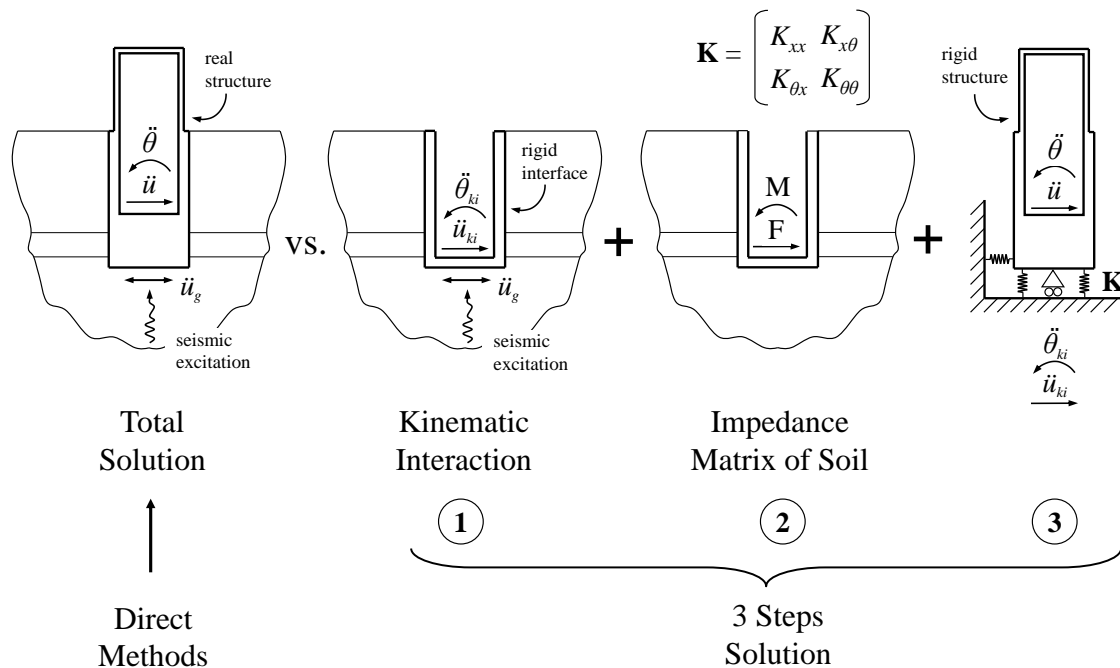


Figura 3.6: Método directo vs. método de los tres pasos

El método de los tres pasos es una estrategia de subestructuración que se basa en la hipótesis de rigidez infinita de la estructura y que permite obtener la respuesta de la misma siguiendo un procedimiento dividido en tres pasos [KR74, KWME78]: i) obtención de los factores de interacción cinemática; ii) obtención de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento; y finalmente iii) estimación de la respuesta inercial (ver figura 3.6).

Otra alternativa es el uso de los método directos, los cuales son capaces de modelar simultáneamente el terreno y la estructura. Por tanto permiten tener en cuenta de manera más rigurosa la interacción entre los diferentes elementos. Se ha usado como técnica numérica para este ejemplo el método de elementos de contorno, cuya formulación ha sido presentada previamente en el capítulo anterior, y cuyas características para tratar el análisis dinámico de regiones no acotadas, como son los estratos del terreno, hacen recomendable su aplicación para el problema que se presenta.

Cuando se aplica el método de los tres pasos, habitualmente se usan expresiones simplificadas existentes en la bibliografía para estimar los factores de interacción cinemática y las funciones de impedancia [MNG06, KWME78, Aba84]. Estas aproximaciones están disponibles para gran variedad de problemas en función del grado de embebimiento y las propiedades del terreno. Sin embargo, no hay disponibles expresiones lo suficientemente precisas para el perfil del terreno de este problema. Es por ello que el método de elementos de contorno se ha usado también para establecer los coeficientes de interacción cinemática y las impedancias del terreno, lo cual se corresponde respectivamente con los pasos primero y segundo del método de subestructuración.

Usando el método de elementos de contorno para resolver el problema siguiendo una aproximación directa, o para obtener los factores de interacción cinemática e impedancias en el caso de aplicar subestructuración, todos los dominios que definen la geometría del problema (estratos y muros de hormigón) se modelan como regiones lineales, homogéneas, isótropas y lineales asumiendo condiciones soldadas entre los diferentes dominios. Las figuras 3.7 y 3.16 muestran respectivamente las mallas de elementos de contorno usadas para los problemas de subestructuración (pasos 1 y 2) y la aproximación directa. Se aprecia que el código permite el uso de elementos cuadráticos triangulares (6 nodos) y cuadriláteros (9 nodos). Esta geometría en particular presenta problemas de esquina, los cuales son resueltos por medio de la estrategia de colocación no nodal [Dom93, Azn02] que permite además el uso de mallas no conformes. El tamaño de los elementos debe ser más pequeño que la mitad de la longitud de onda a la mayor frecuencia (25 Hz) según cada región del problema, aunque en general, los parámetros de la malla, como son el número de elementos y la extensión de la superficie libre, han sido fijados a través de la convergencia, para diferentes mallas, de las variables de interés. Destacar también que aunque en las figuras se muestre tres cuartos de la geometría, solo es necesario discretizar un cuarto de la geometría total, ya que el código es capaz de tener en cuenta las propiedades de simetría del problema. Los detalles del código de elementos de contorno usado puede consultarse en [MAD02, MAD04, MAG05].

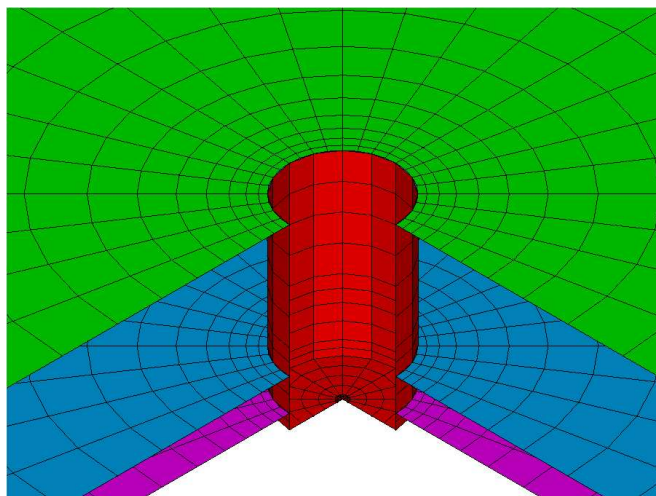
Los dos siguientes subapartados muestran respectivamente los factores de interacción cinemática y las impedancias del terreno. Estos resultados serán utilizados posteriormente en el subapartado 3.6 para obtener la respuesta dinámica de la estructura resolviendo el paso de interacción inercial del mencionado método de subestructuración. Finalmente, en el subapartado 3.7, se resuelve el problema siguiendo el método directo de manera que se modelan simultáneamente todas las regiones y se presentan los resultados comparados con los obtenidos con el método de los tres pasos.

## 3.4 Interacción cinemática

Suponiendo una onda de tipo S con incidencia vertical como excitación, se han calculado los desplazamientos y giros de la estructura considerando ésta infinitamente rígida y sin masa. La resolución de este tipo de problema es bien conocida [Roe77], así como su aproximación mediante el método de elementos de contorno [Dom93, ÁRBSSA05]. La figura 3.7 muestra la malla de elementos de contorno usada. La superficie libre y las interfases entre estratos están

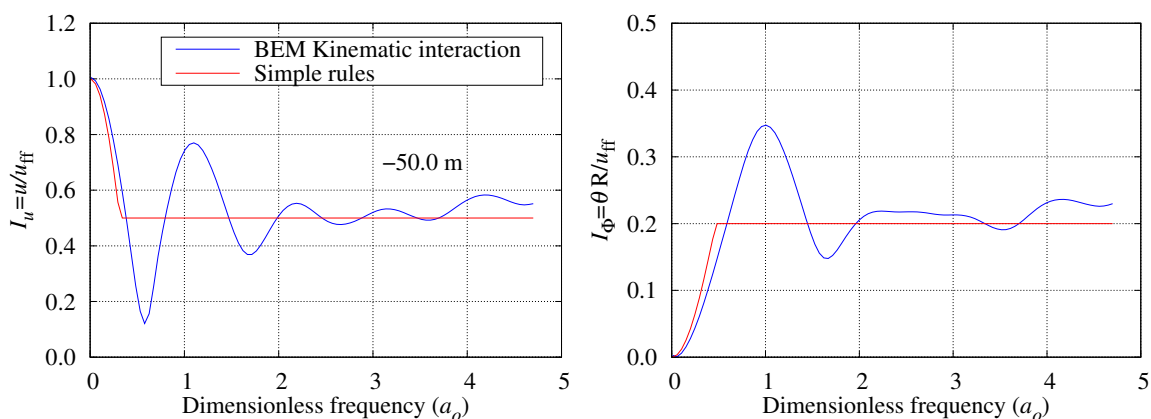


señaladas con diferentes colores. La interfase rígida entre el terreno y la estructura se muestra coloreada en rojo.



**Figura 3.7:** Malla de elementos de contorno usada para los problemas de interacción cinemática y de impedancias

En la figura 3.8 se presentan los valores absolutos de los factores de interacción cinemática en términos de traslaciones  $I_u = u/u_{ff}$  y rotaciones  $I_\phi = \theta R/u_{ff}$ , siendo  $u$  y  $\theta$  el desplazamiento horizontal y el giro de la base de la estructura,  $R$  el radio y  $u_{ff}$  el desplazamiento horizontal de la superficie libre del terreno. El eje horizontal de las gráficas mide la frecuencia adimensional  $a_o = \omega R/c_s$ , siendo  $\omega$  la frecuencia de la excitación y  $c_s$  la velocidad de propagación de la onda en el estrato superior (500 m/s). Los resultados obtenidos con el método de elementos de contorno se presentan junto con las funciones de transferencia calculadas con las expresiones propuestas por [EMR77] para suelos homogéneos (ver también [KWME78, MNG06]). Se observa que la concordancia es buena entre ambos a frecuencias bajas y altas, mientras que se aprecian diferencias entre los valores 0.4 y 2.0 de frecuencia adimensional. Estas diferencias suponen un impacto significativo en la evaluación sísmica debido que los elementos clave hospedados en la estructura tienen su frecuencia fundamental dentro de este rango. Es por ello que sólo los factores de interacción cinemática calculados a través del método de elementos de contorno serán utilizados en el apartado 3.6.



**Figura 3.8:** Factores de interacción cinemática en la base de la estructura considerando como excitación una onda S con incidencia vertical.

### 3.5 Muelles y amortiguadores equivalentes. Impedancias del terreno

El segundo paso en el método subestructuración es la obtención de las impedancias del terreno (ver figura 3.6). Existen en la bibliografía funciones de impedancia para una amplia variedad de casos [Wol85, Dom93, MNG06]. Sin embargo, para esta configuración en particular no están disponibles tales funciones. Es por ello que los coeficientes de rigidez y amortiguamiento horizontales y de giro han sido obtenidos usando el ya mencionado código de elementos de contorno, considerando un movimiento prescrito de la interfase entre la estructura y el terreno en forma de desplazamientos horizontales o giros, ambos unitarios y armónicos. Para cada frecuencia se obtienen las impedancias por integración de las tensiones en la interfase. Debido a que el giro de la estructura produce tensiones horizontales en las paredes del cilindro, y de manera recíproca, desplazamientos horizontales producen un momento en la base, las impedancias horizontales y de giro están acopladas. El término de acoplamiento gana mayor importancia cuanto más profunda es la longitud de embebimiento de la estructura.

Las funciones de impedancia pueden ordenarse en una matriz de rigidez  $\mathbf{K}$ , la cual relaciona el vector de fuerzas  $\mathbf{F}$  aplicadas en el centro de la base con el vector de movimiento  $\mathbf{u}$  de la forma  $\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{u}$  y que puede ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} F \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{x\theta} \\ K_{\theta x} & K_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

donde cada término  $K_{lm}$  depende de la frecuencia adimensional  $a_o$  y representa la fuerza (o el momento) aplicado en la base de la estructura necesario para obtener un desplazamiento (o giro) unitario. Como las fuerzas y los momentos están desfasados, los términos  $K_{lm}$  son valores complejos de la forma:

$$K_{lm} = k_{lm} + i a_o c_{lm} \quad (3.2)$$

siendo  $k_{lm}$  y  $c_{lm}$  los coeficientes de rigidez y amortiguamiento respectivamente.

La figura 3.9 muestra las funciones de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento, obtenidas con la discretización mostrada en la figura 3.7, y normalizadas usando el módulo de rigidez transversal del estrato superior y el radio de la parte enterrada de la estructura. Un hecho a destacar es que las frecuencias de resonancia asociadas a la deformación transversal en los dos estratos superiores no se aprecian en estas funciones de impedancia. Esto se debe al hecho de que los modos transversales relacionados con dichas frecuencias no son excitados porque la parte enterrada traspasa los estratos y no produce ondas verticales de tipo S significativas.

### 3.6 Interacción inercial. Respuesta dinámica de la estructura

Una vez obtenidos los factores de interacción cinemática y las funciones de impedancias, se puede obtener la respuesta dinámica de la estructura en un tercer paso bajo la hipótesis de rigidez infinita de ésta. Así, las ecuaciones para un cuerpo rígido que gobiernan el comportamiento dinámico de la estructura pueden escribirse en el dominio de la frecuencia como:

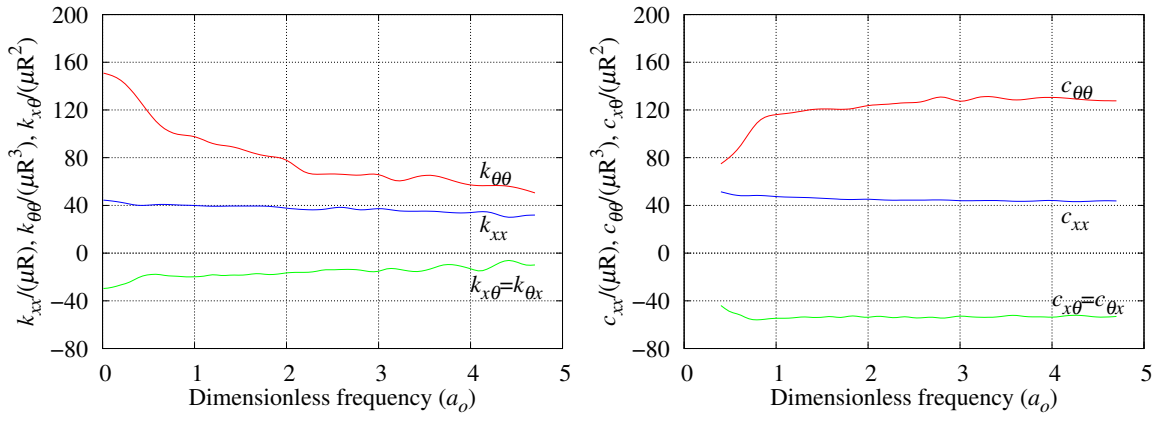


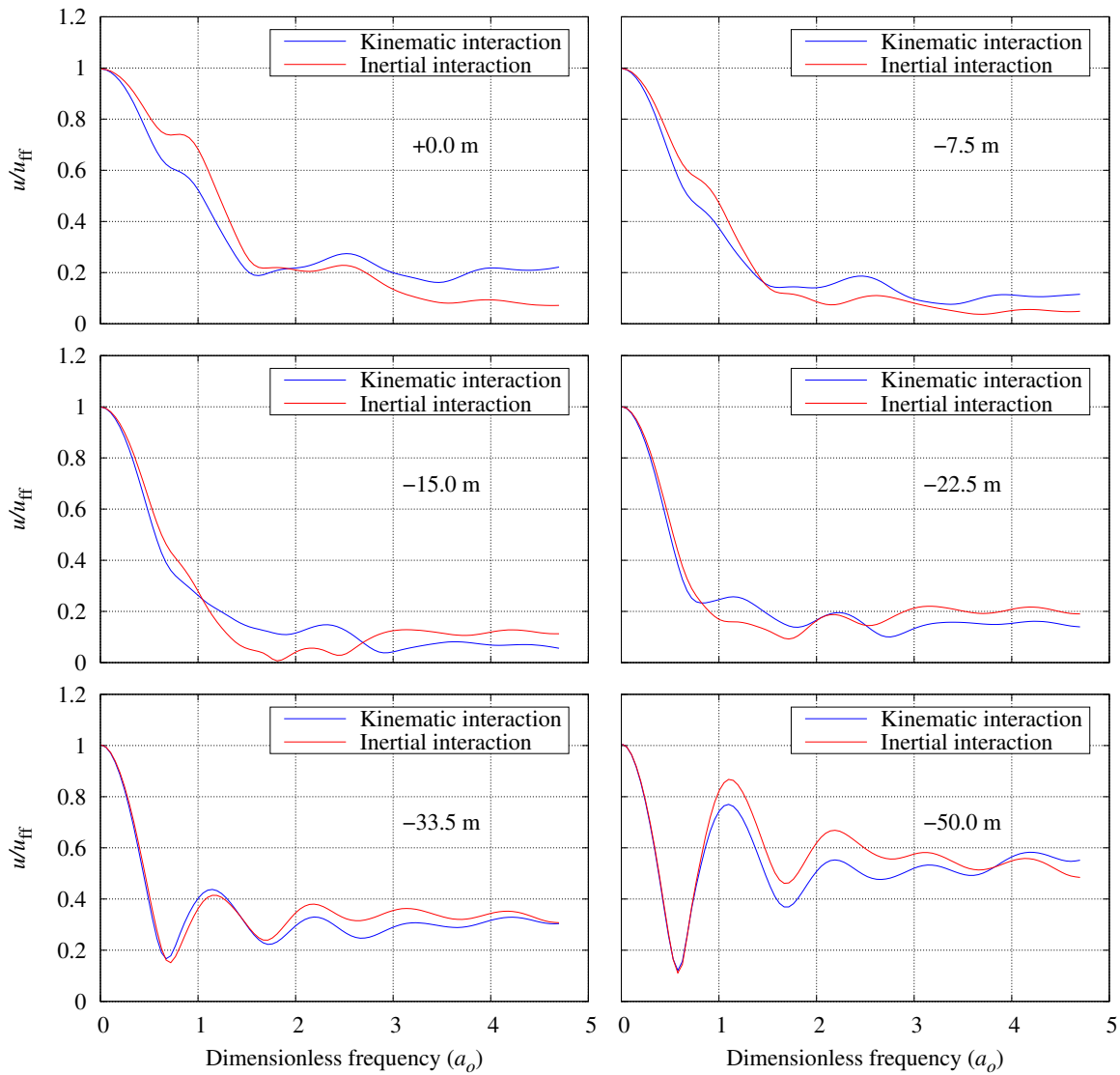
Figura 3.9: Coeficientes de rigidez y amortiguamiento para el caso horizontal y de giro

$$\begin{bmatrix} K_{xx} - \omega^2 M & K_{x\theta} + \omega^2 M \bar{h}_g \\ K_{xx} \bar{h}_g + K_{\theta x} & K_{x\theta} \bar{h}_g + K_{\theta\theta} - \omega^2 I_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{x\theta} \\ K_{xx} \bar{h}_g + K_{\theta x} & K_{x\theta} \bar{h}_g + K_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{ki} \\ \theta_{ki} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

donde  $u$  y  $\theta$  son respectivamente el desplazamiento horizontal y el giro de la base de la estructura;  $u_{ki}$  y  $\theta_{ki}$  representan el desplazamiento horizontal y el giro debido a la excitación sísmica y han sido obtenidos de los factores de interacción cinemática.  $\bar{h}_g$  es la altura del centro de gravedad de la estructura medida desde la base (ver figura 3.1). El sistema de ecuaciones 3.3 se resuelve numéricamente para cada frecuencia obteniéndose así la respuesta de la estructura como un cuerpo rígido en términos del desplazamiento horizontal  $u$  y el giro  $\theta$ . El coste de resolver dicho sistema, una vez obtenidos los factores de interacción cinemática y las funciones de impedancia, es muy bajo. Este hecho permite realizar análisis paramétricos y estudiar, a bajo coste, la influencia de los diferentes aspectos en la respuesta final, siendo una de las ventajas de utilizar el método de los tres pasos.

La figura 3.10 muestra la respuesta dinámica de la estructura, obtenida haciendo uso del método de subestructuración, en función de la frecuencia adimensional  $a_o$ . Se representan también los factores de interacción cinemática del desplazamiento horizontal, obtenidos en el apartado 3.4, con el fin de determinar la importancia relativa de la interacción cinemática y la interacción inercial en la respuesta final del sistema. En ambos casos, las funciones de transferencia relacionan el desplazamiento horizontal  $u$  del punto considerado de la estructura con el desplazamiento de campo libre en la superficie libre  $u_{ff}$ . Bajo la hipótesis de rigidez infinita, los desplazamientos en cualquier punto de la estructura pueden ser obtenidos fácilmente, por lo que se muestran resultados para 6 valores distintos de profundidad. Por lo mostrado en la figura 3.10, se observa que la presencia de la estructura filtra una parte importante de la señal sísmica, principalmente para valores de frecuencia adimensional  $a_o \geq 2$ .

Para ilustrar los efectos del filtrado, la figura 3.11 muestra los registros de las aceleraciones evaluados al nivel de la superficie libre (+0.0 m) y a la cota de la base de la estructura (-50.0 m) cuando el sistema es excitado por el primer acelerograma de diseño (ver figura 3.4). Estos registros se obtuvieron como la transformada inversa de Fourier del producto entre las funciones de respuesta en frecuencia del paso 3 (interacción inercial) y la transformada discreta de Fourier del acelerograma 1, usando para ello el algoritmo de la transformada rápida de Fourier. El acelerograma 1 de campo libre se presenta también en la figura 3.11 como referencia. Se puede observar que la señal es filtrada por la presencia de la estructura de manera que el pico de

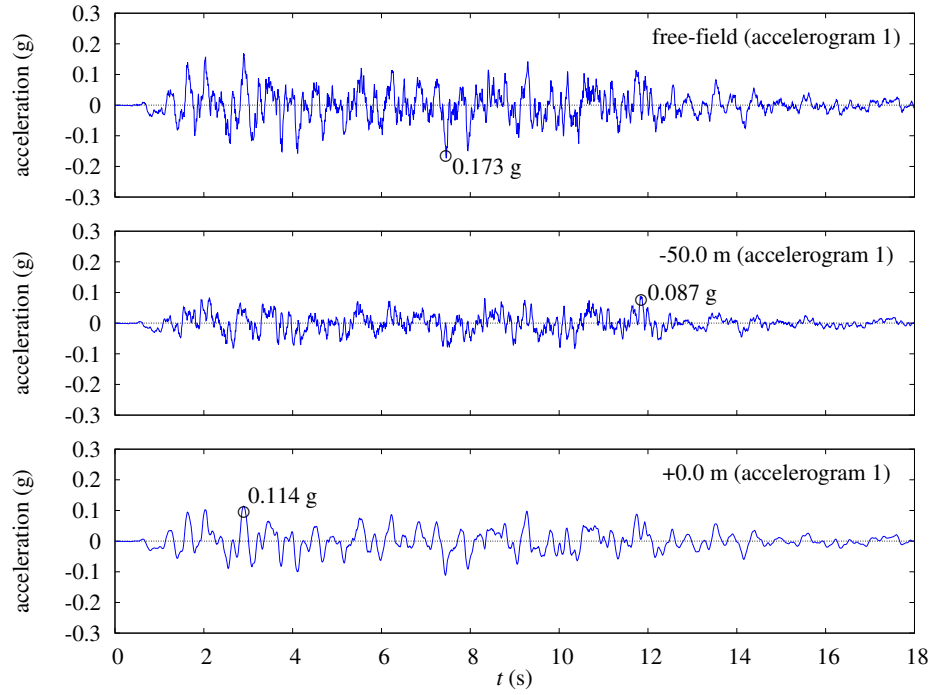


**Figura 3.10:** Funciones de respuesta en frecuencia de los desplazamientos horizontales normalizados del análisis inercial y los factores de interacción cinemática para una onda S con incidencia vertical

aceleración se reduce de 0.173 g a 0.087 g ( $\sim -50\%$ ) a la profundidad de  $-50.0$  m, mientras que la rotación que se induce por el campo de ondas incidente aumenta el pico de aceleración hasta 0.114 g a la cota de superficie libre ( $+0.0$  m). Éste último valor de aceleración es un 35% menor que el pico de aceleración de la señal sísmica en campo libre.

A partir de estas señales filtradas se pueden obtener los espectros de respuesta elásticos a diferentes profundidades como la excitación que sufren sistemas de un grado de libertad colocados a dichas profundidades. En la figura 3.12 se presentan los espectros de respuesta en términos de pseudo-aceleraciones correspondientes a la respuesta obtenida a partir de la interacción inercial (paso 3) junto con la obtenida de la interacción cinemática (paso 1) a diferentes profundidades. También se muestran en todas las gráficas de la figura el espectro de respuesta de diseño y los correspondientes a las señales sísmicas de campo libre a cota de la superficie libre (0.0 m). Todos los resultados en esta figura se muestran como envolventes que incluyen los espectros de los tres acelerogramas presentados en la figura 3.4.

Las figuras 3.10 y 3.12 muestran gran concordancia entre los resultados obtenidos del paso 3 (interacción inercial) o directamente del paso 1 (interacción cinemática), lo que significa que la



**Figura 3.11:** Respuesta estructural a diferentes profundidades de acuerdo a la solución obtenida con el método de los tres pasos y para el acelerograma 1

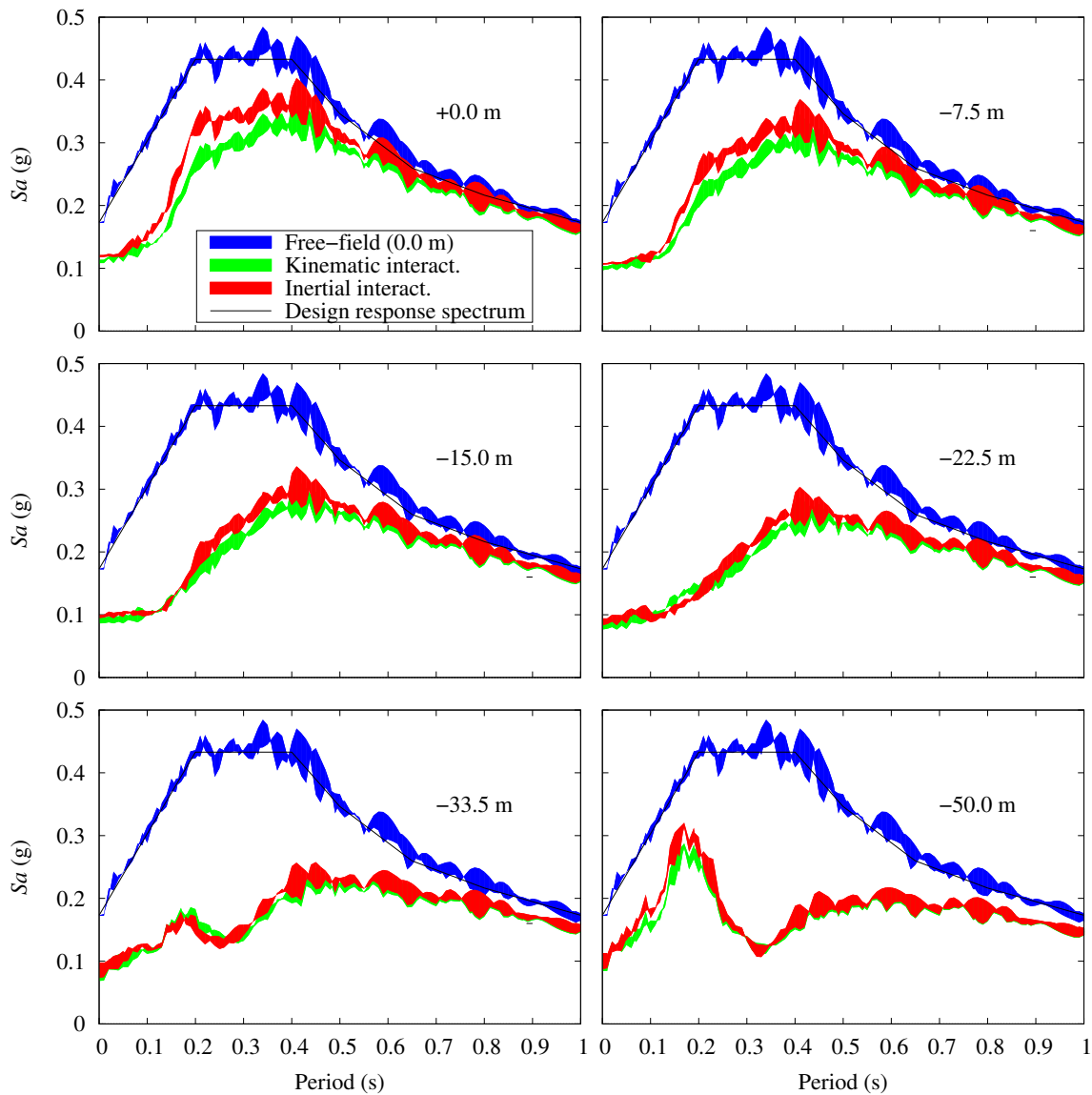
interacción cinemática domina la respuesta dinámica de esta estructura. Para entender mejor este efecto, la ecuación 3.3 se puede reescribir con  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{ki} + \bar{\mathbf{u}}$ , siendo  $\mathbf{u}_{ki}$  el vector de desplazamientos y rotaciones de la base de la cimentación rígida para el problema de interacción cinemática y  $\bar{\mathbf{u}}$  el vector de desplazamientos y giros relativos entre el terreno y la estructura. Este movimiento relativo, responsable de las diferencias entre las interacciones inercial y cinemática, es relativamente pequeño en el rango de frecuencia de interés. Además está estrechamente relacionado con las propiedades de amortiguamiento del sistema, las cuales pueden ser estudiadas en términos de los factores de amortiguamiento  $\zeta$ . Tanto el factor de amortiguamiento horizontal como el de rotación pueden ser estimados a partir de las correspondientes funciones de impedancia como

$$\zeta_x = \frac{\tilde{c}_{xx}}{2\sqrt{M}k_{xx}} \quad ; \quad \tilde{c}_{xx} = \frac{R}{c_{S1}} c_{xx} \quad (3.4)$$

$$\zeta_\theta = \frac{\tilde{c}_{\theta\theta}}{2\sqrt{(I_g + Mh_g^2)}k_{\theta\theta}} \quad ; \quad \tilde{c}_{\theta\theta} = \frac{R}{c_{S1}} c_{\theta\theta} \quad (3.5)$$

En la figura 3.13, donde se representan estos factores de amortiguamiento frente a la frecuencia adimensional. Se observa que la vibración horizontal está sobreamortiguada mientras que la vibración de giro está inframortiguada para  $a_o < 2$ . Esto puede dar explicación al hecho de que la respuesta esté dominada por la interacción cinemática, y también a las mayores diferencias que se observan en puntos a cotas cercanas a la superficie libre, donde el efecto del giro de la estructura tiene mayor importancia.

El hecho de que la interacción inercial y la interacción cinemática sean tan parecidas es interesante, ya que puede implicar en ciertos casos que la interacción cinemática puede ser por sí misma una buena aproximación de la respuesta estructural, pudiendo evitarse el cálculo de las funciones de impedancia y la interacción inercial. A continuación se estudia de manera somera

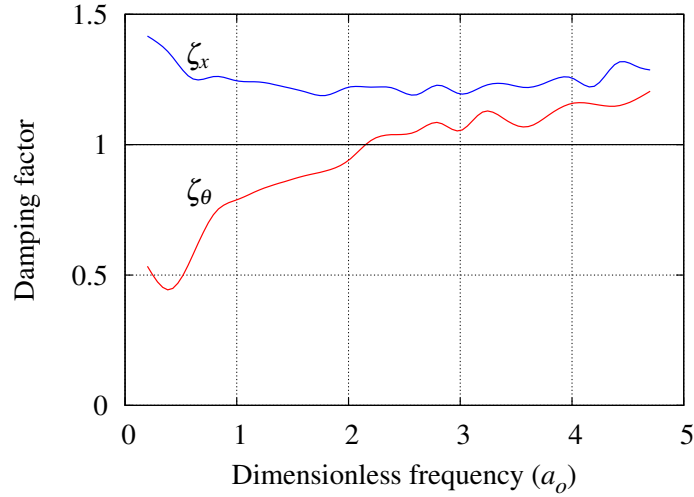


**Figura 3.12:** Envolventes de las respuestas espectrales en términos de pseudo-aceleraciones a diferentes profundidades

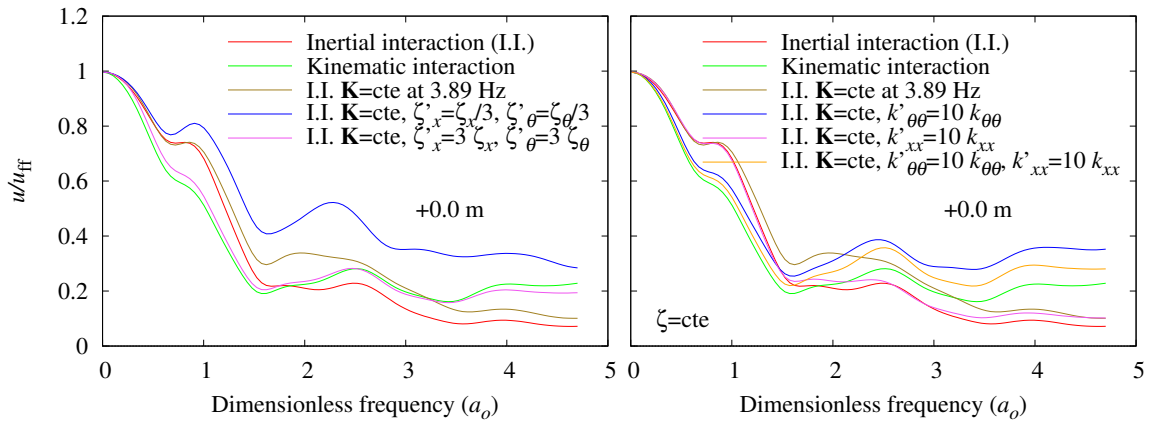
los factores clave que determinan si esta simplificación puede llevarse a cabo.

Con el fin de averiguar la importancia de algunos parámetros, y teniendo en cuenta que las funciones de impedancia (excepto las de giro) son aproximadamente independientes de la frecuencia, se considera el mismo sistema pero tomando los valores rigidez y amortiguamiento independientes de la frecuencia. Dichos valores constantes de las impedancias son aquellos correspondientes al valor de  $a_o = 0.74$ . Ésta es la frecuencia central en el rango  $0 < a_o < 1.5$  de interés, y también la frecuencia natural de uno de los dispositivos sensibles contenidos en la estructura. Para  $a_o = 0.74$  ( $\approx 3.89\text{Hz}$ ), los valores de rigidez y amortiguamiento son:  $k_{xx}/\mu R = 39.0$ ,  $k_{\theta\theta}/\mu R^3 = 104.2$ ,  $k_{x\theta}/\mu R^2 = -17.3$ ,  $c_{xx}/\mu R = 43.8$ ,  $c_{\theta\theta}/\mu R^3 = 96.9$  and  $c_{x\theta}/\mu R^2 = -49.6$ , siendo el valor de  $\mu$  el correspondiente al estrato superior. Las figuras 3.14 y 3.15 muestran respectivamente las funciones de respuesta en frecuencia y los correspondientes espectros para dichos valores de las impedancias. Se observa que en el rango de frecuencias de interés la respuesta del sistema es muy parecida a la obtenida para la interacción inercial considerando las impedancias dependientes de la frecuencia.

Para estudiar si los factores de amortiguamiento son responsables de que la respuesta dinámica



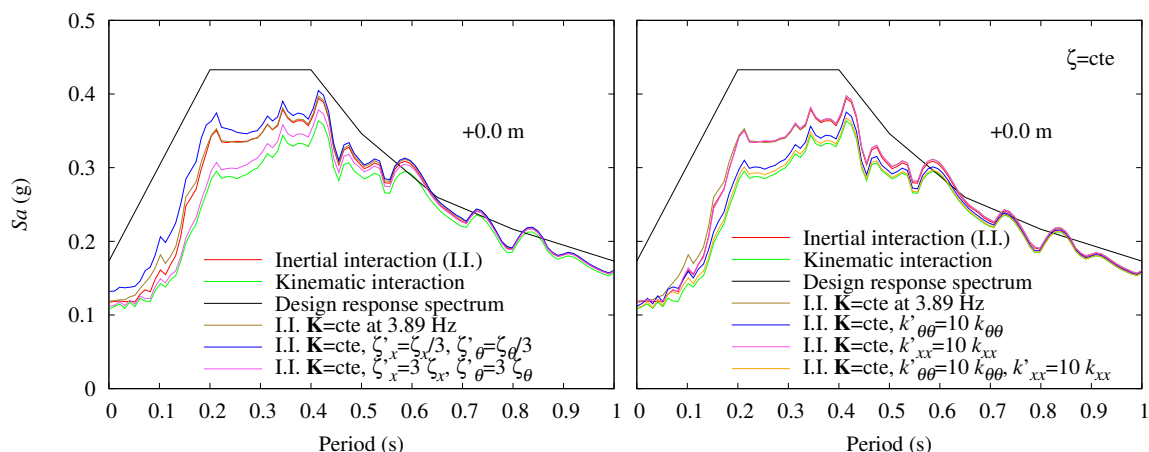
**Figura 3.13:** Factores de amortiguamiento para los modos horizontal y de cabeceo



**Figura 3.14:** Funciones de respuesta en frecuencia para diferentes factores de amortiguamiento (izquierda) y diferentes frecuencias naturales (derecha)

del sistema esté dominada por las factores de interacción cinemática, se ha realizado un estudio paramétrico. La gráfica a la izquierda en la figura 3.14 presenta las funciones de respuesta en frecuencia cuando el coeficiente de amortiguamiento ha sido modificado artificialmente multiplicando por los valores 3 y  $1/3$ . Los correspondientes espectros de respuesta en aceleraciones se pueden ver en la gráfica de la izquierda en la figura 3.15. Como se podía esperar, cuando los factores de amortiguamiento son mucho más pequeños que la unidad la respuesta del sistema es visiblemente diferente a la obtenida considerando sólo los factores de interacción cinemática. Por el contrario, para grandes valores de los factores de amortiguamiento, la respuesta se aproxima mucho a ésta.

Al margen del peso del factor de amortiguamiento, las frecuencias naturales tienen una fuerte influencia en la respuesta dinámica del sistema. La tabla 3.2 resume las frecuencias naturales no amortiguadas del sistema cuando la matriz de rigidez es la correspondiente a la frecuencia  $a_o = 0.74$ . También se muestran tres combinaciones adicionales en las cuales las rigideces horizontal y de giro son multiplicadas, alternativa o simultáneamente, por 10 para incrementar artificialmente las frecuencias naturales del sistema de manera que estén fuera del rango de frecuencias que contiene la mayor parte de la energía de los acelerogramas de diseño ( $0 < a_o < 1.5$ ). Nótese que para la configuración original y cuando sólo la rigidez horizontal está multiplicada por 10 la primera frecuencia natural está dentro de este rango. Por el contrario, cuando la rigidez de giro aumenta ambas frecuencias naturales son mayores que el límite superior del rango. Los efectos de estos cambios se reflejan en las gráficas a la derecha en las figuras 3.14 y 3.15, que presentan



**Figura 3.15:** Envolturas de las respuestas espectrales en términos de pseudo-aceleraciones para diferentes factores de amortiguamiento (*izquierda*) y diferentes frecuencias naturales (*derecha*)

**Tabla 3.2:** Frecuencias naturales del sistema para diferentes configuraciones

	$a_{o1} [f_1 \text{ (Hz)}]$	$a_{o2} [f_2 \text{ (Hz)}]$
$k_{xx}, k_{\theta\theta}$	1.3 [7.0]	3.2 [17.0]
$k_{xx}, 10k_{\theta\theta}$	2.0 [10.6]	7.0 [37.0]
$10k_{xx}, k_{\theta\theta}$	1.4 [7.3]	10.2 [53.9]
$10k_{xx}, 10k_{\theta\theta}$	3.8 [20.4]	11.4 [60.6]

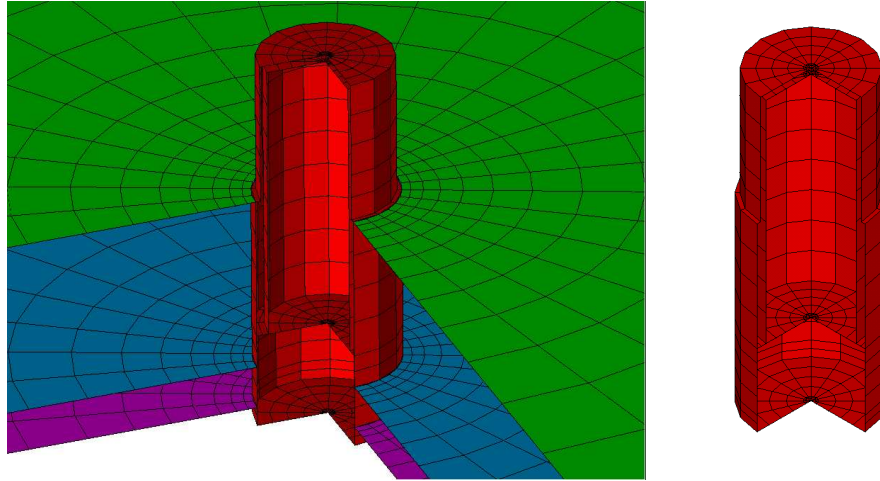
respectivamente las funciones de respuesta en frecuencia y los espectros de respuesta, en los cuales se han mantenido constantes de manera premeditada los factores de amortiguamiento  $\zeta_x$  y  $\zeta_\theta$ . Se puede ver que cuando se aumenta artificialmente sólo la rigidez horizontal la respuesta inercial del sistema permanece casi invariable, sin embargo cuando la rigidez a giro se incrementa la respuesta se acerca mucho a la del problema de interacción cinemática. Esto es debido al hecho de que cuando la rigidez horizontal se incrementa la primera frecuencia natural se ve modificada muy ligeramente y la rotación de la estructura (con gran influencia en el movimiento a +0.0 m) no se altera significativamente. Se concluye que es el comportamiento a giro del sistema suelo-estructura el que domina la respuesta dinámica final.

### 3.7 Método directo. Estructura flexible

Se ha dicho anteriormente que la aproximación por el método de los tres pasos implica la consideración de rigidez infinita de la estructura. Por contra, el uso de un método directo permite un análisis más riguroso para obtener la respuesta del sistema sometido a la excitación sísmica teniendo además en cuenta la verdadera flexibilidad de la estructura. En este caso, el terreno y la estructura son analizados simultáneamente bajo la acción de un campo de ondas S con incidencia vertical usando el código basado en el método de elementos de contorno presentado con anterioridad y usando la malla mostrada en la figura 3.16.

La figura 3.17 muestra las funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento horizontal normalizado en puntos de la estructura a diferentes cotas. Los resultados obtenidos de la aplicación del método directo teniendo en cuenta la verdadera flexibilidad de la estructura se han etiquetado en la leyenda como 'Flexible model'. Los resultados correspondientes al uso de la aproximación por el método de los tres pasos (ya presentados con anterioridad) tienen





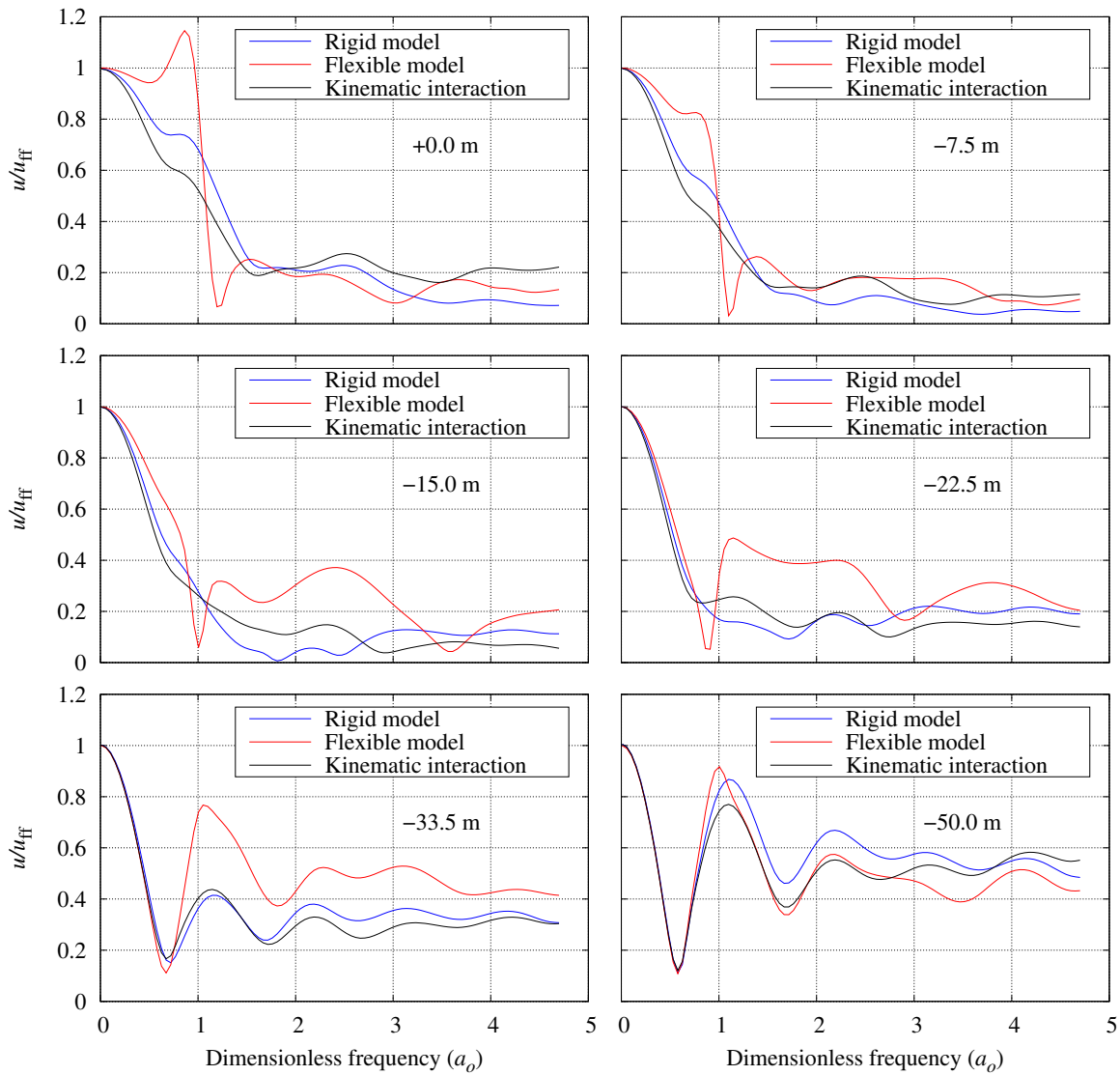
**Figura 3.16:** Malla de elementos de contorno usada para la aproximación directa. Estructura flexible embebida en un terreno estratificado.

la etiqueta 'Rigid model'. Junto con ellos se representan también los resultados obtenidos del problema de interacción cinemática. En general, el hecho asumir la hipótesis de que la estructura se comporta como un cuerpo idealmente rígido produce resultados no satisfactorios, aunque en algunos casos, principalmente para frecuencias altas y en puntos de la base de la estructura, éstos si pueden ser aceptables. Como era de esperar, los efectos de la verdadera flexibilidad de la estructura se manifiestan de manera cada vez más importante con la altura. Las diferencias más notables se producen en puntos cercanos a la superficie libre y para frecuencias inferiores a  $a_o = 1.5$ , mientras que el rango de frecuencias de interés teniendo en cuenta el contenido en frecuencias de los acelerogramas de diseño sigue siendo  $0 < a_o < 1.5$ , lo que afecta casi a todo el contenido en frecuencia de la señal de excitación del suelo.

La influencia en la respuesta entre ambos modelos, rígido y flexible, en la respuesta sísmica de la estructura se ha evaluado también en términos de los espectros elásticos de respuesta. La figura 3.18 muestra dichos espectros en términos de pseudo-aceleraciones por medio de envolventes que corresponden a los tres acelerogramas de diseño utilizados. Se puede ver que los espectros de respuesta para los modelos rígido y flexible son prácticamente coincidentes en la base de la estructura (-50.0 m), pero se aprecian notables diferencias para resto de puntos. En este sentido, incluso a la cota de -33.5 m (puntos pertenecientes a la parte maciza de la estructura) las diferencias son grandes en el rango de periodos entre 0.1 y 0.25 s. En concreto, la respuesta obtenida con el modelo rígido es, para  $T = 0.17$  s, igual a 0.18 g, y con el modelo flexible se obtuvo un valor de 0.29 g (diferencia de aproximadamente el 60 %).

La respuesta de la estructura al nivel de la superficie libre del terreno (+0.0 m) es especialmente interesante. A dicha cota y para periodos mayores a 0.2 s, la presencia de la estructura considerando su verdadera flexibilidad no filtra la señal sísmica de entrada, al contrario que para los resultados obtenidos bajo la hipótesis de rigidez infinita. Por ejemplo para  $T = 0.26$  s (correspondiente a  $f = 3.86$  Hz, una de las frecuencias de interés) las aceleraciones en el espectro llegan a 0.32 g utilizando el modelo rígido y hasta 0.46 g cuando se aplica el modelo flexible, lo que implica una diferencia del 44 %.

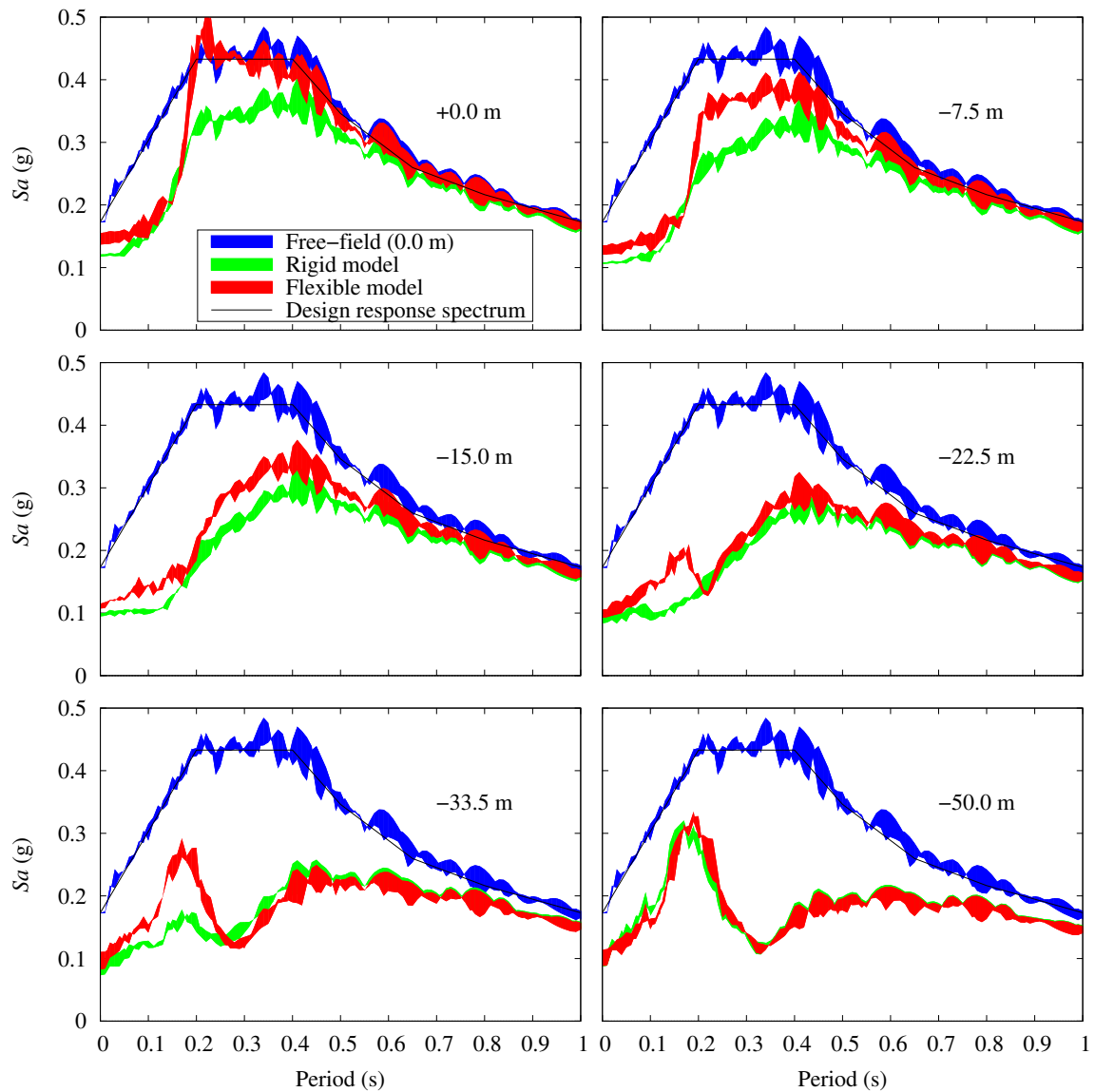
La respuesta sísmica de la estructura puede considerarse como la suma de tres comportamientos: dos movimientos como sólido rígido (giro y desplazamiento horizontal) presente en ambas metodologías; y un tercero asociado solo al deformación a flexión de la estructura. Los resultados presentados en la figura 3.18 dan a entender que la componente correspondiente a la



**Figura 3.17:** Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento horizontal normalizado para diferentes puntos de la reestructura considerando como excitación una onda S con incidencia vertical. Método de los tres pasos (*rigid model*) y método directo (*flexible model*)

deformación no puede ser rechazada en este problema en particular, incluso tratándose de una estructura poco esbelta y con un gran factor de embebimiento [EMR77, SW04]. Por tanto, la hipótesis de rigidez infinita no es válida en este caso.

Del análisis y comparación de los resultados obtenidos con ambos modelos en términos de aceleraciones máximas y tensiones normales a lo largo de la parte embebida de la estructura, se llega a las mismas conclusiones. Las aceleraciones máximas se muestran en la figura 3.19, normalizadas con el pico de aceleración del terreno (PGA), mientras que el pico de las tensiones normales se representan en la figura 3.20, ambas para el acelerograma de diseño 1. Para ambos modelos, las tensiones han sido obtenidas con el método de elementos de contorno haciendo uso de propiedades coherentes para cada uno. Esto último quiere decir que en el caso del modelo flexible ('Flexible model') se han usado las propiedades de rigidez reales de la estructura y para el modelo rígido ('Rigid model') se han usado propiedades de rigidez ficticias que le confieren un comportamiento de sólido rígido. Se observa que los resultados obtenidos considerando la estructura como un sólido rígido subestiman las aceleraciones máximas hasta en un 25 %. En cuanto a las tensiones normales, la flexibilidad de la estructura implica una relajación significativa



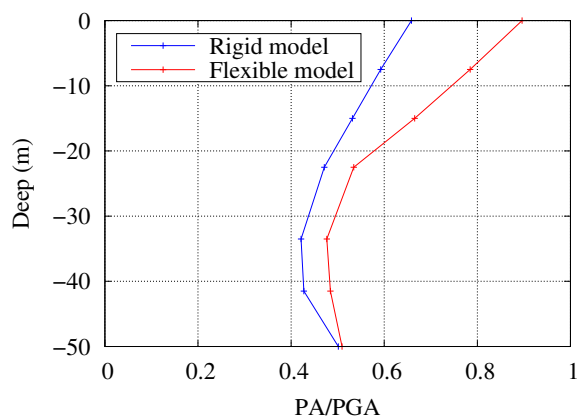
**Figura 3.18:** Espectros de respuesta en términos de pseudo-aceleraciones a diferentes profundidades obtenidos usando la metodología directa (*flexible model*) y el método de los tres pasos (*rigid model*)

de las mismas a lo largo de la interfase entre el terreno y la estructura.

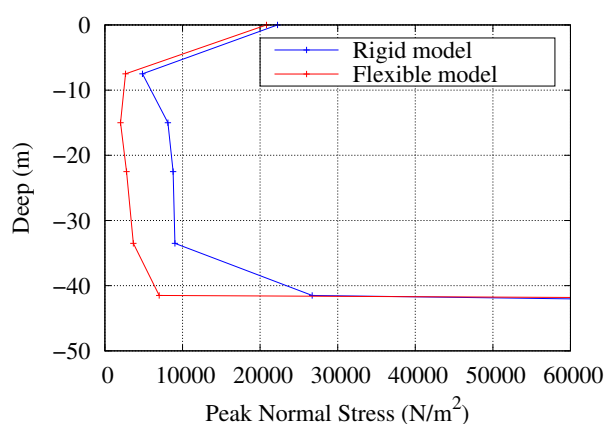
### 3.8 Conclusiones

Se ha realizado el análisis sísmico de una estructura poco esbelta y con una gran porción de embebimiento con el fin de determinar el comportamiento de algunos dispositivos de importancia alojados en ella. Este comportamiento frente a una acción sísmica ha sido obtenido en puntos de la estructura a diferentes cotas en términos de las funciones de respuesta en frecuencia de los desplazamientos y de los espectros de respuesta elástica para las aceleraciones. El principal objetivo del estudio de esta estructura es determinar si la consideración de rigidez infinita de la misma para el análisis de su respuesta permite obtener resultados válidos.

Para tal fin, se ha estudiado la respuesta sísmica de la estructura usando por un lado un método de subestructuración (método de los tres pasos) y por otro una metodología directa. Ambas



**Figura 3.19:** Validación de la hipótesis de rigidez de la estructura. Aceleraciones máximas con la profundidad para el acelerograma 1. Onda S con incidencia vertical



**Figura 3.20:** Validación de la hipótesis de rigidez de la estructura. Tensiones normales máximas con la profundidad para el acelerograma 1. Onda S con incidencia vertical.

metodologías son capaces de tener en cuenta la interacción suelo–estructura, fenómeno de gran importancia en este tipo de problemas, pero con la diferencia de que el método de los tres pasos necesita considerar la estructura como un sólido infinitamente rígido, mientras que el método directo permite considerar su verdadera flexibilidad.

Para el caso práctico estudiado, la respuesta obtenida con ambos métodos muestra notables discrepancias. La consideración de la estructura con comportamiento de sólido rígido arroja resultados que infravaloran las aceleraciones en puntos a diferentes cotas, con diferencias de hasta el 60 %, lo que implica que la deformación a flexión no debe ser obviada en este problema en particular, y por tanto, ésta no debe ser considerada como infinitamente rígida.

Además, se ha mostrado que el análisis realizado por subestructuración ha resultado útil para estudiar el papel de los factores de amortiguamiento y la rigidez a giro en la respuesta sísmica de la estructura. Cuando el valor de los factores de amortiguamiento es grande la interacción cinemática determina en gran medida la estimación de la respuesta estructural hasta el punto de que incluso podría ser usada como una buena aproximación de la respuesta inercial. Esta aproximación es incluso mejor si las frecuencias naturales del sistema no se encuentran dentro del rango del contenido en frecuencia de mayor importancia de la excitación.

El problema estudiado aquí y las conclusiones obtenidas del mismo ponen de manifiesto que la elección de la metodología de cálculo para estos problemas clásicos de interacción suelo–estructura supone un asunto al que debe prestarse la debida atención. Al mismo tiempo, que la evaluación precisa de la rigidez de la estructura es determinante en estos problemas. En el

capítulo próximo se desarrolla una metodología que permite la evaluación directa acoplada (sin necesidad de emplear subestructuración) para problemas que incorporan regiones que por su naturaleza pueden considerarse rígidas, acopladas con suelos (viscoelásticos o poroelásticos) en los que se encuentran alojadas.



# Capítulo 4

## Modelo para el estudio de la influencia de la flexibilidad en la respuesta sísmica de estructuras enterradas poco esbeltas

### 4.1 Introducción

De las conclusiones del caso práctico estudiado en el Capítulo 3, parece derivarse la necesidad de abordar un estudio que permita establecer un marco de criterios prácticos para calibrar la importancia de la consideración de la verdadera flexibilidad de una estructura enterrada en la determinación de su respuesta sísmica. Más aún teniendo en cuenta que en la bibliografía consultada no existen estudios similares y sólo algunas clasificaciones o recomendaciones de carácter general, poco precisas y no justificadas que establecen un rango de esbelteces para el comportamiento rígido o flexible de este tipo de estructuras (ver p.e. Gerolymos y Gazetas [GG06] ó Varun et al. [VAG09]). Sí es cierto que pueden consultarse algunos trabajos en esta línea pero centrados en el problema de impedancias (Mylonakis [Myl01a] ó Saitoh y Watanabe [SW04]).

Se pretende en este capítulo presentar y desarrollar un estudio paramétrico sobre este aspecto del problema. De forma concreta, el objetivo será cuantificar el error cometido en la obtención de la respuesta sísmica de la estructura si se hace uso de un modelo que considere a dicha estructura como un sólido infinitamente rígido. Se consigue con ello presentar un criterio de utilidad para la práctica ingenieril en el ámbito. Así, dependiendo de la geometría de la estructura, sus propiedades mecánicas y las propiedades del suelo en el que está enterrada, será posible establecer un orden de magnitud de los errores cometidos al utilizar resultados obtenidos utilizando modelos simples y curvas de respuesta bien establecidas para estructuras que se comportan como sólidos rígidos (Elsabee et al. [EMR77]) o bien, la necesidad de acudir a otras técnicas más sofisticadas y que representen el problema con mayor rigor físico.

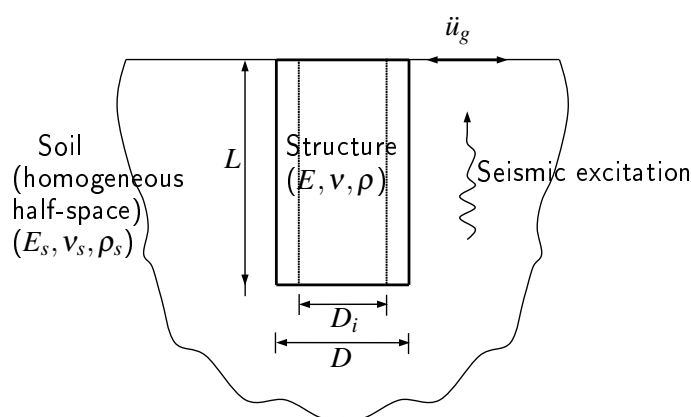
Ya en relación con la tarea propuesta, la necesidad de obtener la respuesta para una importante cantidad de casos diferentes obliga a replantearse la herramienta de cálculo utilizada en el capítulo anterior por otra algo menos costosa computacionalmente. En la bibliografía existen modelos simplificados que permiten evaluar la respuesta dinámica de este tipo de estructuras de forma sencilla. Una de estas familias la constituyen los llamados modelos tipo Winkler, y sus variantes. Estos modelos están muy extendidos, y son sencillos de formular y resolver. La resolución de las ecuaciones a que conducen puede abordarse numéricamente mediante el uso

de elementos finitos sencillos tipo viga o, dependiendo de la complejidad del modelo y problema, mediante la obtención directa de la solución analítica a dichas ecuaciones.

En lo que se refiere a los contenidos del capítulo, después de esta introducción se establecerá primero el marco del estudio propuesto (parámetros relevantes) y las variables a estudiar en relación con la respuesta estructural. Posteriormente, se describe la metodología empleada para el cálculo de dicha respuesta y se detallan las características del modelo Winkler propuesto, su formulación y su resolución. Se finaliza con la discusión de los resultados y las conclusiones relevantes.

### 4.2 Definición del problema. Descripción del análisis paramétrico propuesto

El problema sobre el que se plantea este estudio paramétrico se muestra en la Figura 4.1. Como puede observarse, se han adoptado algunas simplificaciones respecto del problema descrito en el Capítulo 3. Estas simplificaciones permitirán acotar el ámbito de este análisis a una extensión razonable: 1.- La estructura enterrada es de sección transversal constante (maciza o hueca) en toda su profundidad, 2.- la sección superior de la misma se encuentra enrasada con la superficie libre del terreno y 3.- Este terreno es un semiespacio homogéneo. También, como en el problema previo, el estudio se realiza en la hipótesis de comportamiento elástico y lineal del modelo, y donde suelo y estructura se consideran homogéneos e isótropos. Las propiedades mecánicas, inercia y dimensiones relevantes también se indican en la Figura 4.1: módulo de Young ( $E$ ,  $E_s$ ), coeficiente de Poisson ( $\nu$ ,  $\nu_s$ ) y densidad ( $\rho$ ,  $\rho_s$ ) para estructura y suelo respectivamente; diámetros exterior  $D$  e interior  $D_i$  de la estructura (siendo su relación  $\delta = D_i/D$ ); y profundidad de enterramiento  $L$  de la estructura. La excitación sísmica estará constituida por ondas de corte con incidencia vertical y que sólo producen desplazamientos horizontales en los puntos del semiespacio para el problema de campo libre. Esta excitación provoca un campo de aceleraciones compatible con un espectro de respuesta en la superficie, que será definido convenientemente en lo que sigue.



**Figura 4.1:** Problema estudiado. Estructura (maciza o hueca) enterrada en un semiespacio homogéneo. Excitación sísmica de ondas transversales con incidencia vertical

Como se ha comentado ya en la introducción de este capítulo, la respuesta sísmica del sistema dependerá principalmente de la flexibilidad de la estructura enterrada (parámetro que a su vez dependerá de si se trata de una construcción masiva o hueca, sus propiedades mecánicas y esbeltez  $L/D$ ), de la rigidez del terreno y de la variabilidad del campo incidente a lo largo de



la profundidad de enterramiento. Tal y como demostrarán los resultados que se mostrarán más adelante, ese último aspecto es determinante y está vinculado, no sólo a las características de la excitación (contenido en frecuencia), sino también a la velocidad de propagación de las ondas en el suelo (y, por tanto, nuevamente con la rigidez del mismo).

Así, los parámetros sobre los que se apoyará este estudio serán:

- Tipo de estructura (maciza o hueca),  $\delta$
- Velocidad de propagación de las ondas S en el suelo ( $c_s$ ).
- Esbeltez de la estructura ( $L/D$ ).
- Profundidad de enterramiento de la estructura ( $L$ ).

que, en el estudio paramétrico presentado posteriormente, tomarán los siguientes valores:

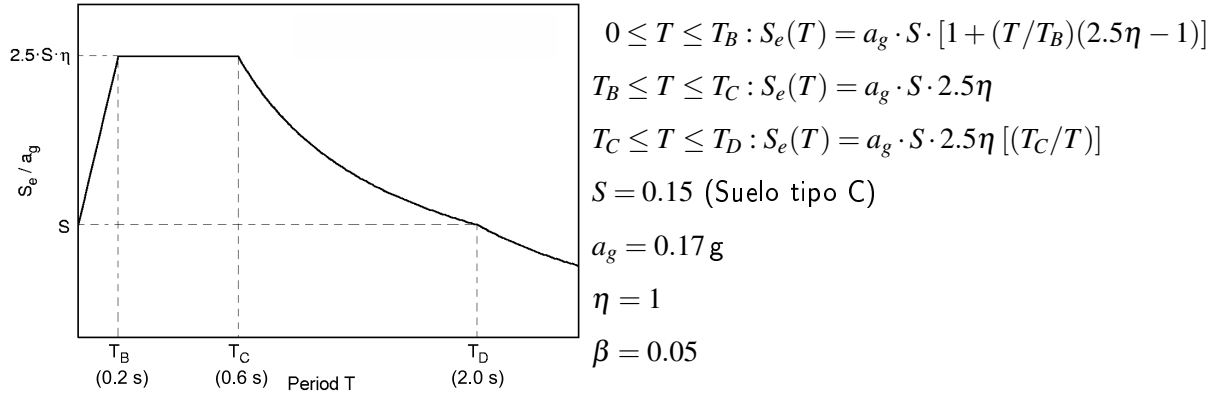
- $\delta = 0$  y  $\delta = 0.85$ . Para este primer parámetro sólo se adoptan 2 valores.  $\delta = 0$  corresponde al caso de una estructura enterrada maciza.  $\delta = 0.85$  se corresponde con una estructura hueca que, de aplicarlo al problema real estudiado en el Capítulo 3, conduce a un espesor de pared de valor intermedio a los reales en ese problema.
- $c_s = 200 - 800$  m/s, rango que se corresponden con suelos tipos B y C de acuerdo al Eurocódigo 8 [Eur03]. En la Tabla 4.1 se detalla el ámbito del estudio en lo que a este parámetro se refiere.
- $L/D = 1 - 10$
- $L = 5, 10, 20, 30, 40, 50$  y  $60$  m. Siete valores discretos muy próximos que permiten acotar bien la influencia de esta variable y entre cuyos extremos se encuentran la mayoría de problemas reales de interés (ver p.e. Gerolymos y Gazetas [GG06], donde se relacionan datos reales en el caso de cimentaciones tipo cajón para grandes puentes).

**Tabla 4.1:** Velocidad de propagación ondas S en el suelo. Rango adoptado para la realización del estudio.

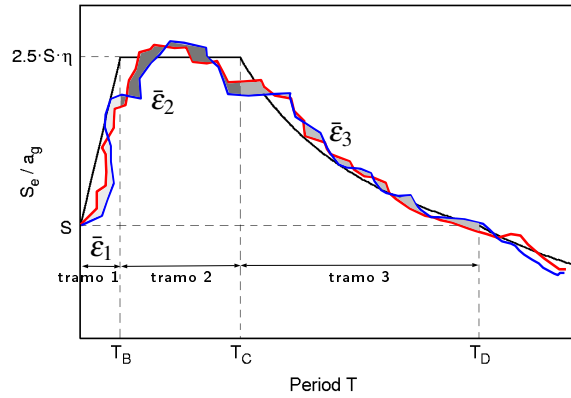
Tipo de suelo	$c_s$ (m/s)	$E_s$ (N/m <sup>2</sup> )	$E/E_s$	Ámbito de estudio (suelos B y C)
A	1500	$1.024 \cdot 10^{10}$	$\sim 3$	
	800	$2.912 \cdot 10^9$	$\sim 10$	
B	800	$2.912 \cdot 10^9$	$\sim 10$	
	360	$5.897 \cdot 10^8$	$\sim 50$	
C	360	$5.897 \cdot 10^8$	$\sim 50$	
	180	$1.474 \cdot 10^8$	$\sim 200$	
D	$< 180$	$< 1.474 \cdot 10^8$	$> 200$	

A todo esto, y para centrar el estudio a lo relevante del problema que se aborda, algunas propiedades del sistema se mantienen constantes en todo el proceso. Así, la estructura se considera fabricada de hormigón ( $E = 2.76 \cdot 10^{10}$  N/m<sup>2</sup>,  $\nu = 0.2$ ,  $\rho = 2500$  kg/m<sup>3</sup>) y para el suelo se adopta  $\nu_s = 0.3$  y  $\rho_s = 1570$  kg/m<sup>3</sup>. Estos valores son los tenidos en cuenta para calcular y completar las variables recogidas en la Tabla 4.1.

En lo que a la excitación se refiere, ésta viene definida a través del espectro de respuesta en superficie libre. También desde el Eurocódigo 8 [Eur03], y para mayor simplicidad, se ha



**Figura 4.2:** Excitación sísmica. Espectro de respuesta de campo libre en superficie. Suelo tipo C, espectro tipo 1.



**Figura 4.3:** Espectros de respuesta en la estructura enterrada. Error promedio por tramos entre las respuestas de los modelos de estructura rígida y flexible.  $T_B = 0.2s$ .  $T_C = 0.6s$ .  $T_D = 2.0s$ .

adoptado un solo perfil como representativo de los distintos tipos de suelo estudiados. Este será el correspondiente a terrenos Tipo C (espectros Tipo 1) (Figura 4.2).

En relación con la variable utilizada para cuantificar la respuesta del modelo, ésta será el espectro de respuesta a la cota de coronación de la estructura correspondiente a un sistema de 1 g.d.l. con la masa a nivel de esta cota (en la respuesta del mismo sólo influye el desplazamiento de la estructura a ese nivel y no el giro de la sección). Para el rango de variabilidad de los parámetros propuestos, se representará el error promedio entre los espectros de respuesta obtenidos bajo las dos hipótesis objeto de estudio: 1.- aquella que considera la estructura como un sólido rígido ideal,  $S_e^r(T)$ , y 2.- aquella en la que la estructura es tenida en cuenta con su verdadera flexibilidad,  $S_e^f(T)$ . Este error promedio  $\bar{\epsilon}_j$  se define como

$$\bar{\epsilon}_j[\%] = \frac{1}{n_j} \sum_i^{n_j} \left| \frac{S_e^f(T_i) - S_e^r(T_i)}{S_e^r(T_i)} \right| \times 100 \quad (4.1)$$

y se calculará y representará independientemente en cada uno de los tres tramos relevantes del espectro (tramo 1:  $0.0 - T_B$ ; tramo 2:  $T_B - T_C$ ; tramo 3:  $T_C - T_D$ ), siendo en este caso  $T_B = 0.2s$ ,  $T_C = 0.6s$  y  $T_D = 2.0s$  (ver Figura 4.3). Esto permitirá modular y clasificar las conclusiones del análisis en función del rango del periodo para el que se obtiene la respuesta máxima a esa cota debido a la presencia de la estructura y al modelo utilizado para representarla. Los resultados presentados se trazan a partir de 20 puntos de evaluación (valores de periodo) para los tramos

1 y 2, y 30 para el tramo 3, todos ellos igualmente espaciados en el eje de periodos.

### 4.3 Metodología para el cálculo de la respuesta sísmica de la estructura

La obtención de la respuesta de la estructura se realiza a través de un modelo lineal del problema siguiendo el procedimiento ya utilizado para el estudio de problema práctico descrito en el Capítulo 3, a partir de la función de respuesta en frecuencia del sistema y de la transformada del acelerograma compatible con el espectro de respuesta de referencia. La diferencia está en la metodología empleada para realizar el análisis del sistema en el dominio de la frecuencia. Teniendo en cuenta el elevado número de casos a estudiar en este análisis paramétrico, el modelo de elementos de contorno empleado entonces para esta tarea resulta inviable. Por esta razón, y sólo para este estudio, se propone la utilización de un modelo Winkler común, menos costoso (y también menos riguroso), para obtener una solución aceptable para el fin propuesto. En este tipo de modelos, la estructura se considera como un elemento viga o un sólido rígido según el caso, y la interacción con el terreno se tiene en cuenta a través de elementos resorte–amortiguador distribuidos a lo largo de la parte de la estructura que se encuentra enterrada.

Este modelo Winkler está en la línea de otros previos (ver p.e. Kavvadas y Gazetas [KG93] o Mylonakis [Myl01b]) para el análisis dinámico de pilotes o cimentaciones rígidas (Gerolymos y Gazetas [GG06]). El elemento clave de este tipo de modelos está en la caracterización de los resortes y amortiguadores empleados para modelar la interacción con el suelo. Muchos son los estudios que pueden consultarse en relación con los valores que deben utilizarse para estos elementos. Sin intención de realizar una revisión exhaustiva, estas referencias pueden clasificarse en dos grupos en función del procedimiento utilizado para determinarlos: 1.-) aquellas que ajustan estos parámetros a partir de modelos numéricos que contemplan la verdadera naturaleza del problema (ver p.e. Kavvadas y Gazetas [KG93] o Makris [Mak94]) y 2.-) los que proponen valores a partir de modelos teóricos de propagación, siendo los más habituales aquellos basados en los planteamientos de Novak–Baranov a partir de problemas elastodinámicos de deformación plana a cada cota. En este último grupo se encuadran las expresiones clásicas publicadas para estos resortes–amortiguadores por Novak et al. [NNAE78] y que serán las utilizadas en el modelo aquí implementado. Si el lector está interesado en las distintas expresiones y estrategias (y sus variantes) empleadas para esto, revisiones más detalladas de este asunto puede consultarse en los trabajos de Mylonakis [Myl01a, Myl01b] o Santana [San10].

A diferencia de los modelos Winkler habituales para este tipo de problemas, el implementado en esta Tesis Doctoral para esta tarea utiliza un modelo de viga Timoshenko (Timoshenko [Tim21, Tim22]) para representar la estructura y con ello poder tratar adecuadamente los valores más bajos propuestos para la esbeltez. También se ha procedido a la evaluación de la precisión de dicho código en una amplia gama de problemas, utilizando para ello el modelo acoplado de elementos de contorno (Aznárez et al [ASPM09]), con resultado muy aceptable en todos los casos.

### 4.4 Respuesta en frecuencia de la estructura. Modelo simplificado Winkler–Timoshenko

En esta sección se presenta el modelo utilizado en este capítulo para analizar la respuesta dinámica de estructuras enterradas poco esbeltas. La figura 4.4 ilustra los elementos principales

## 4 Modelo para el análisis sísmico de estructuras enterradas poco esbeltas

a tener en cuenta a la hora de desarrollar el modelo, considerando la estructura embebida en un suelo viscoelástico y homogéneo excitada por ondas incidentes tipo SH de incidencia vertical. La figura idealiza también la aproximación que lleva al planteamiento de un modelo tipo Winkler en el que la interacción de la estructura con el suelo circundante se modela a través de resortes y amortiguadores que relacionan los desplazamientos horizontales del eje de la estructura a una profundidad determinada  $u = u(z, \omega)$  con los desplazamientos  $u_I = u_I(z, \omega)$  de campo lejano producidos por el campo incidente en el suelo circundante.

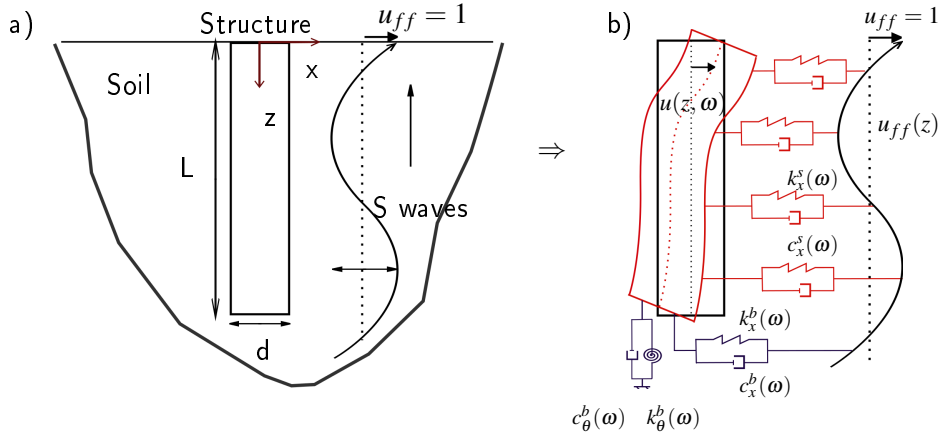


Figura 4.4: Problem definition

### 4.4.1 Ecuación de gobierno

Del estudio del equilibrio dinámico de una sección infinitesimal de la estructura considerada como viga tipo Timoshenko (considerando tanto la deformación debida a la flexión como al cortante), se obtiene una ecuación de gobierno de la viga del tipo

$$\frac{\partial^4 u(z, \omega)}{\partial z^4} = \left( \frac{q(z, \omega)}{EI} - \frac{1}{\kappa \mu A} \frac{\partial^2 q(z, \omega)}{\partial z^2} \right) \quad (4.2)$$

donde  $z$  es la profundidad medida a partir de la superficie libre del suelo,  $\omega$  es la frecuencia de la excitación,  $\kappa$  es el factor de cortadura de la sección estructural,  $E$  es el módulo de Young del material de la estructura,  $m$  es la densidad lineal de la estructura,  $A$  e  $I$  son el área y la inercia de la sección estructural, y donde se desprecian los posibles efectos de amortiguamiento en la estructura.

Por otro lado,  $q(z, \omega)$  es la reacción que ejerce el suelo sobre la estructura, y que tomando las hipótesis de un modelo Winkler como el representado en la figura 4.4, toma la expresión:

$$q(z, \omega) = (u_I - u)K_x^s + m\omega^2 u \quad (4.3)$$

donde  $K_x^s$  representa la impedancia horizontal con la que se modela la interacción suelo-estructura a través de unos factores de rigidez  $k_x^s$  y amortiguamiento  $c_x^s$  distribuidos de manera continua a lo largo de la profundidad de la estructura, que relacionan los desplazamientos del eje de la estructura con los del campo lejano. Así, la impedancia puede escribirse como  $K_x^s = k_x^s + ic_x^s$ , siendo  $i$  la unidad imaginaria. Tal y como se comentaba anteriormente, existen múltiples posibilidades a la hora de definir los factores  $k_x^s$  y  $c_x^s$ . En este trabajo se toman las expresiones derivadas por Novak et al.[NNAE78] para las reacciones de un medio infinito ante la vibración armónica de un cilindro rígido en condiciones de deformación plana:

$$K_x^s = k_x^s + ic_x^s = \mu_s [S_R(\tilde{a}_0, v_s, \xi_s) + iS_I(\tilde{a}_0, v_s, \xi_s)] = \pi \mu_s \tilde{a}_0^2 \mathbf{T} \quad (4.4)$$

donde  $\tilde{a}_0 = \omega d / 2c_s$  es la frecuencia adimensional,  $c_s = \sqrt{\mu/\rho_s}$  es la velocidad de propagación de las ondas de corte en el suelo, y  $\mathbf{T}$  es un factor adimensional con la siguiente expresión:

$$\mathbf{T} = -\frac{4K_1(b_0^*)K_1(a_0^*) + a_0^*K_1(b_0^*)K_0(a_0^*) + b_0^*K_0(b_0^*)K_1(a_0^*)}{b_0^*K_0(b_0^*)K_1(a_0^*) + a_0^*K_1(b_0^*)K_0(a_0^*) + b_0^*a_0^*K_0(b_0^*)K_0(a_0^*)} \quad (4.5)$$

siendo:

$$a_0^* = \frac{\tilde{a}_0}{\sqrt{1 + 2\xi_s i}} \quad (4.6)$$

$$b_0^* = \frac{\tilde{a}_0 i}{\psi \sqrt{1 + 2\xi_s i}} \quad (4.7)$$

$$\psi = \sqrt{\frac{2(1 - \nu_s)}{1 - 2\nu_s}} \quad (4.8)$$

y donde  $K_0$  y  $K_1$  son las funciones de Bessel modificadas de orden 0 y 1, y  $\xi_s$  es el factor de amortiguamiento histerético en el suelo.

Considerando la coordenada vertical adimensional  $\xi = z/L$  y asumiendo una estructura de sección circular maciza, la ecuación de gobierno del problema (4.2) puede expresarse como

$$\frac{\partial^4 u}{\partial \xi^4} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \beta u = -\gamma \frac{\partial^2 u_I}{\partial \xi^2} + \eta u_I \quad (4.9)$$

donde los distintos parámetros que aparecen en la ecuación se definen a continuación como:

$$\alpha = \frac{4}{\pi \kappa} \frac{1 + \nu}{1 + \nu_s} \frac{E_s}{E} \left(\frac{L}{d}\right)^2 \left[ (S_R + iS_I) - \pi \tilde{a}_0^2 \frac{\rho}{\rho_s} \right] \quad (4.10)$$

$$\gamma = \frac{4}{\pi \kappa} \frac{1 + \nu_f}{1 + \nu_s} \frac{E_s}{E} \left(\frac{L}{d}\right)^2 (S_R + iS_I) \quad (4.11)$$

$$\beta = \frac{32}{\pi} \frac{1}{1 + \nu_s} \frac{E_s}{E} \left(\frac{L}{d}\right)^4 \left[ (S_R + iS_I) - \pi \tilde{a}_0^2 \frac{\rho}{\rho_s} \right] \quad (4.12)$$

$$\eta = \frac{32}{\pi} \frac{1}{1 + \nu_s} \frac{E_s}{E} \left(\frac{L}{d}\right)^4 (S_R + iS_I) \quad (4.13)$$

#### 4.4.2 Definición del campo incidente

El sistema se asume excitado por un tren armónico de ondas planas de corte de incidencia vertical que se propagan desde  $z = \infty$  por el semiespacio viscoelástico y que producen un desplazamiento unitario  $u_{ff} = 1e^{i\omega t}$  en la superficie del campo libre (no perturbado por la presencia de la estructura), de modo que el campo incidente en todo el dominio sigue la expresión:

$$u_I(z, \omega) = \frac{1}{2} [e^{ikz} + e^{-ikz}] = \frac{1}{2} [e^{i\Lambda \xi} + e^{-i\Lambda \xi}] \quad (4.14)$$

donde  $k = \omega/c_s$  es el número de onda, y  $\Lambda = a_0 L/d$  puede entenderse como un número de onda adimensional, siendo  $a_0 = 2\tilde{a}_0 = \omega d/c_s$  una frecuencia adimensional. En este punto, es importante resaltar que  $c_s$  es una magnitud imaginaria con una componente relacionada con el factor de amortiguamiento histerético en el suelo, de manera que  $c_s = \text{Re}[c_s] \sqrt{1 + 2i\xi_s}$ .

#### 4.4.3 Solución general del campo de desplazamientos

La expresión general del campo de desplazamientos horizontales del eje de la estructura que satisface la ecuación 4.9 es de la forma:

$$\frac{u(\xi, a_0)}{u_{ff}} = C_1 e^{S_1 \xi} + C_2 e^{S_2 \xi} + C_3 e^{S_3 \xi} + C_4 e^{S_4 \xi} + C_p (e^{i\Lambda \xi} + e^{-i\Lambda \xi}) \quad (4.15)$$

siendo  $S_i$  las raíces de la ecuación homogénea y  $C_p$  la constante asociada a la solución particular de la ecuación, definidas de la siguiente manera:

$$S_i = \pm \left[ \frac{\alpha}{2} \pm \frac{1}{2} (\alpha^2 - 4\beta)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (4.16)$$

$$C_p = \frac{\Delta}{\Lambda^4 + \alpha \Lambda^2 + \beta} \quad (4.17)$$

con

$$\Delta = \frac{16}{\pi} \left( \frac{l}{d} \right)^4 \frac{E}{E_s} \frac{1}{1 + \nu_s} (S_R + iS_I) \left[ \frac{1}{8} \frac{a_0^2}{\kappa} (1 + \nu_f) + 1 \right] \quad (4.18)$$

La constantes  $C_i$  están determinadas por las condiciones de contorno consideradas en los extremos superior e inferior de la estructura. En este caso, las condiciones de contorno están definidas en términos de cortante y momento que, en cualquier punto de la estructura, responden a las expresiones siguientes:

$$M(\xi, \omega) = \frac{EI}{L^2} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \alpha u + \gamma u_I \right] \quad (4.19)$$

$$Q(\xi, \omega) = \frac{EI}{L^3} \left[ \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} - \alpha \frac{\partial u}{\partial \xi} + \gamma \frac{\partial u_I}{\partial \xi} \right] \quad (4.20)$$

siendo el giro

$$\theta(\xi, \omega) = \frac{1}{L} \left[ \frac{\partial u}{\partial \xi} + \left[ \frac{EI}{\mu AL^2} \right] \left[ \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} - \alpha \frac{\partial u}{\partial \xi} + \gamma \frac{\partial u_I}{\partial \xi} \right] \right] \quad (4.21)$$

En la parte superior, donde la estructura es considerada libre, se asume con los cortantes y momentos son nulos:

$$Q^{\xi=0} = 0 \quad (4.22)$$

$$M^{\xi=0} = 0. \quad (4.23)$$

Por otro lado, en la base de la estructura, en contacto con el terreno, se asume que actúan las reacciones del terreno debidas a los desplazamientos y giros de la estructura en ese punto. Para determinar el valor de dichas reacciones se toman las impedancias definidas en los trabajos de Veletsos y Verbic [VV73] y Veletsos y Wei [VW71] para una cimentación superficial circular, tal y como los presenta Bielac [Bie75]. Así, en la base de la estructura se puede escribir:

$$\begin{Bmatrix} -Q \\ -M \end{Bmatrix}^{\xi=1} = \begin{bmatrix} k_{hh} & 0 \\ 0 & k_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u - u_I \\ \theta \end{Bmatrix}^{\xi=1} \quad (4.24)$$

donde, acorde a las referencias arriba comentadas, las impedancias en la base son:

$$K_{hh} = \mu_s d \tilde{K}_{hh} \quad (4.25)$$

$$K_{\theta\theta} = \mu_s d^3 \tilde{K}_{\theta\theta} \quad (4.26)$$

donde

$$\tilde{K}_j(a_0, \nu_s) = \sigma_j [k_j(a_0, \nu_s) + i a_0 c_j(a_0, \nu_s)] \quad j = hh, \theta\theta \quad (4.27)$$

con:

$$k_{hh} = 1 \quad (4.28)$$

$$c_{hh} = b_1 \quad (4.29)$$

$$k_{h\theta} = 0 \quad (4.30)$$

$$c_{h\theta} = 0 \quad (4.31)$$

$$k_{\theta\theta} = 1 - b_1 \theta \frac{(b_2 \tilde{a}_0)^2}{1 + (b_2 \tilde{a}_0)^2} - b_3 \tilde{a}_0^2 \quad (4.32)$$

$$c_{\theta\theta} = b_1 b_2 \frac{(b_2 \tilde{a}_0)^2}{1 + (b_2 \tilde{a}_0)^2} \quad (4.33)$$

$$(4.34)$$

y donde  $\sigma_j$  es la rigidez estática, definida por las expresiones:

$$\sigma_{hh} = \frac{8}{2 - \nu} \quad (4.35)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{8}{3(1 - \nu)} \quad (4.36)$$

siendo  $b_1$  y  $b_2$  los factores adimensionales dados en la tabla 4.2 según Bielak [Bie75]:

**Tabla 4.2:** Valores de  $b_i$  [Bie75]

	$\nu = 0$	$\nu = 1/3$	$\nu = 0.45$	$\nu = 0.5$
$b_1$	0.525	0.5	0.45	0.4
$b_2$	0.8	0.8	0.8	0.8
$b_3$	0	0	0.023	0.027

De este modo, de particularizar las ecuaciones (4.19) y (4.20) según lo establecido en (4.22), (4.23) y (4.24), y considerando (4.15), se obtiene un sistema lineal de 4 ecuaciones de cuya solución para cada frecuencia se obtienen los valores de las constantes  $C_i$ .

#### 4.4.4 Sección estructural generalizada

El desarrollo presentado en el punto anterior asume una sección estructural circular maciza para la estructura enterrada. Sin embargo, es más común en estructuras reales encontrar secciones de tipo anular, que pueden analizarse de forma rigurosa con esta misma solución tomando unas propiedades geométricas y materiales modificadas según lo indicado a continuación.

Considerando una sección anular con unos diámetros externo e interno  $D$  y  $D_i$ , el área e inercia  $A_{\text{anular}}$  e  $I_{\text{anular}}$  de la sección anular pueden expresarse como

$$I_{\text{anular}} = \frac{\pi}{64} D^4 (1 - \delta^4) \quad (4.37)$$

$$A_{\text{anular}} = \frac{\pi}{4} D^2 (1 - \delta^2) \quad (4.38)$$

donde  $\delta$  es la relación entre los diámetros interior y exterior

$$D_i = \delta \cdot D \quad (4.39)$$

Así, puede demostrarse que, para analizar una estructura de sección anular utilizando la solución descrita en el punto anterior y las propiedades geométricas  $A_{\text{anular}}$  e  $I_{\text{anular}}$ , es necesario utilizar también las siguientes propiedades equivalentes (o reducidas):

$$E_{\text{equiv}} = E(1 - \delta^4) \quad (4.40)$$

$$\rho_{\text{equiv}} = \rho(1 - \delta^2) \quad (4.41)$$

$$\kappa_{\text{equiv}} = \kappa(1 + \delta^2)^{-1} \quad (4.42)$$

### 4.5 Resultados

Siguiendo el procedimiento descrito, en esta sección se presentan los resultados obtenidos para el error promedio definido en la ecuación (4.1). Las figuras 4.5 a 4.18 presentan la distribución de dicho error promedio  $\bar{\epsilon}_i$  en distintos intervalos de periodo para una tipología estructural precisa (maciza/hueca) y una profundidad de enterramiento determinada. Están constituidas por tres gráficos en forma de superficies tridimensionales que representan este error promedio en cada uno de los tramos del espectro especificados. Las variables independientes de estas gráficas son la esbeltez de la estructura ( $L/D$ ) y la velocidad de propagación de las ondas de corte en el suelo ( $c_s$ ), ambas en el rango de valores establecido en el apartado 4.2.

Desde un punto de vista de aplicación práctica, las curvas presentadas son útiles y suficientes para que el diseñador localice su caso particular y estime el error cometido por un modelo simplificado que considere la estructura como infinitamente rígida. Con todo, y en esta línea, estas figuras también permiten aventurar la proposición de un criterio simple, tal y como se propone más adelante. Ahora, a la vista de los resultados, pueden realizarse algunos comentarios relevantes y de carácter general que tienen que ver con la respuesta del problema y la significación que la flexibilidad de la estructura tiene en la misma:

- En todos los casos los valores de error promedio  $\bar{\epsilon}_1$  (Tramo 1: 0.0 – 0.2s) son mayores que  $\bar{\epsilon}_2$  (Tramo 2: 0.2 – 0.6s) y, ambos, muy superiores a los obtenidos para  $\bar{\epsilon}_3$  (Tramo 3: 0.6 – 2.0s). En este último, y para los valores más altos de periodo del tramo, tampoco hay diferencias significativas con el valor obtenido a partir del espectro de respuesta de campo libre utilizado de referencia (no se muestran estos resultados). Es también interesante notar que los valores máximos de error en los tramos 1 y 2 son del mismo orden.
- También en todos los casos se observa que el efecto del carácter flexible de la estructura en la respuesta (o lo que es lo mismo, el error cometido con la utilización del modelo rígido) crece con la profundidad de enterramiento de la misma.
- Siempre, el error cometido crece con la esbeltez de la estructura pero de manera más acusada cuanto menor es la rigidez del terreno. De hecho, para valores de  $c_s > 400\text{m/s}$  (suelos tipo B) el error crece muy moderadamente con la esbeltez de la estructura.
- Respecto a la tipología estructural, y comparando los comportamientos de estructuras huecas o macizas, las diferencias no son importantes y, en cualquier tramo o profundidad de enterramiento, dependen de los valores de esbeltez de la estructura y de velocidad de propagación de las ondas en el suelo. Es muy llamativo que en muchos casos, para  $L/D > 4$  y  $c_s > 400\text{m/s}$  (suelos tipo B), el efecto de la flexibilidad de la estructura (el error cometido con la utilización del modelo rígido) es inferior en el caso de la tipología hueca analizada. Se trata de estructuras más flexibles que las macizas pero no debe olvidarse el



papel que aquí juega la masa del conjunto. Ciertamente es que los valores máximos de error se presentan para estructuras huecas en el rango de esbelteces elevadas y bajas velocidades de propagación de las ondas en el suelo (suelos tipo C).

Con el objetivo de proponer un criterio numérico aún más simple a partir de los resultados obtenidos se presenta la tabla 4.3. En dicha tabla, para cada profundidad de enterramiento ( $L$ ) se cuantifican los límites de aplicación del modelo rígido o, más bien, los casos en los que se hace necesario acudir a modelos que contemplen la flexibilidad real de la estructura, en cada tramo del espectro. Dichos límites se han establecido para un valor del error promedio igual al 10 %. Teniendo en cuenta las hipótesis consideradas en el análisis y el elevado nivel de incertidumbre en relación con las propiedades del modelo, se trata de un valor razonable. Así mismo, deben entenderse como valores estimativos, teniendo en cuenta la forma de las curvas a partir de las cuales se obtienen y obligados por el objetivo de establecer de forma concreta estos límites. Con todo lo anterior, y dado además que las diferencias asociadas a la tipología de la estructura (hueca/maciza) son poco importantes, estos límites pueden ser representativos de ambos problemas.

**Tabla 4.3:** Valores de  $L/D$  y  $c_s$  para los que el error promedio es significativo ( $\bar{\epsilon}_j > 10\%$ ) al asumir la hipótesis de una estructura enterrada infinitamente rígida con profundidad de enterramiento  $L$ . Para las configuraciones indicadas por celdas en gris, ninguno de los valores estudiados alcanza errores promedio superiores al 10 %. Estructura maciza o hueca ( $\delta = 0.85$ ).

$\bar{\epsilon}_j > 10\%$	$T = 0 - 0.2s$		$T = 0.2 - 0.6s$		$T = 0.6 - 2.0s$	
$L$ [m]	$c_s$ [m/s]	$L/D$	$c_s$ [m/s]	$L/D$	$c_s$ [m/s]	$L/D$
5						
10	< 240	> 9.0	$\bar{\epsilon}_j < 10\%$		siempre	
20	< 600	> 6.0				
30	$\forall c_s$	> 4.5	< 220	> 8.0		
40	$\forall c_s$	> 4.0	< 280	> 6.0		
50	$\forall c_s$	> 3.0	< 400	> 5.0		
60	$\forall c_s$	> 2.0	< 500	> 4.0		

La tabla 4.3 puede explicarse más detenidamente comentando en detalle dos ejemplos concretos:

- 1)  $L = 20$  m En el tramo 1, para estructuras con esbeltez  $L/D > 6$  y suelos con velocidad de propagación de las ondas  $c_s < 600$  m/s, el error promedio cometido en el valor del espectro de respuesta obtenido utilizando un modelo rígido para la estructura supera el 10 % establecido. En los tramos 2 y 3 todas las combinaciones estudiadas de la esbeltez de la estructura y tipos de suelo proveen un error promedio inferior a este 10 %.
- 2)  $L = 40$  m En el tramo 1, la utilización del modelo que considera rígida a la estructura da lugar a errores promedio superiores al 10 % para valores de la esbeltez  $L/D > 4$  en todos los tipos de suelo considerados. Para el tramo 2, la flexibilidad de la estructura es relevante para  $L/D > 6$  y  $c_s < 280$  m/s. De nuevo, en el tramo 3 todas las combinaciones posibles presentan errores inferiores al 10 %.

No es posible por tanto, en contra de algunas recomendaciones publicadas, establecer un criterio 'cerrado' y concreto basado, en exclusiva, en la esbeltez para establecer el carácter (rígido/flexible) de la estructura a la hora de modelar este tipo de problemas. No sólo es necesario tener en cuenta la rigidez del suelo sino, además, y como factor más determinante, la profundidad de enterramiento vinculado a la variabilidad de la excitación a lo largo de la estructura. Todo ello

sin olvidar el rango de interés (periodo) para la medida de la respuesta máxima. Dependiendo de este rango, los límites para este criterio también pueden ser muy diferentes.

Actuando muy del lado de la seguridad y tomando como referencia sólo el tramo 1 (el más restrictivo del espectro en lo que a estos límites se refiere), se puede concluir que estructuras con valores de esbeltez  $L/D < 6$  se comportan como un sólido rígido en su respuesta sísmica para profundidades de enterramiento inferiores a 20m en todos los tipos de suelo estudiados (B y C). A medida que aumenta la profundidad a partir de este valor, el límite de la esbeltez que permite tratar el problema con un modelo rígido se reduce progresivamente hasta valores de  $L/D$  de entre 2 y 3 para profundidades  $L$  de 50 m (del orden de la profundidad de enterramiento del problema real estudiado en el Capítulo 3). Fuera de estos límites no resulta recomendable la utilización de métodos que no tengan en cuenta el efecto de la flexibilidad de la estructura.

### 4.6 Conclusiones

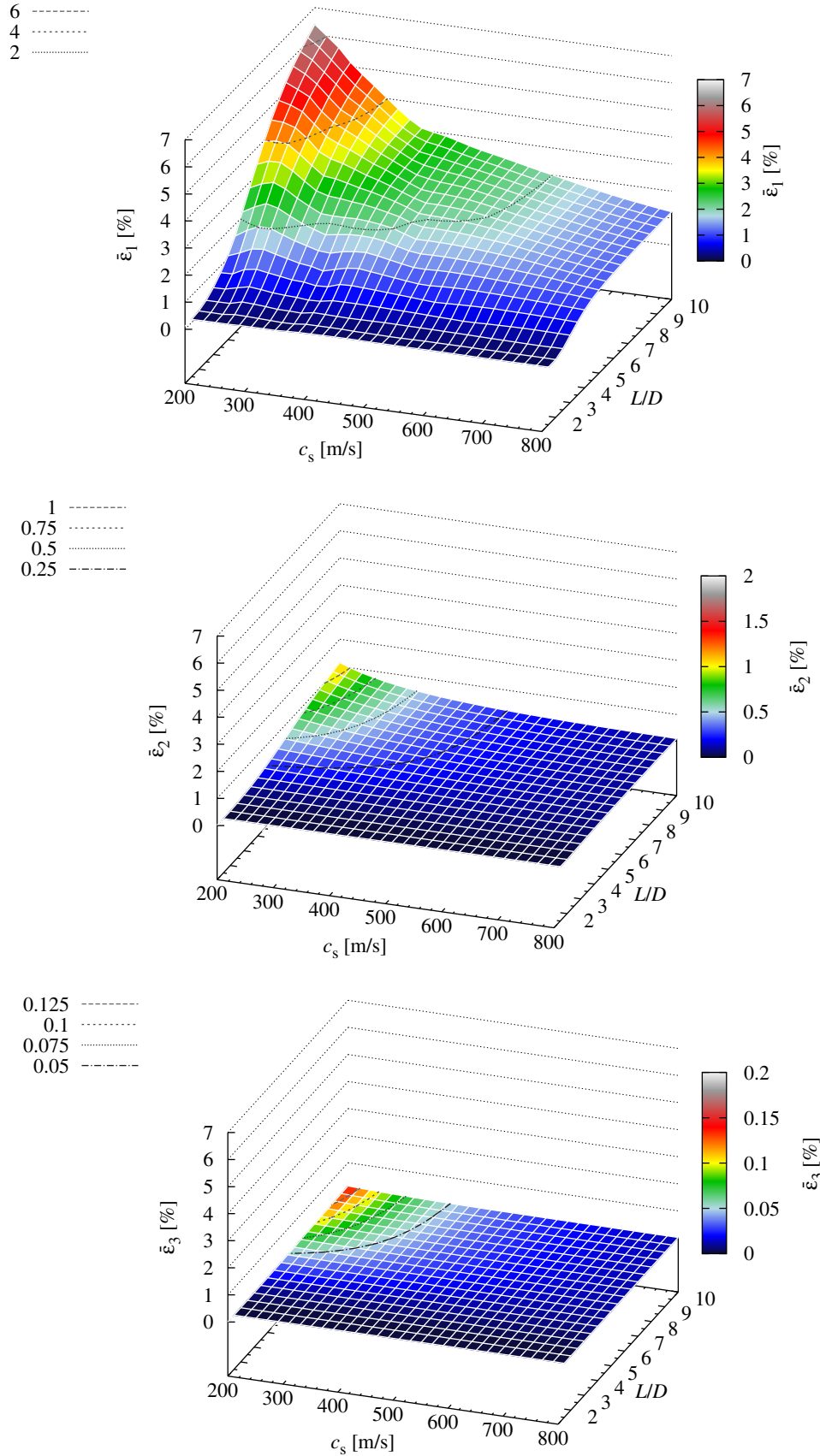
Este capítulo ha presentado un conjunto de metodologías y resultados dirigidos a responder a la siguiente pregunta: ¿es posible estimar la respuesta sísmica de una estructura enterrada utilizando un modelo rígido de la misma? ¿En qué momento, esta hipótesis simplificadora de infinita rigidez de la estructura deja de tener sentido desde el punto de vista del análisis ingenieril?

Para contribuir a dar respuesta a esta pregunta, y dada la complejidad del problema, se hace necesaria la realización de un estudio paramétrico de la respuesta de la estructura frente a variables que se han considerado relevantes: Relación de esbeltez de la estructura, profundidad de enterramiento, velocidad de propagación de las ondas de corte en el suelo (considerando la estructura siempre como ejecutada en Hormigón Armado, de manera que varía la relación de rigideces entre estructura y suelo) y tipología (estructura hueca o maciza). La utilización de métodos numéricos como el presentado en el capítulo 3 (en el que suelo y estructura se modelan y discretizan en su verdadera geometría) resulta excesivamente costosa para la realización de estudios paramétricos como el comentado, incluso bajo la hipótesis de comportamiento lineal y elástico, tal y como se ha adoptado en este capítulo. Resulta más eficiente realizar un primer acercamiento al problema con la utilización de metodologías más sencillas, como puedan ser las tipo Winkler presentadas en este capítulo. Esta metodología se utiliza para obtener un amplio conjunto de resultados mostrando el error relativo promedio entre las respuestas sísmicas de la estructura considerada infinitamente rígida o con su verdadera rigidez. Dicho error promedio se mide directamente sobre distintos tramos del espectro de respuesta a cota cero sobre la estructura, que es una tipología de resultado comúnmente utilizada en el ámbito de la ingeniería sísmica, y que resulta más informativa que centrarse, por ejemplo, en aceleraciones máximas ante un determinado acelerograma.

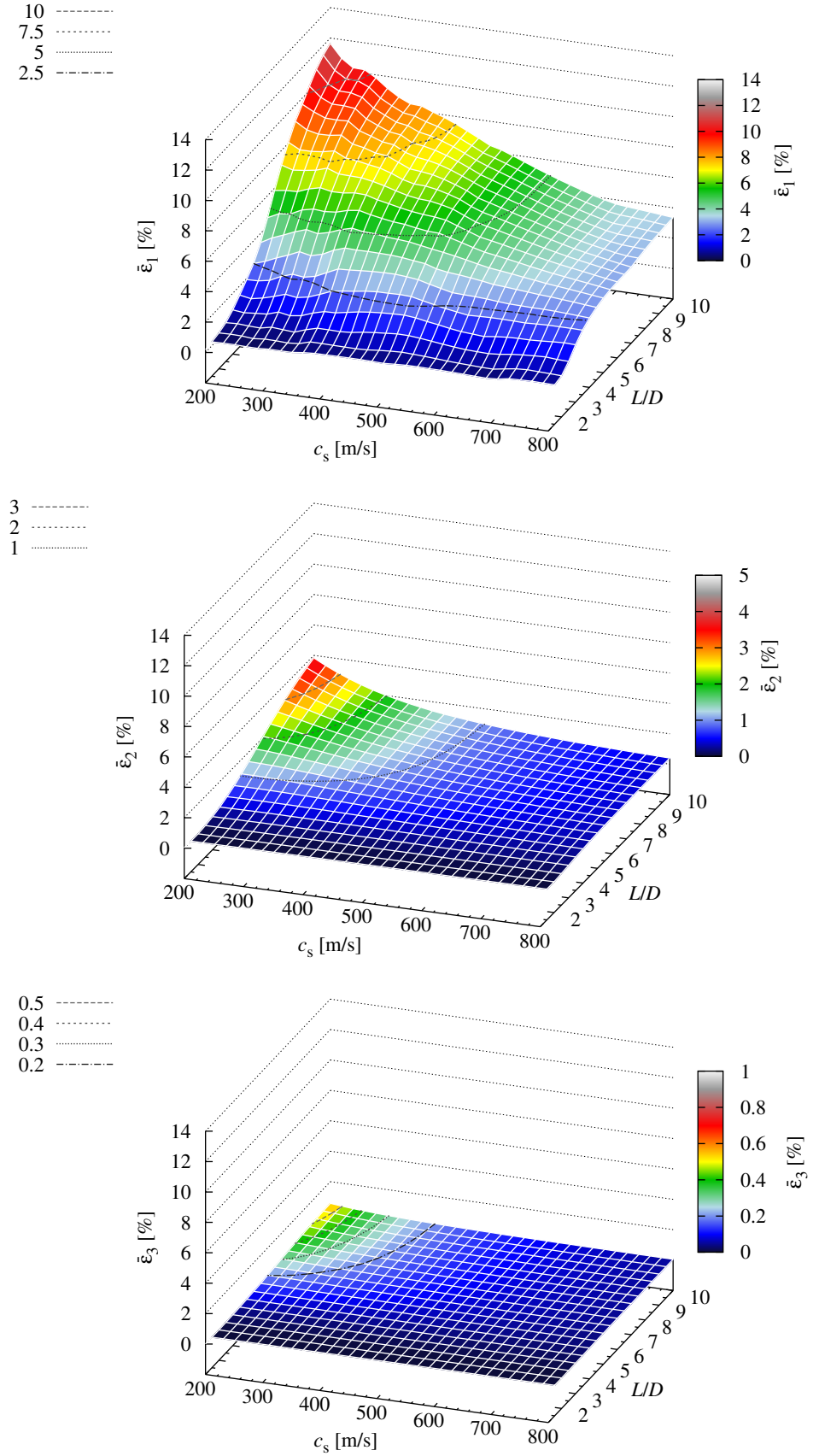
Los resultados muestran que, en muchos casos, la hipótesis de infinita rigidez de la estructura enterrada es adecuada para análisis propuesto, estableciendo dicha condición de adecuado en este estudio cuando el valor del error promedio respecto a los resultados del modelo flexible está por debajo del 10 %. Esto es así, por ejemplo, para profundidades de enterramiento de sólo 5 metros en todas sus configuraciones, o para el tramo de periodos altos del espectro de respuesta (periodos entre 0.6 y 2 segundos) en todos los casos. Para el resto de casos, se ha preparado un tabla que sintetiza los casos para los que el error promedio se estima como demasiado alto.

Finalmente, teniendo presente en todo momento las hipótesis simplificativas que han sido asumidas, el estudio realizado ha permitido establecer unos límites claros fuera de los cuales no resulta recomendable la utilización de métodos que no tengan en cuenta el efecto de flexibilidad

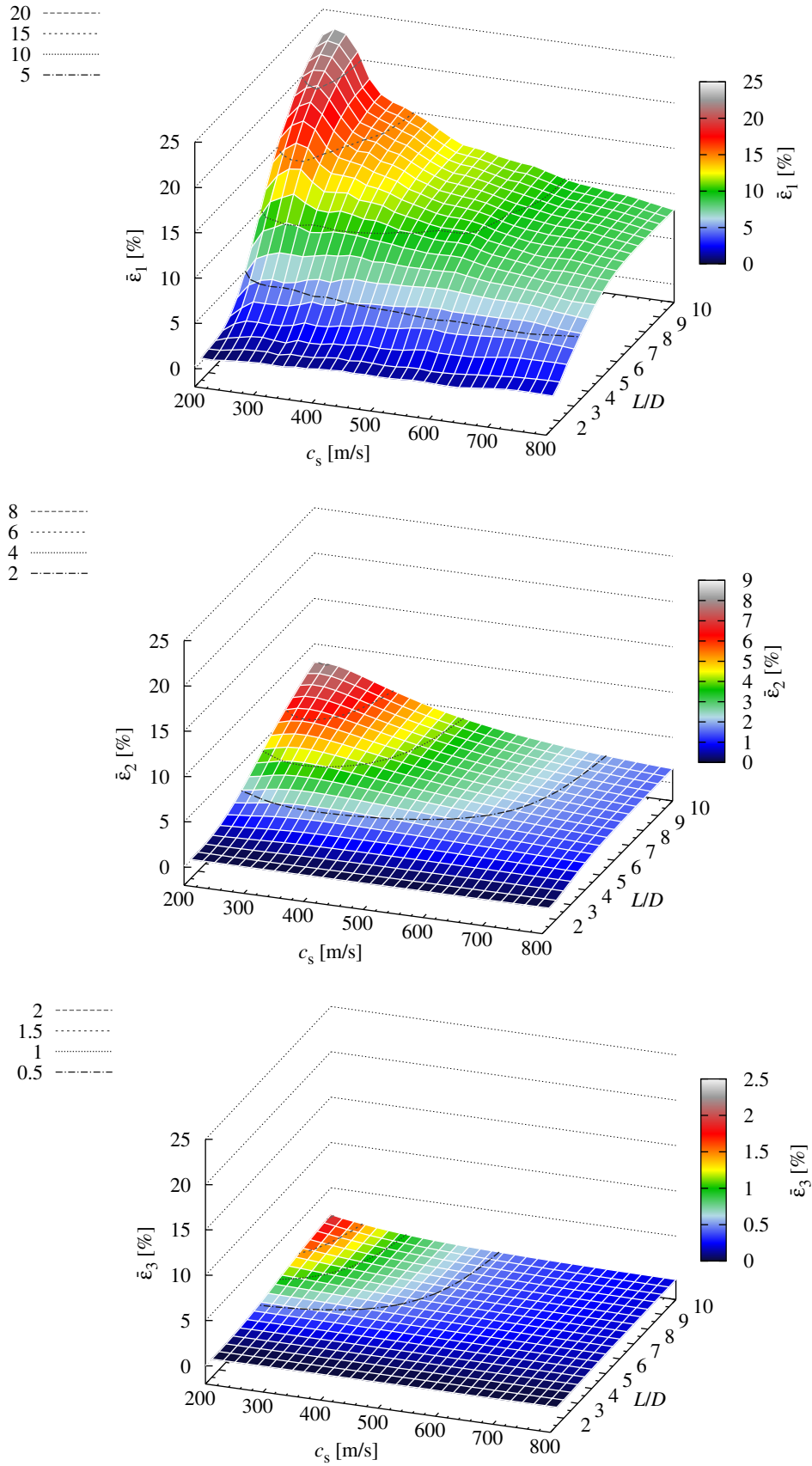
de la estructura. Dependiendo del nivel de incertidumbre del problema o el de precisión requerido en el análisis, puede ser suficiente con la utilización de modelos simplificados del problema (como los modelos tipo Winkler y variantes) o se puede hacer necesario acudir a modelos más sofisticados como el abordado con el código acoplado de elementos de contorno discutido y utilizado en capítulos anteriores.



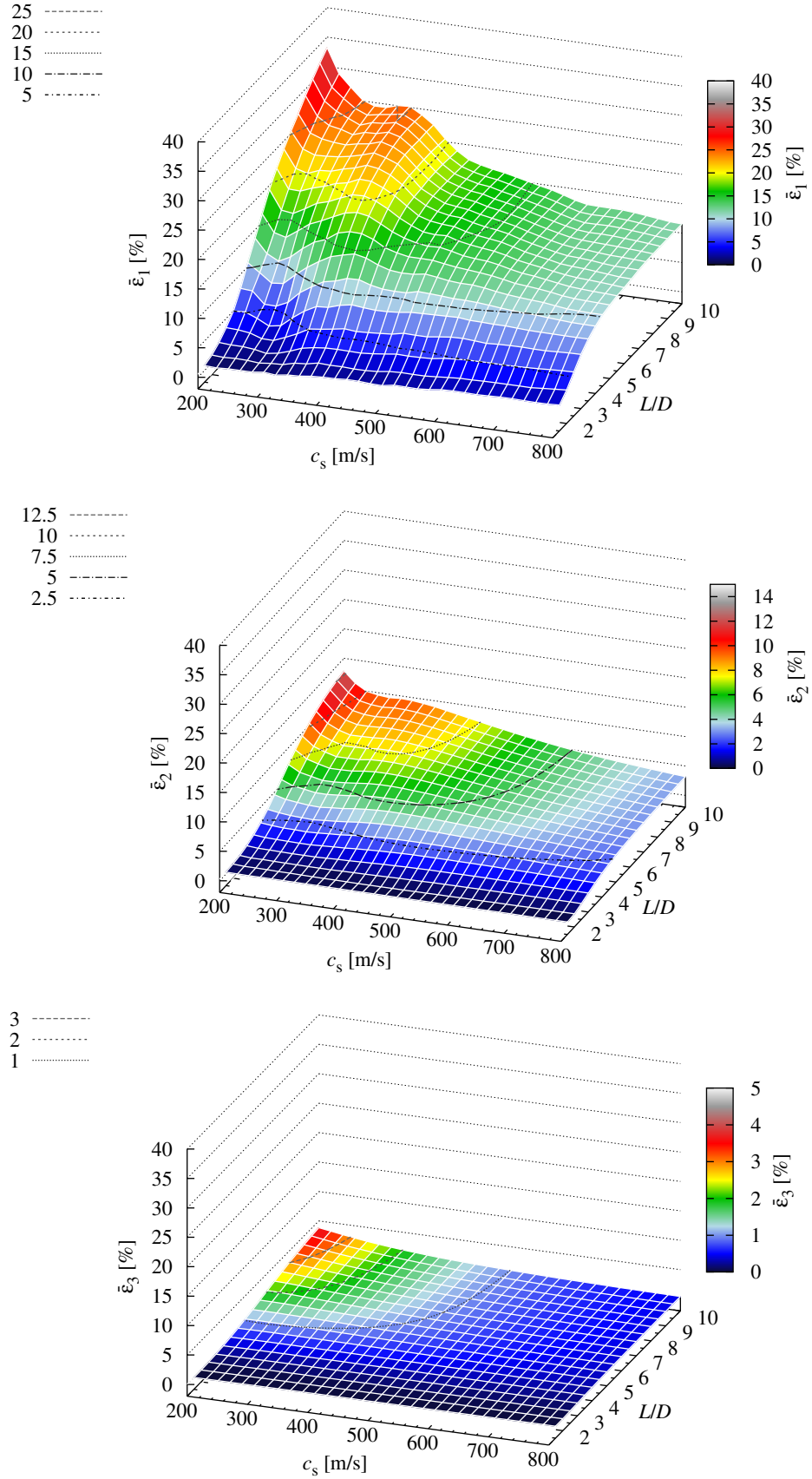
**Figura 4.5:** Distribución del error promedio  $\bar{\epsilon}_j$  del espectro de respuesta, calculado en cota superior de la estructura, cometido en cada tramo  $j$  de los tres en que se ha dividido el eje de periodo al asumir una estructura rígida en lugar de su verdadera flexibilidad en función de  $L/D$  y  $c_s$ . Estructura maciza. Profundidad de enterramiento  $L = 5$  m.



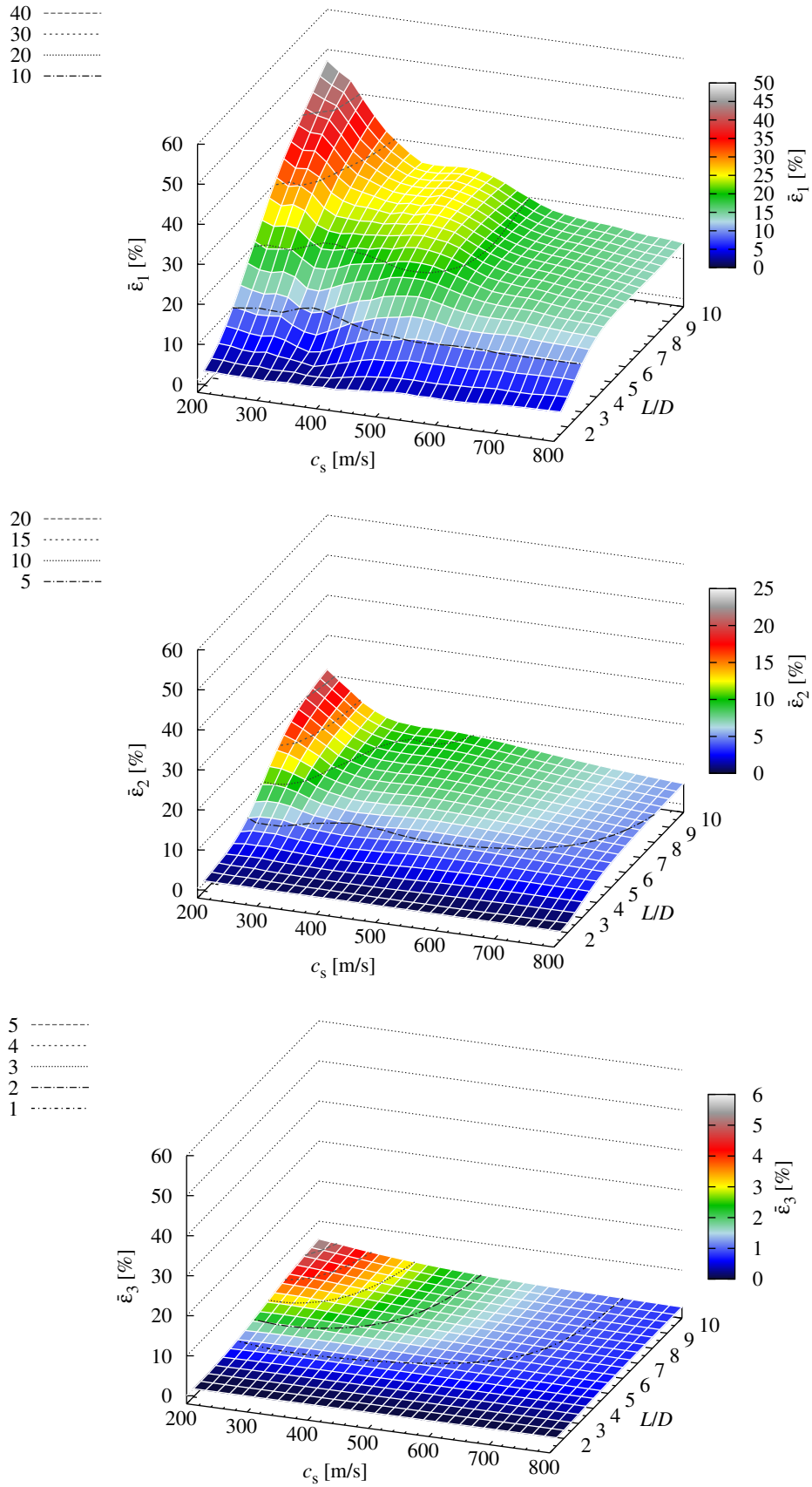
**Figura 4.6:** Distribución del error promedio  $\bar{\epsilon}_j$  del espectro de respuesta, calculado en cota superior de la estructura, cometido en cada tramo  $j$  de los tres en que se ha dividido el eje de periodo al asumir una estructura rígida en lugar de su verdadera flexibilidad en función de  $L/D$  y  $c_s$ . Estructura maciza. Profundidad de enterramiento  $L = 10$  m.



**Figura 4.7:** Distribución del error promedio  $\bar{\epsilon}_j$  del espectro de respuesta, calculado en cota superior de la estructura, cometido en cada tramo  $j$  de los tres en que se ha dividido el eje de periodo al asumir una estructura rígida en lugar de su verdadera flexibilidad en función de  $L/D$  y  $c_s$ . Estructura maciza. Profundidad de enterramiento  $L = 20\text{m}$ .

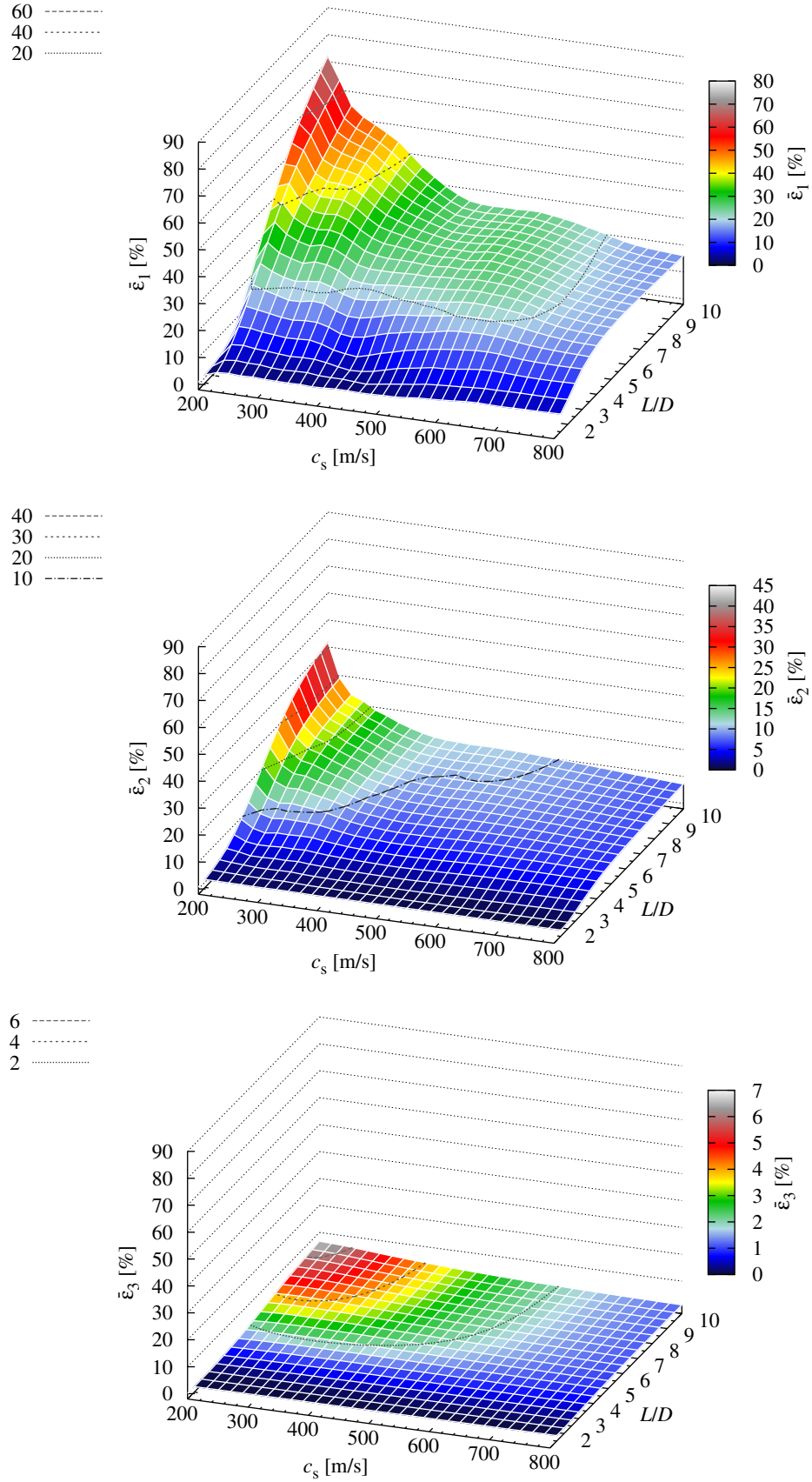


**Figura 4.8:** Distribución del error promedio  $\bar{\varepsilon}_j$  del espectro de respuesta, calculado en cota superior de la estructura, cometido en cada tramo  $j$  de los tres en que se ha dividido el eje de periodo al asumir una estructura rígida en lugar de su verdadera flexibilidad en función de  $L/D$  y  $c_s$ . Estructura maciza. Profundidad de enterramiento  $L = 30$  m.

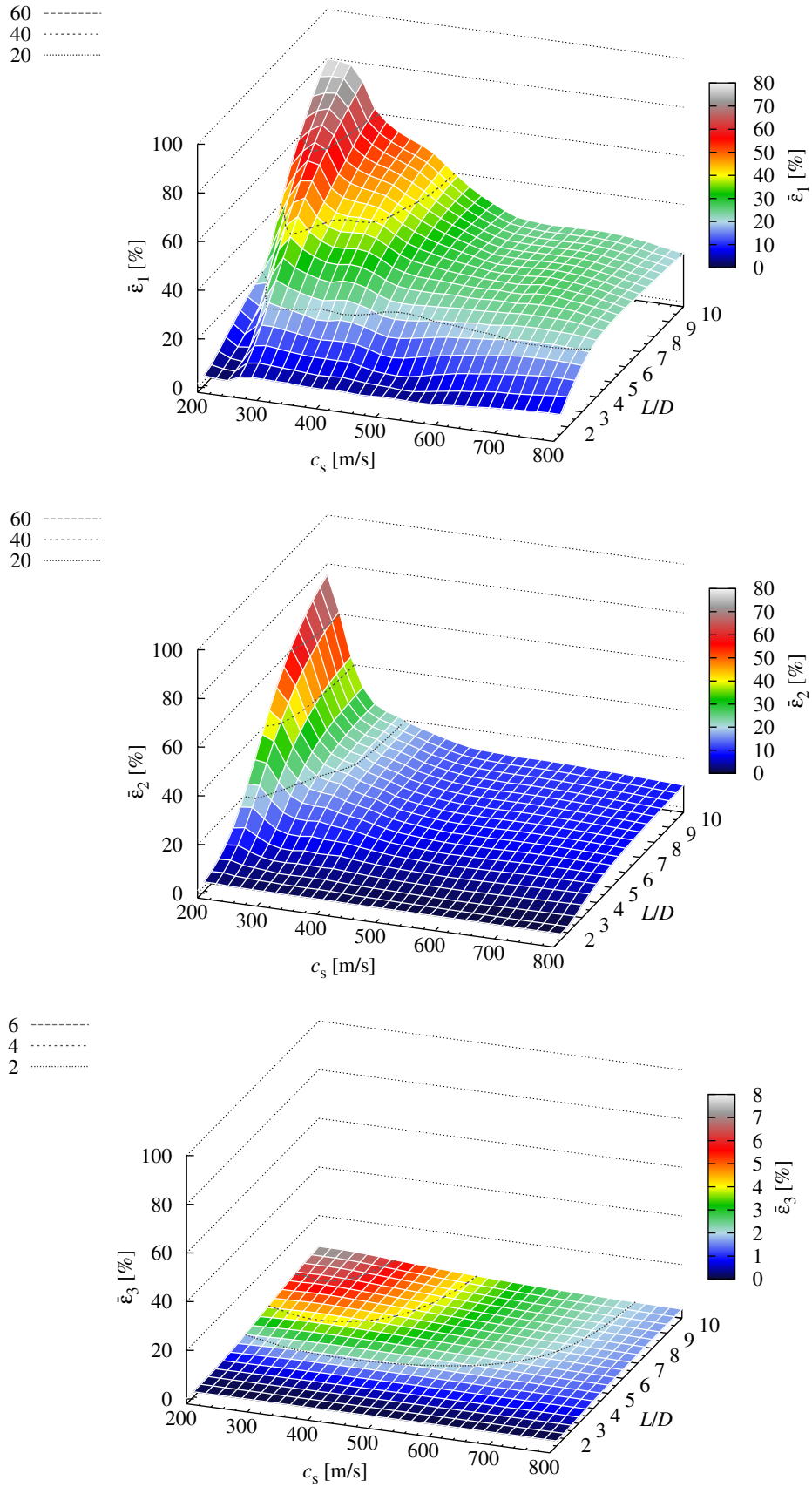


**Figura 4.9:** Distribución del error promedio  $\bar{\varepsilon}_j$  del espectro de respuesta, calculado en cota superior de la estructura, cometido en cada tramo  $j$  de los tres en que se ha dividido el eje de periodo al asumir una estructura rígida en lugar de su verdadera flexibilidad en función de  $L/D$  y  $c_s$ . Estructura maciza. Profundidad de enterramiento  $L = 40\text{m}$ .

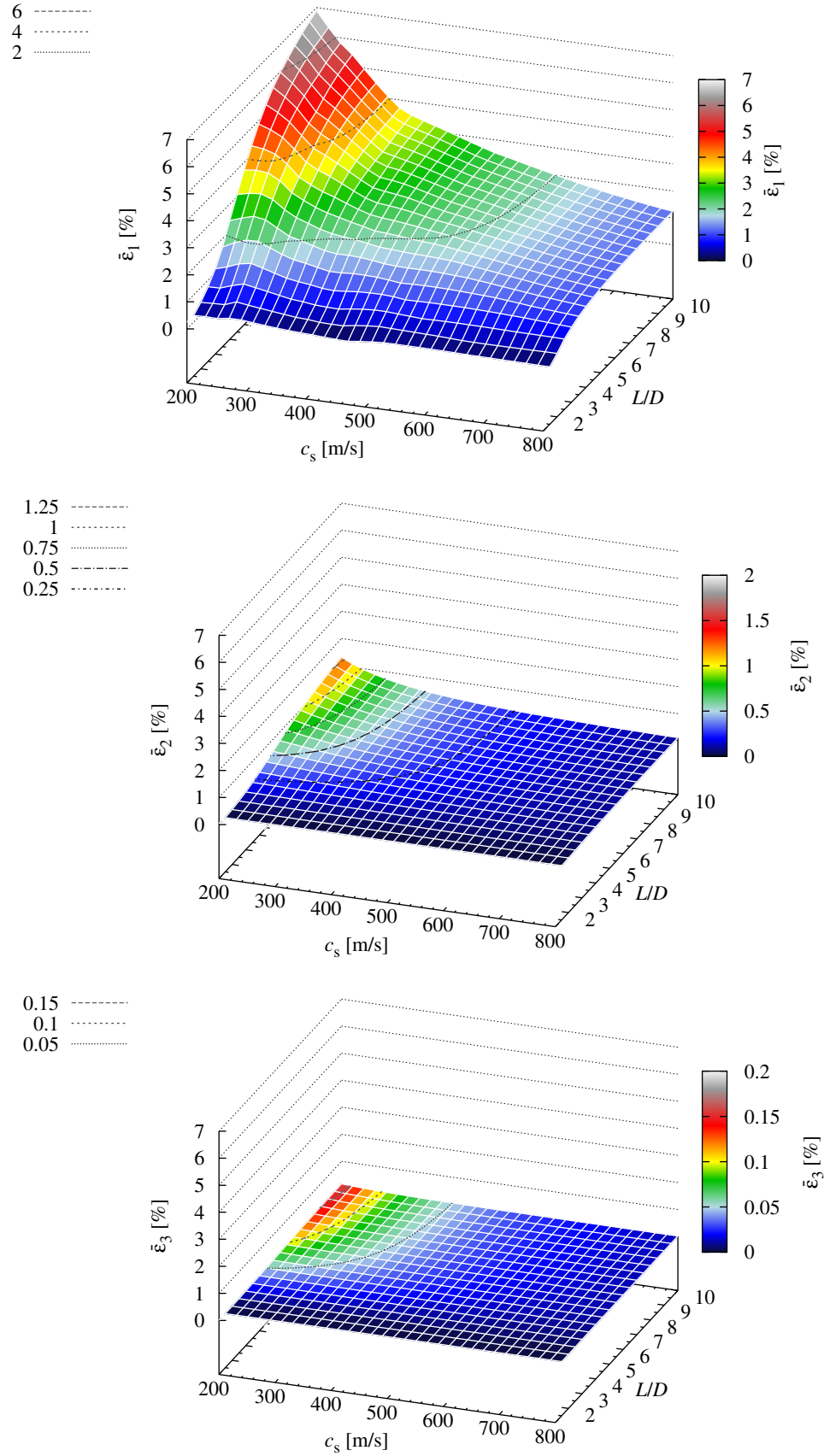




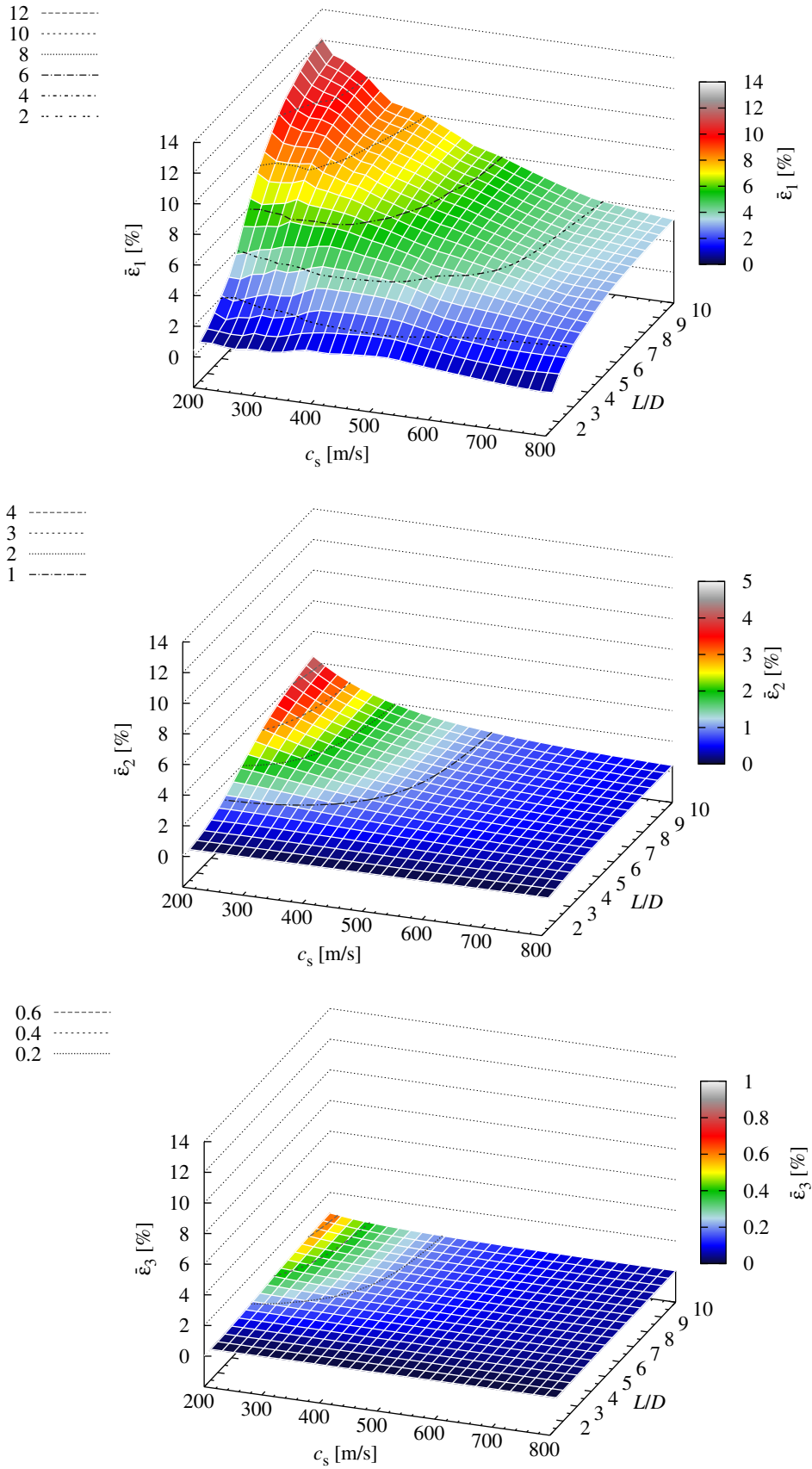
**Figura 4.10:** Distribución del error promedio  $\bar{\varepsilon}_j$  del espectro de respuesta, calculado en cota superior de la estructura, cometido en cada tramo  $j$  de los tres en que se ha dividido el eje de periodo al asumir una estructura rígida en lugar de su verdadera flexibilidad en función de  $L/D$  y  $c_s$ . Estructura maciza. Profundidad de enterramiento  $L = 50$  m.



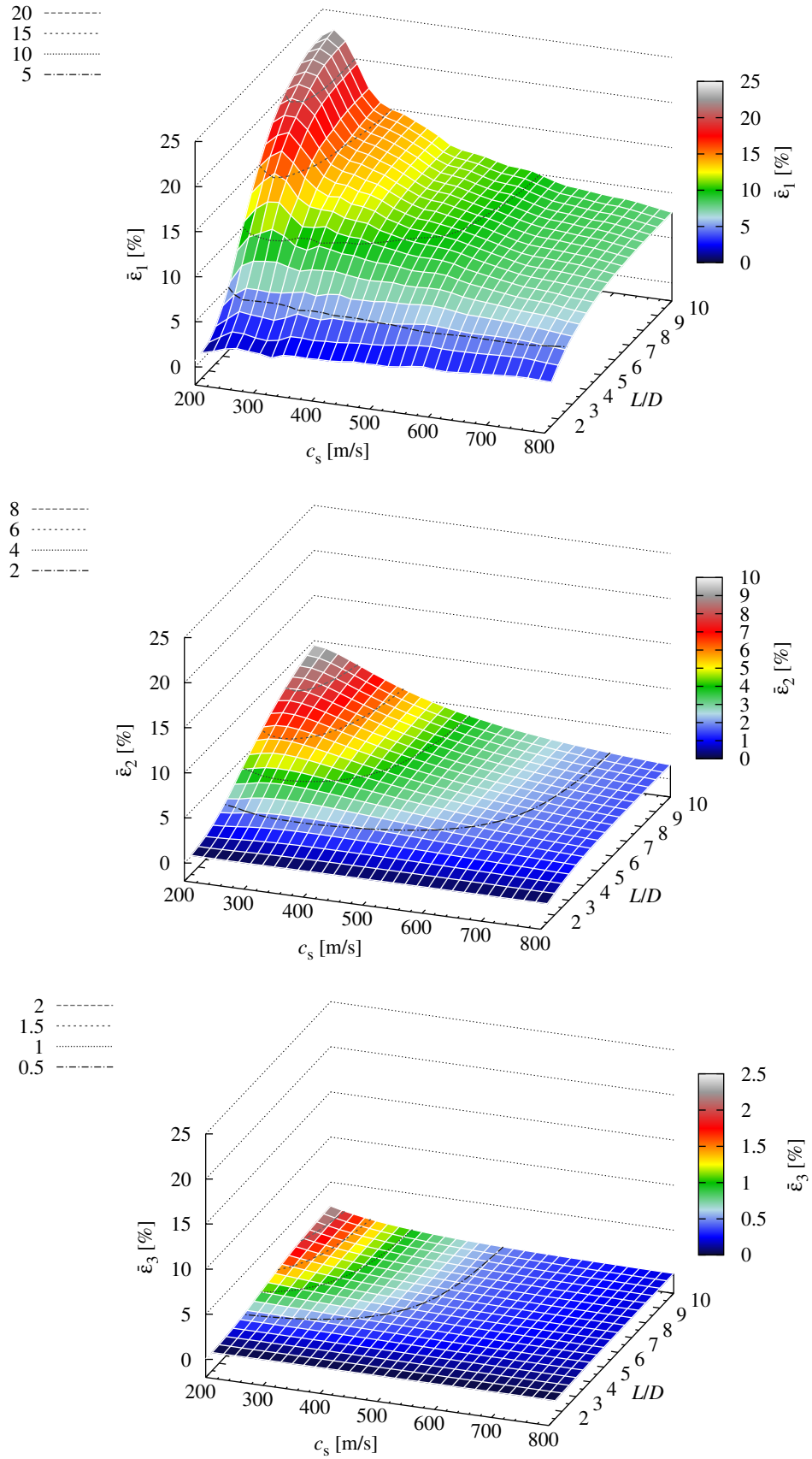
**Figura 4.11:** Distribución del error promedio  $\bar{\varepsilon}_j$  del espectro de respuesta, calculado en cota superior de la estructura, cometido en cada tramo  $j$  de los tres en que se ha dividido el eje de periodo al asumir una estructura rígida en lugar de su verdadera flexibilidad en función de  $L/D$  y  $c_s$ . Estructura maciza. Profundidad de enterramiento  $L = 60\text{m}$ .



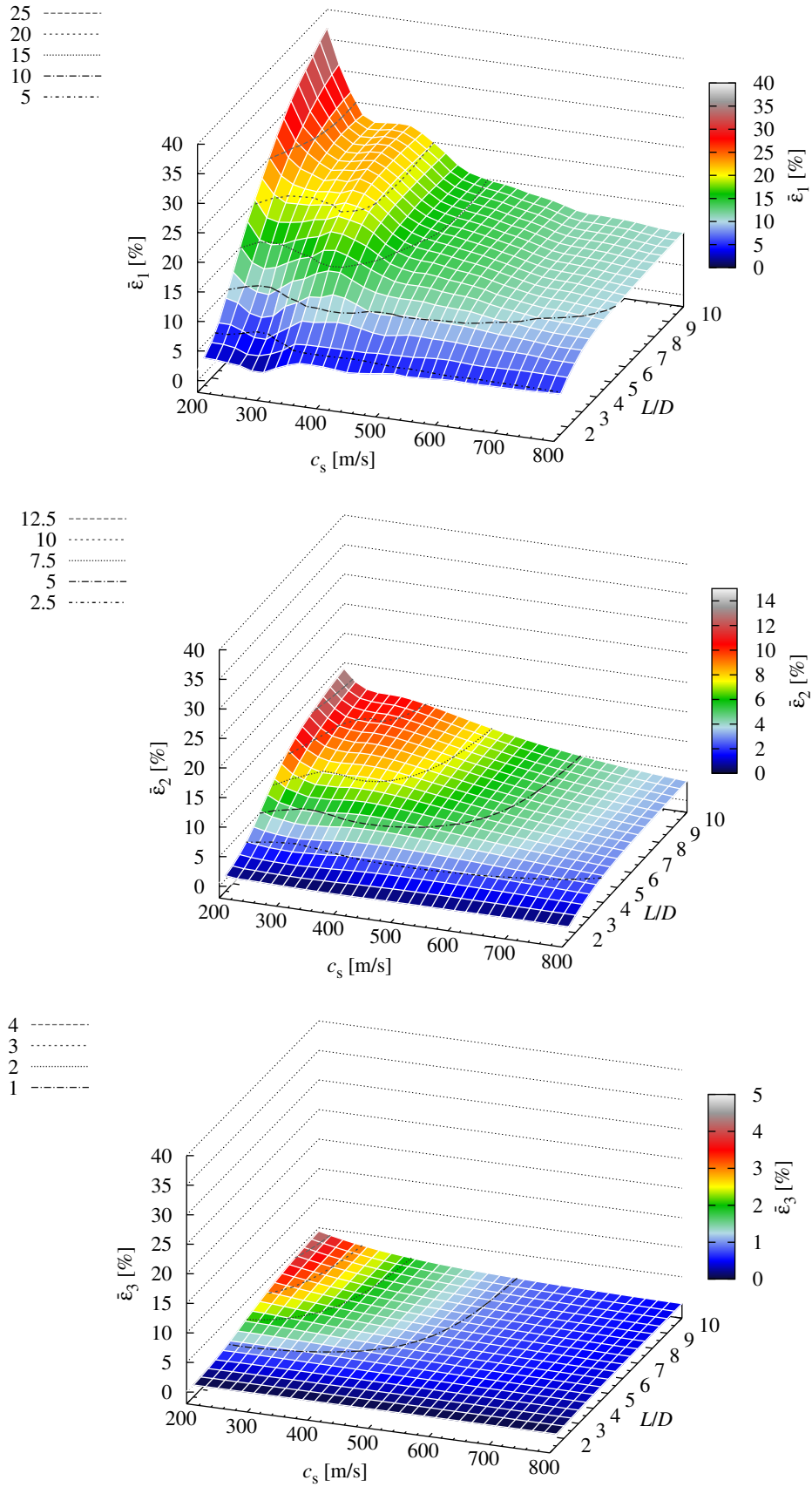
**Figura 4.12:** Distribución del error promedio  $\bar{\varepsilon}_j$  del espectro de respuesta, calculado en cota superior de la estructura, cometido en cada tramo  $j$  de los tres en que se ha dividido el eje de periodo al asumir una estructura rígida en lugar de su verdadera flexibilidad en función de  $L/D$  y  $c_s$ . Estructura hueca. Profundidad de enterramiento  $L = 5$  m.



**Figura 4.13:** Distribución del error promedio  $\bar{\epsilon}_j$  del espectro de respuesta, calculado en cota superior de la estructura, cometido en cada tramo  $j$  de los tres en que se ha dividido el eje de periodo al asumir una estructura rígida en lugar de su verdadera flexibilidad en función de  $L/D$  y  $c_s$ . Estructura hueca. Profundidad de enterramiento  $L = 10$  m.

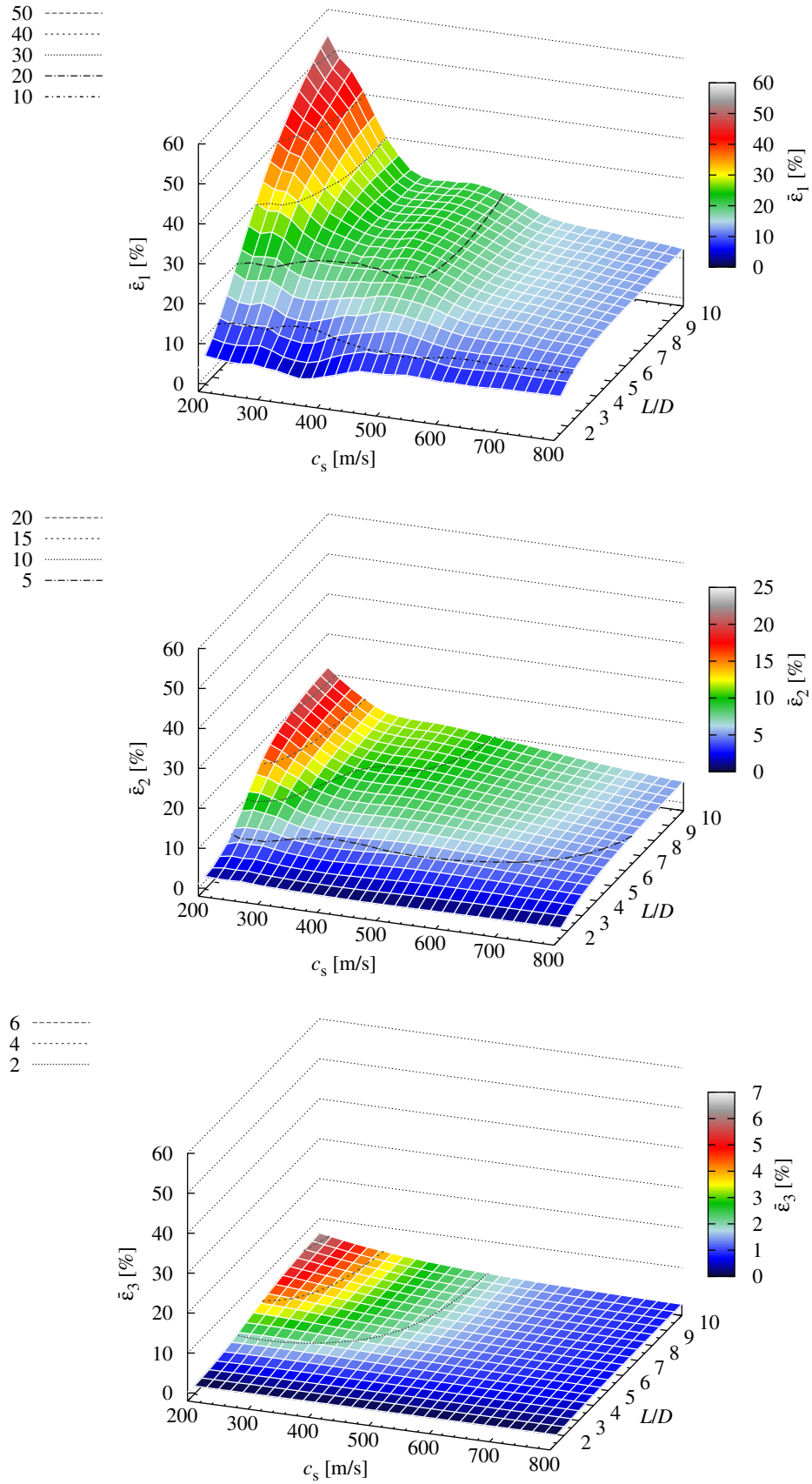


**Figura 4.14:** Distribución del error promedio  $\bar{\epsilon}_j$  del espectro de respuesta, calculado en cota superior de la estructura, cometido en cada tramo  $j$  de los tres en que se ha dividido el eje de periodo al asumir una estructura rígida en lugar de su verdadera flexibilidad en función de  $L/D$  y  $c_s$ . Estructura hueca. Profundidad de enterramiento  $L = 20\text{m}$ .

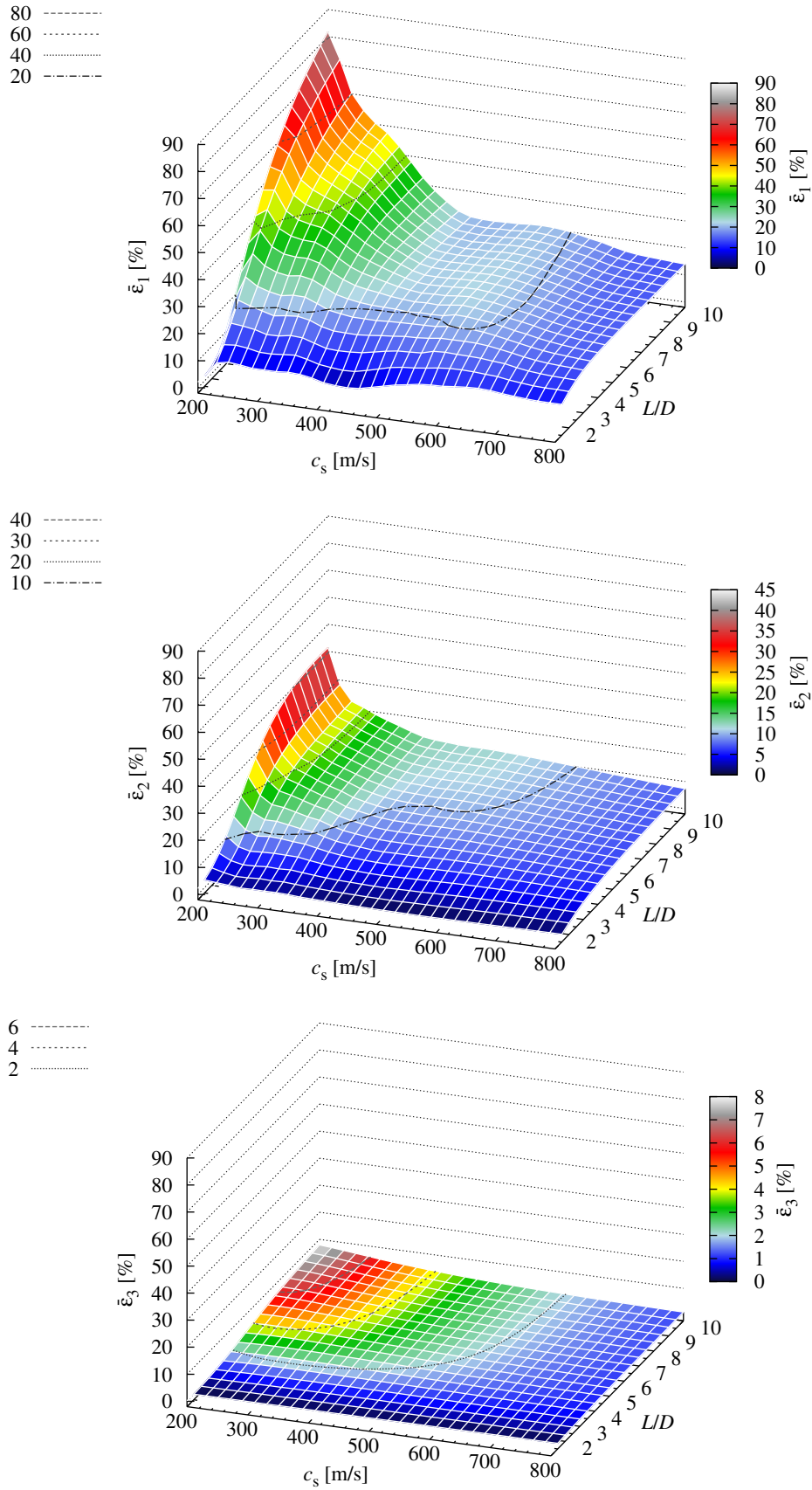


**Figura 4.15:** Distribución del error promedio  $\bar{\epsilon}_j$  del espectro de respuesta, calculado en cota superior de la estructura, cometido en cada tramo  $j$  de los tres en que se ha dividido el eje de periodo al asumir una estructura rígida en lugar de su verdadera flexibilidad en función de  $L/D$  y  $c_s$ . Estructura hueca. Profundidad de enterramiento  $L = 30$  m.



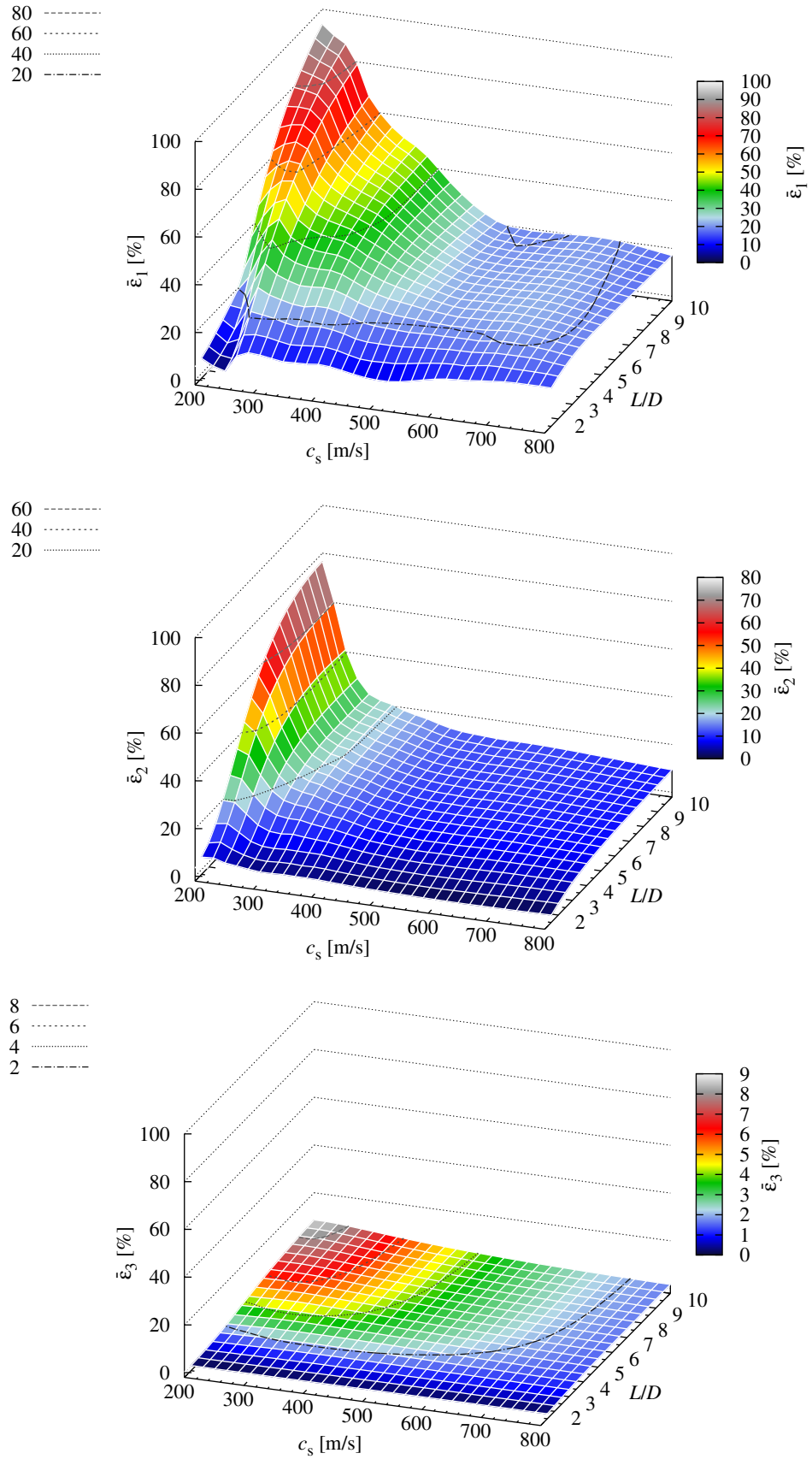


**Figura 4.16:** Distribución del error promedio  $\bar{\epsilon}_j$  del espectro de respuesta, calculado en cota superior de la estructura, cometido en cada tramo  $j$  de los tres en que se ha dividido el eje de periodo al asumir una estructura rígida en lugar de su verdadera flexibilidad en función de  $L/D$  y  $c_s$ . Estructura hueca. Profundidad de enterramiento  $L = 40\text{m}$ .



**Figura 4.17:** Distribución del error promedio  $\bar{\varepsilon}_j$  del espectro de respuesta, calculado en cota superior de la estructura, cometido en cada tramo  $j$  de los tres en que se ha dividido el eje de periodo al asumir una estructura rígida en lugar de su verdadera flexibilidad en función de  $L/D$  y  $c_s$ . Estructura hueca. Profundidad de enterramiento  $L = 50$  m.





**Figura 4.18:** Distribución del error promedio  $\bar{\varepsilon}_j$  del espectro de respuesta, calculado en cota superior de la estructura, cometido en cada tramo  $j$  de los tres en que se ha dividido el eje de periodo al asumir una estructura rígida en lugar de su verdadera flexibilidad en función de  $L/D$  y  $c_s$ . Estructura hueca. Profundidad de enterramiento  $L = 60\text{m}$ .



# Capítulo 5

## Modelo MEC–MEF para el análisis dinámico de estructuras de edificación cimentadas en terrenos elásticos o poroelásticos

### 5.1 Introducción

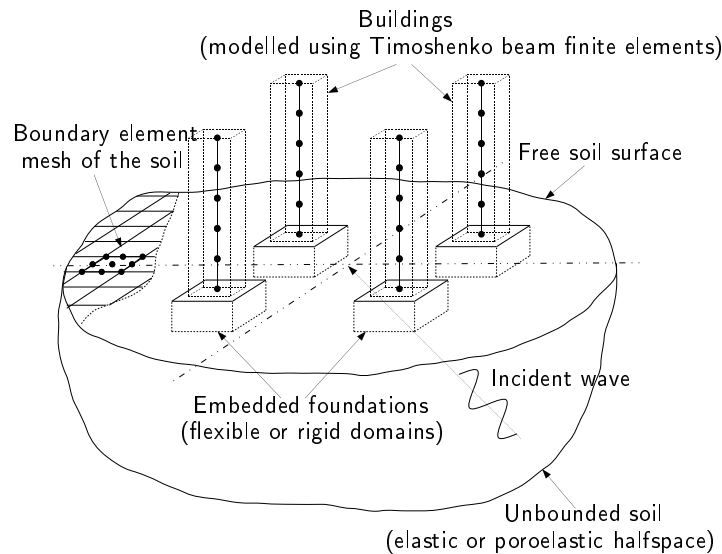
En este capítulo se presenta la formulación de un modelo acoplado de elementos de contorno – elementos finitos (MEC–MEF) en el dominio de la frecuencia para estudiar la respuesta dinámica y sísmica de estructuras de edificación, aisladas o en grupos, cimentadas en terrenos elásticos o poroelásticos. Para tal fin, el modelo de elementos de contorno presentado en el capítulo 2 se ha dotado de características adicionales con el objetivo de reducir el coste computacional cuando se trata con estructuras de este tipo. Dicho modelo previo de elementos de contorno ha sido usado con anterioridad en el estudio de diferentes problemas de interés en el campo de la ingeniería sísmica, como pueden ser por ejemplo la respuesta de: presas incluyendo los efectos de la distribución espacial de la excitación y la presencia de sedimentos poroelásticos [MAD02, MAD04]; pilotes y grupos de pilotes en terrenos poroelásticos [MAG05]; o como se puede ver en el capítulo 3 anterior, para el estudio de estructuras enterradas poco esbeltas y los efectos de su flexibilidad en la respuesta [VAS<sup>+</sup>13].

En los problemas de aplicación de este nuevo modelo MEC–MEF, el terreno puede ser considerado como una región elástica o poroelástica usando elementos de contorno. Cuando la hipótesis de rigidez infinita es aplicable a la cimentación, este modelo permite incorporar regiones con comportamiento de sólido rígido embebidas en el terreno. El acoplamiento entre la malla de elementos de contorno y la cimentación rígida es posible a través de una estrategia numérica basada en la aplicación de ecuaciones adicionales de equilibrio y compatibilidad en las interfases entre el suelo y la cimentación. De esta manera el movimiento de la cimentación puede ser medido a través de un único punto de referencia arbitrario, lo que supone una considerable reducción en el número de grados de libertad del problema. La implementación en el modelo de elementos de contorno de esta estrategia es explicada en el apartado 5.2.

Las estructuras de edificación son modeladas como vigas homogéneas y elásticas usando elementos finitos de dos nodos basados en la teoría de vigas de Timoshenko, por lo que se considera la deformación por cortante. Por otro lado, la excentricidad torsional de edificios con sección no simétrica también es tomada en cuenta. En el apartado 5.3 se presentan las características

del elemento finito utilizado así como su matriz de rigidez modificada para tener en cuenta el efecto de la excentricidad torsional. El punto de referencia de la cimentación rígida será usado para acoplar las ecuaciones del movimiento de la superestructura al sistema de ecuaciones que define el comportamiento del terreno y la cimentación.

El modelo acoplado de elementos de contorno y elementos finitos que se presenta es capaz de representar de manera rigurosa los aspectos esenciales del problema que se pretende estudiar consiguiendo al mismo tiempo ser versátil y eficiente desde el punto de vista computacional. La aplicación de este modelo no se reduce sólo al caso de estructuras de edificación (como puede verse en la figura 5.1), sino también a otro tipo de estructuras, como pueden ser por ejemplo las de aerogeneradores.



**Figura 5.1:** Grupo de edificios cercanos cimentados en un semiespacio. Esquema de los principales aspectos incluidos en el modelo.

### 5.2 Condiciones de cuerpo rígido

En este trabajo, las regiones discretizadas usando elementos de contorno son modeladas como lineales, homogéneas, isótropas, elásticas o poroelásticas, considerando además condiciones de contacto soldadas entre los diferentes dominios. Como ya se dijo en el capítulo anterior, para la discretización de los contornos se usan elementos cuadráticos tridimensionales triangulares (6 nodos) y/o cuadriláteros (9 nodos). Para la incorporación al modelo de elementos de contorno de las condiciones de cuerpo rígido, partimos del sistema de ecuaciones (2.90) presentado en el capítulo 2 y que volvemos a escribir aquí para mayor comodidad:

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{p} \quad (5.1)$$

donde los elementos de las matrices  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{G}$  son obtenidos por integración del producto entre la solución fundamental armónica y las correspondientes funciones de forma, y siendo  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{p}$  los vectores de los desplazamientos y tensiones nodales.

En el caso de que se trate con suelos saturados de agua, se adopta la teoría de Biot [Bio56a] para suelos poroelásticos, los vectores de desplazamiento normal del fluido  $\mathbf{U}$  y tensión equivalente  $\tau$  en los nodos son también variables del problema. Es por ello que para este tipo de dominios

y para mayor claridad en la explicación, el sistema de ecuaciones (5.1) se expresa como sigue [Dom92, MAG05]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^{ss} & \mathbf{H}^{sw} \\ \mathbf{H}^{ws} & \mathbf{H}^{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^{ss} & \mathbf{G}^{sw} \\ \mathbf{G}^{ws} & \mathbf{G}^{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{U} \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

donde los superíndices 's' y 'w' están referidos respectivamente al esqueleto sólido y a la fase fluida del medio poroelástico y siendo en este caso  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{p}$  los vectores de desplazamientos y tensiones nodales sobre el esqueleto sólido. Los elementos de las submatrices  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{G}$  son calculados por integración del producto de la solución fundamental armónica en tres dimensiones y las funciones de forma sobre los elementos de contorno.

Considerando que ondas armónicas planas, originadas desde una fuente lejana, afectan a la localización de la cimentación, la presencia de ésta provoca distorsiones en los campos de onda incidentes. Los campos incidentes son completamente conocidos. Los campos totales de desplazamientos  $\mathbf{u}$  y tensiones  $\mathbf{p}$  son la suma del campo incidente y el campo difractado, los cuales se denotan respectivamente con los subíndices I y D, por lo que se puede escribir  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_I + \mathbf{u}_D$  y  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_I + \mathbf{p}_D$ . En el caso de que el semiespacio por el que se propagan las ondas sea de tipo poroelástico, hay que considerar los campos incidentes de las tensiones equivalentes en el fluido y el desplazamiento normal del mismo, los cuales se denotan respectivamente como  $\boldsymbol{\tau}_I$  and  $\mathbf{U}_I$ . Por tanto,  $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_I + \boldsymbol{\tau}_D$  y  $\mathbf{U} = \mathbf{U}_I + \mathbf{U}_D$ . Teniendo todo esto en cuenta, los sistemas de ecuaciones (5.1) y (5.2) pueden escribirse, respectivamente, para el campo difractado como:

$$\mathbf{H}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_I) = \mathbf{G}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_I) \quad (5.3)$$

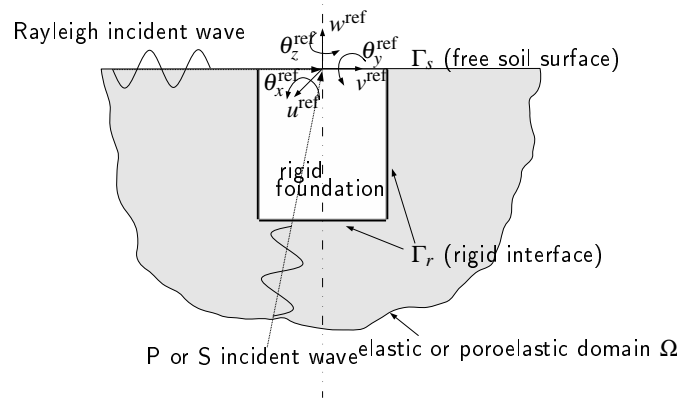
$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^{ss} & \mathbf{H}^{sw} \\ \mathbf{H}^{ws} & \mathbf{H}^{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} - \mathbf{u}_I \\ \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^{ss} & \mathbf{G}^{sw} \\ \mathbf{G}^{ws} & \mathbf{G}^{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} - \mathbf{p}_I \\ \mathbf{U} - \mathbf{U}_I \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

En los problemas en los que la hipótesis de rigidez infinita se puede considerar para la cimentación, se puede reducir el número de grados de libertad de los mismos. La estrategia que se va a implementar para incluir las restricciones de cuerpo rígido es una de las tres técnicas propuestas por [TM07] aplicadas por estos autores a un problema en dos dimensiones en el que la región del terreno es de naturaleza viscoelástica. En este estudio, se amplía dicha estrategia para aplicarla problemas tridimensionales, incluyendo también la posibilidad de que el terreno pueda tener naturaleza poroelástica. El proceso de implementación se puede resumir en la incorporación de la compatibilidad cinemática y las condiciones de equilibrio en las matrices de las ecuaciones (5.3) y (5.4). Se asume que el comportamiento de cuerpo rígido es aplicable a la cimentación, la cual está embebida en un semiespacio elástico o poroelástico (ver figura 5.2). La superficie libre del suelo y la interfase rígida entre el suelo y la cimentación se etiquetan respectivamente como  $\Gamma_s$  y  $\Gamma_r$ . Así, los sistemas de ecuaciones (5.3) y (5.4) pueden escribirse respectivamente como sigue:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ss} & \mathbf{H}_{sr} \\ \mathbf{H}_{rs} & \mathbf{H}_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_s - (\mathbf{u}_I)_s \\ \mathbf{u}_r - (\mathbf{u}_I)_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{ss} & \mathbf{G}_{sr} \\ \mathbf{G}_{rs} & \mathbf{G}_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_s - (\mathbf{p}_I)_s \\ \mathbf{p}_r - (\mathbf{p}_I)_r \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ss}^{ss} & \mathbf{H}_{sr}^{ss} & \mathbf{H}_{ss}^{sw} & \mathbf{H}_{sr}^{sw} \\ \mathbf{H}_{rs}^{ss} & \mathbf{H}_{rr}^{ss} & \mathbf{H}_{rs}^{sw} & \mathbf{H}_{rr}^{sw} \\ \mathbf{H}_{ss}^{ws} & \mathbf{H}_{sr}^{ws} & \mathbf{H}_{ss}^{ww} & \mathbf{H}_{sr}^{ww} \\ \mathbf{H}_{rs}^{ws} & \mathbf{H}_{rr}^{ws} & \mathbf{H}_{rs}^{ww} & \mathbf{H}_{rr}^{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_s - (\mathbf{u}_I)_s \\ \mathbf{u}_r - (\mathbf{u}_I)_r \\ \boldsymbol{\tau}_s - (\boldsymbol{\tau}_I)_s \\ \boldsymbol{\tau}_r - (\boldsymbol{\tau}_I)_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{ss}^{ss} & \mathbf{G}_{sr}^{ss} & \mathbf{G}_{ss}^{sw} & \mathbf{G}_{sr}^{sw} \\ \mathbf{G}_{rs}^{ss} & \mathbf{G}_{rr}^{ss} & \mathbf{G}_{rs}^{sw} & \mathbf{G}_{rr}^{sw} \\ \mathbf{G}_{ss}^{ws} & \mathbf{G}_{sr}^{ws} & \mathbf{G}_{ss}^{ww} & \mathbf{G}_{sr}^{ww} \\ \mathbf{G}_{rs}^{ws} & \mathbf{G}_{rr}^{ws} & \mathbf{G}_{rs}^{ww} & \mathbf{G}_{rr}^{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_s - (\mathbf{p}_I)_s \\ \mathbf{p}_r - (\mathbf{p}_I)_r \\ \mathbf{U}_s - (\mathbf{U}_I)_s \\ \mathbf{U}_r - (\mathbf{U}_I)_r \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

siendo los valores de las tensiones y la tensión equivalente del fluido iguales a cero en la superficie libre, por tanto, como condiciones de contorno del problema, tenemos que  $\mathbf{p}_s = (\mathbf{p}_I)_s = 0$  y  $\boldsymbol{\tau}_s = (\boldsymbol{\tau}_I)_s = 0$ .



**Figura 5.2:** Modelo rígido para la cimentación. Superficie libre  $\Gamma_s$  ( $\mathbf{p}_s = 0$ ,  $\boldsymbol{\tau}_s = 0$ ) e interfase rígida  $\Gamma_r$ .

El movimiento de la cimentación rígida presenta seis grados de libertad (tres desplazamientos y tres giros) que pueden ser condensados en un punto de referencia arbitrario de coordenadas  $(x^{\text{ref}}, y^{\text{ref}}, z^{\text{ref}})$  y ordenados en el vector de desplazamiento  $\mathbf{u}^{\text{ref}}$  de dicho punto de la siguiente forma

$$\mathbf{u}^{\text{ref}} = \begin{bmatrix} u^{\text{ref}} \\ v^{\text{ref}} \\ w^{\text{ref}} \\ \theta_x^{\text{ref}} \\ \theta_y^{\text{ref}} \\ \theta_z^{\text{ref}} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

La relación de compatibilidad cinemática que existe entre el punto de referencia y cualquier nodo  $i$ , de coordenadas  $(x^i, y^i, z^i)$ , en la interfase rígida  $\Gamma_r$  puede escribirse en forma matricial como

$$\mathbf{u}^i = \mathbf{C}^i \mathbf{u}^{\text{ref}} \quad (5.8)$$

donde la matriz  $\mathbf{C}^i$  es la que relaciona de manera cinemática el vector de desplazamientos  $\mathbf{u}^i$  de cada nodo  $i$  con el punto de referencia, expresándose éstos como

$$\mathbf{C}^i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & (z^i - z^{\text{ref}}) & (y^{\text{ref}} - y^i) \\ 0 & 1 & 0 & (z^{\text{ref}} - z^i) & 0 & (x^i - x^{\text{ref}}) \\ 0 & 0 & 1 & (y^i - y^{\text{ref}}) & (x^{\text{ref}} - x^i) & 0 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{u}^i = \begin{bmatrix} u^i \\ v^i \\ w^i \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Para todos los nodos  $N_r$  de la interfase rígida  $\Gamma_r$ , dicha relación cinemática (5.8) puede escribirse como

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{C} \mathbf{u}^{\text{ref}} \quad (5.10)$$

donde  $\mathbf{u}_r$  contiene los vectores de desplazamientos nodales y la matriz  $\mathbf{C}$  cada una de las matrices que relaciona cada nodo en  $\Gamma_r$  con el punto de referencia. Por tanto se expresan de la siguiente manera

$$\mathbf{u}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}^i \\ \vdots \\ \mathbf{u}^{N_r} \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{C}^i \\ \vdots \\ \mathbf{C}^{N_r} \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Una vez definida la relación cinemática (5.10), es necesario que se cumpla también el equilibrio entre las fuerzas que actúan sobre la cimentación rígida y las tensiones sobre la interfase rígida  $\Gamma_r$ , tanto del esqueleto sólido como de la fase fluida. Llamaremos  $\tau^j(x, y, z)$  a la tensión equivalente del fluido,  $\mathbf{p}^j(x, y, z)$  al vector de tensiones de la fase sólida y  $\mathbf{n}^j(x, y, z)$  al vector normal del elemento  $j$  perteneciente a  $\Gamma_r$ . Estos dos últimos se escriben respectivamente de la siguiente forma

$$\mathbf{p}^j(x, y, z) = \begin{bmatrix} p_x^j \\ p_y^j \\ p_z^j \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{n}^j(x, y, z) = \begin{bmatrix} n_x^j \\ n_y^j \\ n_z^j \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Teniendo en cuenta las fuerzas de inercia y el vector resultante de las fuerzas externas que actúan sobre el centro de gravedad de la cimentación  $\mathbf{F}^{\text{cg}} = (F_x^{\text{cg}}, F_y^{\text{cg}}, F_z^{\text{cg}}, M_x^{\text{cg}}, F_y^{\text{cg}}, F_z^{\text{cg}})^T$ , las ecuaciones que determinan la relación de equilibrio en el centro de gravedad pueden expresarse como sigue

$$\begin{aligned}
 F_k^{cg} &= \sum_{j=1}^{NE_r} \int_{\Gamma_r^j} (p_k^j + \tau^j n_k^j) d\Gamma_r^j - \omega^2 M u_k^{cg} \quad ; \quad k = x, y, z \\
 M_x^{cg} &= \sum_{j=1}^{NE_r} \left( \int_{\Gamma_r^j} (p_y^j + \tau^j n_y^j) (z^{cg} - z^j) d\Gamma_r^j + \right. \\
 &\quad \left. \int_{\Gamma_r^j} (p_z^j + \tau^j n_z^j) (y^j - y^{cg}) d\Gamma_r^j \right) - \omega^2 I_x^{cg} \theta_x^{cg} \\
 M_y^{cg} &= \sum_{j=1}^{NE_r} \left( \int_{\Gamma_r^j} (p_x^j + \tau^j n_x^j) (z^j - z^{cg}) d\Gamma_r^j + \right. \\
 &\quad \left. \int_{\Gamma_r^j} (p_z^j + \tau^j n_z^j) (x^{cg} - x^j) d\Gamma_r^j \right) - \omega^2 I_y^{cg} \theta_y^{cg} \\
 M_z^{cg} &= \sum_{j=1}^{NE_r} \left( \int_{\Gamma_r^j} (p_x^j + \tau^j n_x^j) (y^{cg} - y^j) d\Gamma_r^j + \right. \\
 &\quad \left. \int_{\Gamma_r^j} (p_y^j + \tau^j n_y^j) (x^j - x^{cg}) d\Gamma_r^j \right) - \omega^2 I_z^{cg} \theta_z^{cg}
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

siendo  $M$  la masa total e  $I_x^{cg}$ ,  $I_y^{cg}$ ,  $I_z^{cg}$  los momentos de inercia de la cimentación. Las coordenadas del centro de gravedad vienen dadas por  $(x^{cg}, y^{cg}, z^{cg})$ ,  $NE_r$  es el número de elementos de la interfase rígida,  $\omega$  la frecuencia de excitación y  $(x^j, y^j, z^j)$  las coordenadas de los puntos que determinan el vector de posición  $\mathbf{r}^j(x, y, z)$  sobre el elemento  $j$ .

Las variables  $\mathbf{p}^j(x, y, z)$ ,  $\tau^j(x, y, z)$  y  $\mathbf{r}^j(x, y, z)$  sobre el elemento  $j$  pueden ser expresadas como la suma de los productos del valor de las mismas en el nodo  $m$  por la función de forma  $\phi_m^j(\xi_1, \xi_2)$  (ver tabla 2.1 en el capítulo 2) en dicho nodo del elemento  $j$ . Esto último puede expresarse de la siguiente manera

$$p_x^j = \sum_{m=1}^{N_j} (p_x^j)_m \phi_m^j(\xi_1, \xi_2) ; p_y^j = \sum_{m=1}^{N_j} (p_y^j)_m \phi_m^j(\xi_1, \xi_2) ; p_z^j = \sum_{m=1}^{N_j} (p_z^j)_m \phi_m^j(\xi_1, \xi_2) \tag{5.14}$$

$$\tau^j = \sum_{m=1}^{N_j} \tau_m^j \phi_m^j(\xi_1, \xi_2) \tag{5.15}$$

$$x^j = \sum_{m=1}^{N_j} x_m^j \phi_m^j(\xi_1, \xi_2) ; y^j = \sum_{m=1}^{N_j} y_m^j \phi_m^j(\xi_1, \xi_2) ; z^j = \sum_{m=1}^{N_j} z_m^j \phi_m^j(\xi_1, \xi_2) \tag{5.16}$$

donde  $N_j$  es el número de nodos del elemento  $j$ . Si sustituimos (5.14), (5.15) y (5.16) en el grupo de ecuaciones (5.13), este último puede escribirse de manera compacta como

$$\mathbf{F}^{cg} = \mathbf{E} \mathbf{p}_r + \mathbf{J} \boldsymbol{\tau}_r - \omega^2 \mathbf{M} \mathbf{u}^{cg} \tag{5.17}$$

siendo  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{J}$  las matrices de equilibrio donde cada componente de la matriz es igual la suma de las integrales de las funciones de forma del nodo  $i$  sobre los elementos a los que dicho nodo  $i$  pertenece.  $\mathbf{M}$  es una matriz diagonal que contiene la masa total y los momentos de inercia.



$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_x^{cg} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_y^{cg} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_z^{cg} \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

$\mathbf{p}_r$  contiene los vectores de las tensiones nodales,  $\tau_r$  los valores nodales de la tensión equivalente en el fluido y  $\mathbf{u}^{cg}$  es el vector de desplazamientos del centro de gravedad de la cimentación:

$$\mathbf{p}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{p}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{p}^i \\ \vdots \\ \mathbf{p}^{N_r} \end{bmatrix} ; \quad \tau_r = \begin{bmatrix} \tau^1 \\ \vdots \\ \tau^i \\ \vdots \\ \tau^{N_r} \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{u}^{cg} = \begin{bmatrix} u^{cg} \\ v^{cg} \\ w^{cg} \\ \theta_x^{cg} \\ \theta_y^{cg} \\ \theta_z^{cg} \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

El grupo de ecuaciones de equilibrio (5.17), definido en el centro de gravedad del cuerpo rígido, puede generalizarse para un punto de referencia arbitrario al considerar las relaciones cinemáticas y de equilibrio entre ambos puntos. Estas relaciones pueden expresarse respectivamente de forma matricial de la siguiente forma:

$$\mathbf{u}^{cg} = \mathbf{L}\mathbf{u}^{ref} ; \quad \mathbf{F}^{cg} = \mathbf{T}\mathbf{F}^{ref} \quad (5.20)$$

donde  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{T}$  son las matrices que relacionan respectivamente los desplazamientos y fuerzas del centro de masa y punto de referencia. Estas dependen únicamente de las coordenadas de ambos puntos y se cumple que la inversa de la traspuesta de  $\mathbf{L}$  es igual a  $\mathbf{T}$ , es decir  $\mathbf{T} = (\mathbf{L}^T)^{-1}$ , por tanto se presenta

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & (z^{cg} - z^{ref}) & (y^{ref} - y^{cg}) \\ 0 & 1 & 0 & (z^{ref} - z^{cg}) & 0 & (x^{cg} - x^{ref}) \\ 0 & 0 & 1 & (y^{cg} - y^{ref}) & (x^{ref} - x^{cg}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

Introduciendo las expresiones (5.20) en la ecuación de equilibrio del cuerpo rígido (5.17), ésta última se escribe para el punto de referencia como sigue

$$\mathbf{T}\mathbf{F}^{ref} = \mathbf{E}\mathbf{p}_r + \mathbf{J}\tau_r - \omega^2 \mathbf{M}\mathbf{L}\mathbf{u}^{ref} \quad (5.22)$$

Hasta aquí se han definido las condiciones de compatibilidad cinemática (5.10) y de equilibrio (5.22) de la cimentación rígida. El siguiente paso es introducir ambas en los sistemas (5.5) y (5.6) según se considere la naturaleza del semiespacio como viscoelástica o poroelástica. Por tanto, asumiendo condiciones de contacto soldadas entre la cimentación rígida y el suelo, teniendo en cuenta las condiciones de contorno y reordenando, el sistema (5.5) para el caso viscoelástico conduce a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ss} & \mathbf{H}_{sr} \mathbf{C} & -\mathbf{G}_{sr} & \emptyset \\ \mathbf{H}_{rs} & \mathbf{H}_{rr} \mathbf{C} & -\mathbf{G}_{rr} & \emptyset \\ \emptyset & -\omega^2 \mathbf{M} \mathbf{L} & \mathbf{E} & -\mathbf{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_s \\ \mathbf{u}^{\text{ref}} \\ \mathbf{p}_r \\ \mathbf{F}^{\text{ref}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ss} & \mathbf{H}_{sr} & -\mathbf{G}_{sr} \\ \mathbf{H}_{rs} & \mathbf{H}_{rr} & -\mathbf{G}_{rr} \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{u}_1)_s \\ (\mathbf{u}_1)_r \\ (\mathbf{p}_1)_r \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

y el sistema (5.6) para un semiespacio poroelástico se escribe

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ss}^{ss} & -\mathbf{G}_{ss}^{sw} & \mathbf{H}_{ss}^{ss} \mathbf{C} & -\mathbf{G}_{sr}^{sw} & -\mathbf{G}_{sr}^{ss} & \mathbf{H}_{sr}^{sw} & \emptyset \\ \mathbf{H}_{rs}^{ss} & -\mathbf{G}_{rs}^{sw} & \mathbf{H}_{rr}^{ss} \mathbf{C} & -\mathbf{G}_{rr}^{sw} & -\mathbf{G}_{rr}^{ss} & \mathbf{H}_{rr}^{sw} & \emptyset \\ \mathbf{H}_{ss}^{ws} & -\mathbf{G}_{ss}^{ww} & \mathbf{H}_{sr}^{ws} \mathbf{C} & -\mathbf{G}_{sr}^{ww} & -\mathbf{G}_{sr}^{ws} & \mathbf{H}_{sr}^{ww} & \emptyset \\ \mathbf{H}_{rs}^{ws} & -\mathbf{G}_{rs}^{ww} & \mathbf{H}_{rr}^{ws} \mathbf{C} & -\mathbf{G}_{rr}^{ww} & -\mathbf{G}_{rr}^{ws} & \mathbf{H}_{rr}^{ww} & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & -\omega^2 \mathbf{M} \mathbf{L} & \emptyset & \mathbf{E} & \mathbf{J} & -\mathbf{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_s \\ \mathbf{U}_s \\ \mathbf{u}^{\text{ref}} \\ \mathbf{U}_r \\ \mathbf{p}_r \\ \tau_r \\ \mathbf{F}^{\text{ref}} \end{bmatrix} = \quad (5.24)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ss}^{ss} & -\mathbf{G}_{ss}^{sw} & \mathbf{H}_{ss}^{ss} & -\mathbf{G}_{sr}^{sw} & -\mathbf{G}_{sr}^{ss} & \mathbf{H}_{sr}^{sw} \\ \mathbf{H}_{rs}^{ss} & -\mathbf{G}_{rs}^{sw} & \mathbf{H}_{rr}^{ss} & -\mathbf{G}_{rr}^{sw} & -\mathbf{G}_{rr}^{ss} & \mathbf{H}_{rr}^{sw} \\ \mathbf{H}_{ss}^{ws} & -\mathbf{G}_{ss}^{ww} & \mathbf{H}_{sr}^{ws} & -\mathbf{G}_{sr}^{ww} & -\mathbf{G}_{sr}^{ws} & \mathbf{H}_{sr}^{ww} \\ \mathbf{H}_{rs}^{ws} & -\mathbf{G}_{rs}^{ww} & \mathbf{H}_{rr}^{ws} & -\mathbf{G}_{rr}^{ww} & -\mathbf{G}_{rr}^{ws} & \mathbf{H}_{rr}^{ww} \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{u}_1)_s \\ (\mathbf{U}_1)_s \\ (\mathbf{u}_1)_r \\ (\mathbf{U}_1)_r \\ (\mathbf{p}_1)_r \\ (\tau_1)_r \end{bmatrix}$$

En este último caso, para definir la relación entre el fluido en los poros y la interfase rígida, es necesario definir una condición adicional en dicha interfase entre la cimentación rígida y el terreno poroelástico. En este trabajo, se consideran dos condiciones de contacto basadas en los casos particulares de la teoría presentada por Deresiewicz y Shalak [DS63], pudiendo ser drenado o no drenado.

Por un lado, si se considera  $\Gamma_r$  como una interfase permeable (contacto drenado), el fluido circula libremente a través de los poros de la interfase y por tanto la tensión equivalente del fluido es nula  $\tau_r = 0$  y el desplazamiento normal del mismo  $\mathbf{U}_r$  es incógnita del problema.

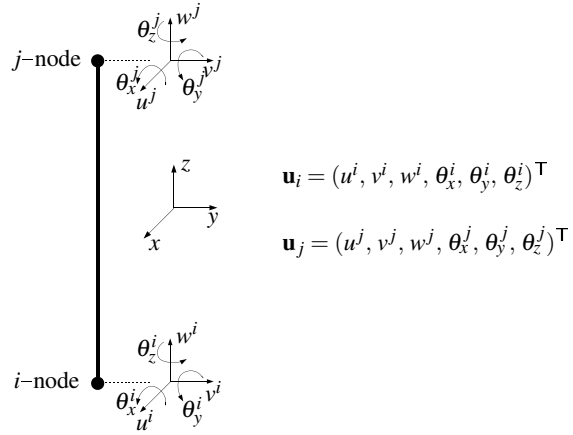
Por contra, si la interfase rígida se considera impermeable (contacto no drenado) no existe traspaso del fluido a través de  $\Gamma_r$ , por tanto la tensión equivalente del fluido  $\tau_r$  es incógnita y el desplazamiento  $\mathbf{U}_r$  del fluido esta completamente restringido por dicha interfase y es igual al desplazamiento normal del esqueleto sólido  $\mathbf{n}_r \mathbf{u}_r$ , siendo  $\mathbf{n}_r$  el vector normal a  $\Gamma_r$ .

En cualquier caso, los desplazamientos  $\mathbf{u}^{\text{ref}}$  y las reacciones  $\mathbf{F}^{\text{ref}}$  en el punto de referencia son incógnitas del sistema de ecuaciones y se usarán para acoplar, a través de condiciones cinemáticas y de equilibrio, la cimentación rígida y la base de la superestructura, discretizada ésta última con elementos finitos como los que se presentan en la siguiente sección. El acoplamiento entre la superestructura de elementos finitos y el dominio rígido modelado con elementos de contorno se explica con más detalle más adelante en el apartado 5.4.

### 5.3 Modelado de edificios. Elemento finito de dos nodos

En este trabajo, la superestructura es discretizada usando elementos finitos tridimensionales de dos nodos basados en la teoría de Timoshenko sobre la deformación por cortante [Tim21, Tim22] para problemas en el dominio de la frecuencia. Este elemento finito se formula para tener en cuenta los grados de libertad en dirección axial y de torsión, por lo que puede verse como una

mejora del elemento propuesto por Friedman y Kosmatka [FK93]. Se definen para el mismo seis grados de libertad por nodo que incluyen tres desplazamientos y tres giros ( $u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z$ ), tal y como puede verse en la figura 5.3

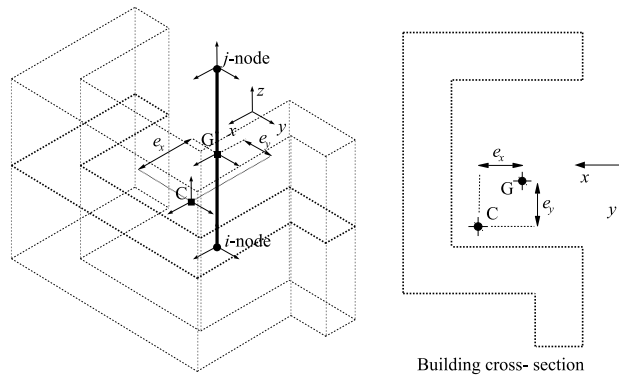


**Figura 5.3:** Elemento finito de dos nodos, basado en la teoría de Timoshenko para la deformación por cortante, usado para la discretización de edificios.

Los vectores de desplazamientos nodales  $\mathbf{u}_i$  y  $\mathbf{u}_j$ , así como los de fuerzas nodales  $\mathbf{F}_i$  y  $\mathbf{F}_j$  se expresan como

$$\mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} u^i \\ v^i \\ w^i \\ \theta_x^i \\ \theta_y^i \\ \theta_z^i \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{u}_j = \begin{bmatrix} u^j \\ v^j \\ w^j \\ \theta_x^j \\ \theta_y^j \\ \theta_z^j \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{F}_i = \begin{bmatrix} F_x^i \\ F_y^i \\ F_z^i \\ M_x^i \\ M_y^i \\ M_z^i \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{F}_j = \begin{bmatrix} F_x^j \\ F_y^j \\ F_z^j \\ M_x^j \\ M_y^j \\ M_z^j \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

Cuando se trata con edificios de sección transversal no simétrica, ver figura 5.4, el centro de esfuerzos cortantes  $C$  (punto donde al aplicar una carga transversal no se produce torsión) y el centro de masas  $G$  (donde están aplicadas las fuerzas de inercia) de la sección pueden localizarse en lugares distintos. En los casos en los que esto ocurre, la respuesta transversal y torsional de la estructura están acopladas cuando el plano que contiene la resultante de las cargas transversales no contiene el centro de esfuerzos cortantes  $C$ . El caso de torsión que se aborda a continuación es el correspondiente a torsión libre, es decir, no se han tenido en cuenta las consecuencias de las eventuales restricciones del alabeo de las secciones.



**Figura 5.4:** Modelado de edificio con una sección transversal genérica no simétrica.

La matriz de rigidez presentada por Friedman and Kosmatka [FK93] está definida en el centro de esfuerzos cortantes C. La matriz de rigidez  $\mathbf{K}_{ij}^C$  incorporando además los grados de libertad en dirección axial y torsional para un elemento  $ij$  se presenta a continuación, dividida en cuatro submatrices, como

$$\mathbf{K}_{ij}^C = \begin{bmatrix} K_{ii}^C & K_{ij}^C \\ K_{ji}^C & K_{jj}^C \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

Teniendo en cuenta que  $K_{ji}^C$  es igual a la traspuesta de  $K_{ij}^C$ ,  $K_{ji}^C = (K_{ij}^C)^T$ , las submatrices que definen  $\mathbf{K}_{ij}^C$  son

$$K_{ii}^C = \begin{bmatrix} \frac{12EI_y}{(1+\phi_y)L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{(1+\phi_y)L^2} & 0 \\ 0 & \frac{12EI_x}{(1+\phi_x)L^3} & 0 & \frac{-6EI_x}{(1+\phi_x)L^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-6EI_x}{(1+\phi_x)L^2} & 0 & \frac{4+\phi_x}{1+\phi_x} \frac{EI_x}{L} & 0 & 0 \\ \frac{6EI_y}{(1+\phi_y)L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4+\phi_y}{1+\phi_y} \frac{EI_y}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\mu J}{L} \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

$$K_{ij}^C = \begin{bmatrix} \frac{-12EI_y}{(1+\phi_y)L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{(1+\phi_y)L^2} & 0 \\ 0 & \frac{-12EI_x}{(1+\phi_x)L^3} & 0 & \frac{-6EI_x}{(1+\phi_x)L^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6EI_x}{(1+\phi_x)L^2} & 0 & \frac{2-\phi_x}{1+\phi_x} \frac{EI_x}{L} & 0 & 0 \\ \frac{-6EI_y}{(1+\phi_y)L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2-\phi_y}{1+\phi_y} \frac{EI_y}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-\mu J}{L} \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

$$K_{jj}^C = \begin{bmatrix} \frac{12EI_y}{(1+\phi_y)L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6EI_y}{(1+\phi_y)L^2} & 0 \\ 0 & \frac{12EI_x}{(1+\phi_x)L^3} & 0 & \frac{6EI_x}{(1+\phi_x)L^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6EI_x}{(1+\phi_x)L^2} & 0 & \frac{4+\phi_x}{1+\phi_x} \frac{EI_x}{L} & 0 & 0 \\ \frac{-6EI_y}{(1+\phi_y)L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4+\phi_y}{1+\phi_y} \frac{EI_y}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\mu J}{L} \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

siendo  $E$  el módulo de Young,  $\mu$  el módulo de rigidez transversal,  $A$  el área de la sección,  $I_x$ ,  $I_y$  los momentos de inercia,  $J$  la constante de rigidez a torsión y  $L$  la longitud del elemento  $ij$ . Los factores de cortante  $\phi_x$  y  $\phi_y$  se expresan como

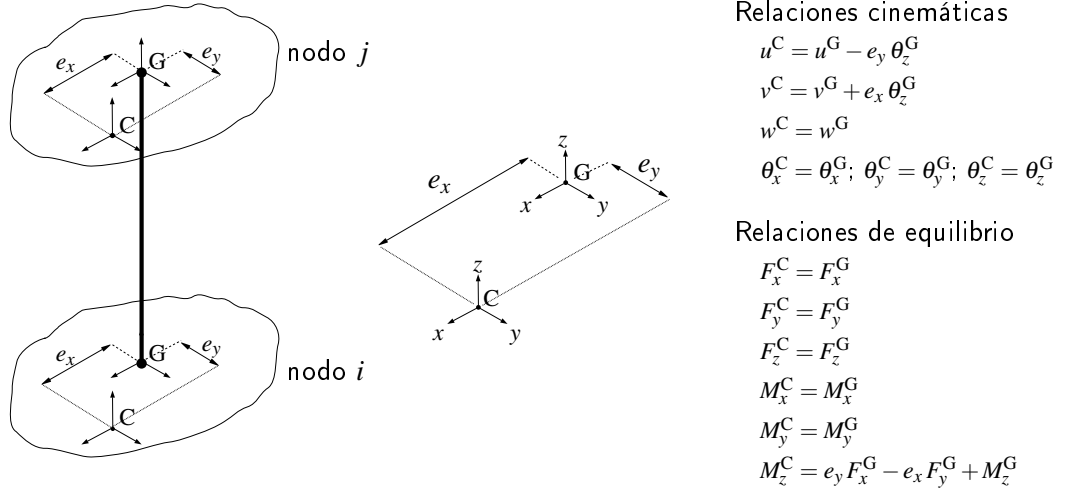
$$\phi_x = \frac{12EI_x}{\mu \kappa'_x AL^2} \quad ; \quad \phi_y = \frac{12EI_y}{\mu \kappa'_y AL^2} \quad (5.30)$$

donde  $\kappa'_x$  y  $\kappa'_y$  son los factores de corrección de cortante. Estos factores de corrección dependen de la geometría de la sección y consideran que las tensiones transversales no están distribuidas uniformemente sobre ella (ver detalles p.e. en [GW01]).

Se puede escribir, sin tener en cuenta las fuerzas inerciales, el sistema de ecuaciones que define el equilibrio del elemento  $ij$  en el punto C como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_i \\ \mathbf{F}_j \end{bmatrix}^C = \mathbf{K}_{ij}^C \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_j \end{bmatrix}^C \quad (5.31)$$

En el caso de que se consideren las fuerzas inerciales se hace necesario trasladar dicha matriz de rigidez  $\mathbf{K}_{ij}^C$  para definirla en el centro de gravedad G de la sección. Para ello se tienen en cuenta las relaciones de compatibilidad cinemática y equilibrio entre ambos puntos (ver figura 5.5), que se escriben matricialmente para el elemento  $ij$  de la siguiente manera



**Figura 5.5:** Relaciones cinemáticas y de equilibrio entre el centro de esfuerzos cortantes y el centro de gravedad de una sección genérica con excentricidad.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_j \end{bmatrix}^C = \begin{bmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_j \end{bmatrix}^G ; \quad \begin{bmatrix} \mathbf{F}_i \\ \mathbf{F}_j \end{bmatrix}^C = \begin{bmatrix} \mathbf{S}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_i \\ \mathbf{F}_j \end{bmatrix}^G \quad (5.32)$$

donde la matriz  $\mathbf{S}$  se expresa como sigue

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_y \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & e_x \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

y siendo  $\mathbf{S}'$  la inversa de la transpuesta de  $\mathbf{S}$ ;  $\mathbf{S}' = (\mathbf{S}^T)^{-1}$ .

Sustituyendo las expresiones (5.32) en (5.31), teniendo en cuenta la relación entre  $\mathbf{S}$  y  $\mathbf{S}'$  y reordenando puede escribirse el equilibrio del elemento  $ij$  en términos de desplazamientos y fuerzas en el centro de gravedad G de la sección

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_i \\ \mathbf{F}_j \end{bmatrix}^G = \begin{bmatrix} \mathbf{S}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}^T \end{bmatrix} \mathbf{K}_{ij}^C \begin{bmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_j \end{bmatrix}^G = \mathbf{K}_{ij}^G \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_j \end{bmatrix}^G \quad (5.34)$$

El producto de las matrices  $\mathbf{S}$  y la matriz  $\mathbf{K}_{ij}^C$  permite obtener la matriz de rigidez en el centro de gravedad de la sección  $\mathbf{K}_{ij}^G$ , por tanto

$$\mathbf{K}_{ij}^G = \begin{bmatrix} \mathbf{S}^T & 0 \\ 0 & \mathbf{S}^T \end{bmatrix} \mathbf{K}_{ij}^C \begin{bmatrix} \mathbf{S} & 0 \\ 0 & \mathbf{S} \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

Si dividimos la matriz  $\mathbf{K}_{ij}^G$  en cuatro submatrices, se puede expresar como

$$\mathbf{K}_{ij}^G = \begin{bmatrix} K_{ii}^G & K_{ij}^G \\ K_{ji}^G & K_{jj}^G \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

donde las submatrices que definen  $\mathbf{K}_{ij}^G$  son

$$K_{ii}^G = \begin{bmatrix} \frac{12Q_y}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6Q_y}{L^2} & \frac{-12Q_y e_y}{L^3} \\ 0 & \frac{12Q_x}{L^3} & 0 & \frac{-6Q_x}{L^2} & 0 & \frac{12Q_x e_x}{L^3} \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-6Q_x}{L^2} & 0 & \frac{(4+\phi_x)Q_x}{L} & 0 & \frac{-6Q_x e_x}{L^2} \\ \frac{6Q_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{(4+\phi_y)Q_y}{L} & \frac{-6Q_y e_y}{L^2} \\ \frac{-12Q_y e_y}{L^3} & \frac{12Q_x e_x}{L^3} & 0 & \frac{-6Q_x e_x}{L^2} & \frac{-6Q_y e_y}{L^2} & \frac{12Q_x e_x^2}{L^3} + \frac{12Q_y e_y^2}{L^3} + \frac{\mu J}{L} \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

$$K_{ij}^G = \begin{bmatrix} \frac{-12Q_y}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6Q_y}{L^2} & \frac{12Q_y e_y}{L^3} \\ 0 & \frac{-12Q_x}{L^3} & 0 & \frac{-6Q_x}{L^2} & 0 & \frac{-12Q_x e_x}{L^3} \\ 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6Q_x}{L^2} & 0 & \frac{(2-\phi_x)Q_x}{L} & 0 & \frac{6Q_x e_x}{L^2} \\ \frac{-6Q_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{(2-\phi_y)Q_y}{L} & \frac{6Q_y e_y}{L^2} \\ \frac{12Q_y e_y}{L^3} & \frac{-12Q_x e_x}{L^3} & 0 & \frac{-6Q_x e_x}{L^2} & \frac{-6Q_y e_y}{L^2} & \frac{-12Q_x e_x^2}{L^3} - \frac{12Q_y e_y^2}{L^3} - \frac{\mu J}{L} \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

$$K_{jj}^G = \begin{bmatrix} \frac{12Q_y}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6Q_y}{L^2} & \frac{-12Q_y e_y}{L^3} \\ 0 & \frac{12Q_x}{L^3} & 0 & \frac{6Q_x}{L^2} & 0 & \frac{12Q_x e_x}{L^3} \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6Q_x}{L^2} & 0 & \frac{(4+\phi_x)Q_x}{L} & 0 & \frac{6Q_x e_x}{L^2} \\ \frac{-6Q_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{(4+\phi_y)Q_y}{L} & \frac{6Q_y e_y}{L^2} \\ \frac{-12Q_y e_y}{L^3} & \frac{12Q_x e_x}{L^3} & 0 & \frac{6Q_x e_x}{L^2} & \frac{6Q_y e_y}{L^2} & \frac{12Q_x e_x^2}{L^3} + \frac{12Q_y e_y^2}{L^3} + \frac{\mu J}{L} \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

siendo

$$Q_x = \frac{EI_x}{1 + \phi_x} \quad ; \quad Q_y = \frac{EI_y}{1 + \phi_y} \quad (5.40)$$

y cumpliéndose que la traspuesta de  $K_{ij}^G$  es igual a  $K_{ji}^G$ .

En un estudio en frecuencia, si las fuerzas de inercia son consideradas se añaden a la ecuación de equilibrio (5.34) como se muestra a continuación

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_i \\ \mathbf{F}_j \end{bmatrix}^G = (\mathbf{K}_{ij}^G - \omega^2 \mathbf{M}_{ij}^G) \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_j \end{bmatrix}^G \quad (5.41)$$

donde la matriz de masa  $\mathbf{M}_{ij}^G$  del elemento  $ij$  está definida en el centro de gravedad  $G$  y es la suma de dos matrices, una  $(\mathbf{M}_t)_{ij}^G$  asociada a la inercia de traslación y otra  $(\mathbf{M}_r)_{ij}^G$  asociada a la inercia a rotación [FK93]. Ambas matrices son simétricas, de dimensiones  $12 \times 12$ , y se pueden dividir en cuatro submatrices  $6 \times 6$ , de manera que puede escribirse

$$(\mathbf{M}_t)_{ij}^G = \begin{bmatrix} (M_t)_{ii}^G & (M_t)_{ij}^G \\ (M_t)_{ji}^G & (M_t)_{jj}^G \end{bmatrix} \quad ; \quad (\mathbf{M}_r)_{ij}^G = \begin{bmatrix} (M_r)_{ii}^G & (M_r)_{ij}^G \\ (M_r)_{ji}^G & (M_r)_{jj}^G \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

Al ser ambas matrices simétricas, se cumple que para las submatrices fuera de las diagonales principales en (5.42) la traspuesta de  $(M_t)_{ij}^G$  es igual a  $(M_t)_{ji}^G$ , del mismo modo que la traspuesta de  $(M_r)_{ij}^G$  es igual a  $(M_r)_{ji}^G$ . Se escriben, por tanto, a continuación las submatrices que forman la matriz de masa asociada a la traslación

$$(\mathbf{M}_t)_{ii}^G = \begin{bmatrix} m_{11}^t & 0 & 0 & 0 & m_{15}^t & 0 \\ 0 & m_{22}^t & 0 & m_{24}^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{33}^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{42}^t & 0 & m_{44}^t & 0 & 0 \\ m_{51}^t & 0 & 0 & 0 & m_{55}^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

$$(\mathbf{M}_t)_{ij}^G = \begin{bmatrix} m_{17}^t & 0 & 0 & 0 & m_{111}^t & 0 \\ 0 & m_{28}^t & 0 & m_{210}^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{39}^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{48}^t & 0 & m_{410}^t & 0 & 0 \\ m_{57}^t & 0 & 0 & 0 & m_{511}^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

$$(\mathbf{M}_t)_{jj}^G = \begin{bmatrix} m_{77}^t & 0 & 0 & 0 & m_{711}^t & 0 \\ 0 & m_{88}^t & 0 & m_{810}^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{99}^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{108}^t & 0 & m_{1010}^t & 0 & 0 \\ m_{117}^t & 0 & 0 & 0 & m_{1111}^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

y también las submatrices que componen la matriz de masa relacionada con la rotación



$$(M_r)_{ii}^G = \begin{bmatrix} m_{11}^r & 0 & 0 & 0 & m_{15}^r & 0 \\ 0 & m_{22}^r & 0 & m_{24}^r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{42}^r & 0 & m_{44}^r & 0 & 0 \\ m_{51}^r & 0 & 0 & 0 & m_{55}^r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{66}^r \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

$$(M_r)_{ij}^G = \begin{bmatrix} m_{17}^r & 0 & 0 & 0 & m_{111}^r & 0 \\ 0 & m_{28}^r & 0 & m_{210}^r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{48}^r & 0 & m_{410}^r & 0 & 0 \\ m_{57}^r & 0 & 0 & 0 & m_{511}^r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{612}^r \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

$$(M_r)_{jj}^G = \begin{bmatrix} m_{77}^r & 0 & 0 & 0 & m_{711}^r & 0 \\ 0 & m_{88}^r & 0 & m_{810}^r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{108}^r & 0 & m_{1010}^r & 0 & 0 \\ m_{117}^r & 0 & 0 & 0 & m_{1111}^r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{1212}^r \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

Las expresiones de todos y cada uno de los elementos no nulos de las submatrices se escriben a continuación. Primero se presentan los de la matriz de masa traslacional y posteriormente lo de la matriz de masa rotacional. Por la característica de simetría, se escriben únicamente los elementos no nulos de la diagonal principal y del triángulo superior de las ambas matrices (5.42)

$$m_{11}^t = \frac{\rho AL}{210(1+\phi_y)^2} (78 + 147\phi_y + 70\phi_y^2) \quad (5.49a)$$

$$m_{15}^t = \frac{\rho AL^2}{840(1+\phi_y)^2} (44 + 77\phi_y + 35\phi_y^2) \quad (5.49b)$$

$$m_{17}^t = \frac{\rho AL}{210(1+\phi_y)^2} (27 + 63\phi_y + 35\phi_y^2) \quad (5.49c)$$

$$m_{111}^t = \frac{-\rho AL^2}{840(1+\phi_y)^2} (26 + 63\phi_y + 35\phi_y^2) \quad (5.49d)$$

$$m_{22}^t = \frac{\rho AL}{210(1+\phi_x)^2} (78 + 147\phi_x + 70\phi_x^2) \quad (5.49e)$$

$$m_{24}^t = \frac{-\rho AL^2}{840(1+\phi_x)^2} (44 + 77\phi_x + 35\phi_x^2) \quad (5.49f)$$

$$m_{28}^t = \frac{\rho AL}{210(1+\phi_x)^2} (27 + 63\phi_x + 35\phi_x^2) \quad (5.49g)$$

$$m_{210}^t = \frac{\rho AL^2}{840(1+\phi_x)^2} (26 + 63\phi_x + 35\phi_x^2) \quad (5.49h)$$

$$m_{33}^t = \frac{\rho AL}{3} \quad (5.49i)$$

$$m_{39}^t = \frac{\rho AL}{6} \quad (5.49j)$$

$$m_{44}^t = \frac{\rho AL^3}{840(1+\phi_x)^2} (8 + 14\phi_x + 7\phi_x^2) \quad (5.49k)$$

$$m_{48}^t = \frac{-\rho AL^2}{840(1+\phi_x)^2} (26 + 63\phi_x + 35\phi_x^2) \quad (5.49l)$$

$$m_{410}^t = \frac{-\rho AL^3}{840(1+\phi_x)^2} (6 + 14\phi_x + 7\phi_x^2) \quad (5.49m)$$

$$m_{55}^t = \frac{\rho AL^3}{840(1+\phi_y)^2} (8 + 14\phi_x + 7\phi_x^2) \quad (5.49n)$$

$$m_{57}^t = \frac{\rho AL^2}{840(1+\phi_y)^2} (26 + 63\phi_y + 35\phi_y^2) \quad (5.49ñ)$$

$$m_{511}^t = \frac{-\rho AL^3}{840(1+\phi_y)^2} (6 + 14\phi_y + 7\phi_y^2) \quad (5.49o)$$

$$m_{77}^t = \frac{\rho AL}{210(1+\phi_y)^2} (78 + 147\phi_y + 70\phi_y^2) \quad (5.49p)$$

$$m_{711}^t = \frac{-\rho AL^2}{840(1+\phi_y)^2} (44 + 77\phi_y + 35\phi_y^2) \quad (5.49q)$$

$$m_{88}^t = \frac{\rho AL}{210(1+\phi_x)^2} (78 + 147\phi_x + 70\phi_x^2) \quad (5.49r)$$

$$m_{810}^t = \frac{\rho AL^2}{840(1+\phi_x)^2} (44 + 77\phi_x + 35\phi_x^2) \quad (5.49s)$$

$$m_{99}^t = \frac{\rho AL}{3} \quad (5.49t)$$

$$m_{1010}^t = \frac{\rho AL^3}{840(1+\phi_x)^2} (8 + 14\phi_x + 7\phi_x^2) \quad (5.49u)$$

$$m_{1111}^t = \frac{\rho AL^3}{840(1+\phi_y)^2} (8 + 14\phi_x + 7\phi_x^2) \quad (5.49v)$$

$$m_{11}^r = \frac{6\rho I_y}{5(1+\phi_y)^2 L} \quad (5.50a)$$

$$m_{15}^r = \frac{-\rho I_y}{10(1+\phi_y)^2} (-1+5\phi_y) \quad (5.50b)$$

$$m_{17}^r = \frac{-6\rho I_y}{5(1+\phi_y)^2 L} \quad (5.50c)$$

$$m_{111}^r = \frac{-\rho I_y}{10(1+\phi_y)^2} (-1+5\phi_y) \quad (5.50d)$$

$$m_{22}^r = \frac{6\rho I_x}{5(1+\phi_x)^2 L} \quad (5.50e)$$

$$m_{24}^r = \frac{\rho I_x}{10(1+\phi_x)^2} (-1+5\phi_x) \quad (5.50f)$$

$$m_{28}^r = \frac{-6\rho I_x}{5(1+\phi_x)^2 L} \quad (5.50g)$$

$$m_{210}^r = \frac{\rho I_x}{10(1+\phi_x)^2} (-1+5\phi_x) \quad (5.50h)$$

$$m_{44}^r = \frac{\rho I_x L}{30(1+\phi_x)^2} (4+5\phi_x+10\phi_x^2) \quad (5.50i)$$

$$m_{48}^r = \frac{-\rho I_x}{10(1+\phi_x)^2} (-1+5\phi_x) \quad (5.50j)$$

$$m_{410}^r = \frac{\rho I_x L}{30(1+\phi_x)^2} (-1-5\phi_x+5\phi_x^2) \quad (5.50k)$$

$$m_{55}^r = \frac{\rho I_y L}{30(1+\phi_y)^2} (4+5\phi_y+10\phi_y^2) \quad (5.50l)$$

$$m_{57}^r = \frac{\rho I_y}{10(1+\phi_y)^2} (-1+5\phi_y) \quad (5.50m)$$

$$m_{511}^r = \frac{\rho I_y L}{30(1+\phi_y)^2} (-1-5\phi_y+5\phi_y^2) \quad (5.50n)$$

$$m_{66}^r = \frac{\rho I_z L}{3} \quad (5.50ñ)$$

$$m_{612}^r = \frac{\rho I_z L}{6} \quad (5.50o)$$

$$m_{77}^r = \frac{6\rho I_y}{5(1+\phi_y)^2 L} \quad (5.50p)$$

$$m_{711}^r = \frac{\rho I_y}{10(1+\phi_y)^2} (-1+5\phi_y) \quad (5.50q)$$

$$m_{88}^r = \frac{6\rho I_x}{5(1+\phi_x)^2 L} \quad (5.50r)$$

$$m_{810}^r = \frac{-\rho I_x}{10(1+\phi_x)^2} (-1+5\phi_x) \quad (5.50s)$$

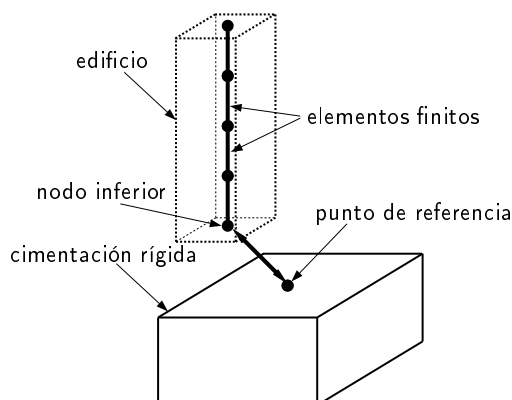
$$m_{1010}^r = \frac{\rho I_x L}{30(1+\phi_x)^2} (4+5\phi_x+10\phi_x^2) \quad (5.50t)$$

$$m_{1111}^r = \frac{\rho I_y L}{30(1+\phi_y)^2} (4+5\phi_y+10\phi_y^2) \quad (5.50u)$$

$$m_{1212}^r = \frac{\rho I_z L}{3} \quad (5.50v)$$

## 5.4 Acoplamiento entre cuerpo rígido y MEF

Se ha explicado en la sección 5.2 cómo considerar cuerpos infinitamente rígidos a través del método de elementos de contorno para aplicarlo principalmente al estudio de cimentaciones, a las cuales se les puede suponer dicha hipótesis. Por otro lado, pensando en el estudio de estructuras de edificación, se ha presentado en la sección 5.3 una manera de modelarlas usando el método de elementos finitos, considerando en éstas la deformación por cortante y suponiéndolas como vigas homogéneas y elásticas.



**Figura 5.6:** Acoplamiento entre cimentación rígida y edificio.

El siguiente paso es el acoplamiento entre ambos, cimentación y superestructura, que se realiza a través de considerar la compatibilidad cinemática y el equilibrio de fuerzas entre el punto de referencia de la cimentación rígida y el nodo de la base del edificio, ver figura 5.6. Esto quiere decir, por un lado, que el punto de referencia y el nodo de la base del edificio tienen igual vector desplazamiento en módulo y sentido. Por contra, el vector de fuerzas en ambos puntos son iguales en módulo pero de sentido contrario.

$$\mathbf{u}^{\text{ref}} = \mathbf{u} \quad ; \quad \mathbf{F}^{\text{ref}} = -\mathbf{F} \quad (5.51)$$

Finalmente se incluyen las ecuaciones de equilibrio (5.41) de cada elemento finito  $ij$  en los sistemas de ecuaciones (5.23) o (5.24), dependiendo de si la naturaleza del terreno es viscoelástica o poroelástica respectivamente, teniendo en cuenta la compatibilidad cinemática y el equilibrio entre el punto de referencia y el nodo de la base.

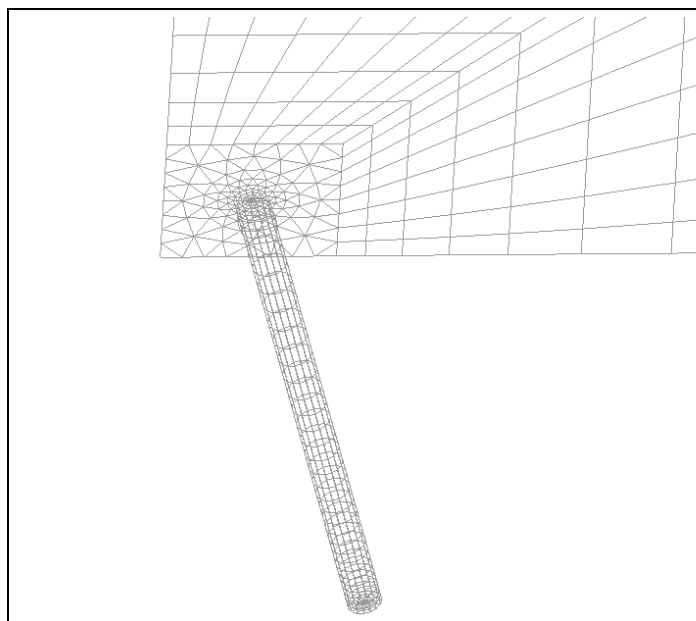
## 5.5 Validación

La validación del modelo acoplado MEC–MEF que se ha presentado en este capítulo se llevó a cabo en varias fases para asegurar que las nuevas características del mismo están bien implementadas. Primero se realizó validación para confirmar la correcta inclusión de las condiciones de cuerpo rígido, presentada en la sección 5.2, en el modelo de elementos de contorno. Posteriormente se validó el elemento finito tipo viga Timoshenko de dos nodos, cuya formulación puede verse en el apartado 5.3, para asegurar que las matrices de rigidez y masa elementales son correctas. Finalmente, se validan ambas formulaciones simultáneamente, así como el acoplamiento del modelo de elementos finitos con las regiones rígidas del modelo de elementos de contorno.

### 5.5.1 Condiciones de cuerpo rígido. Factores de interacción cinemática de grupos de pilotes inclinados

Para validar la formulación presentada en 5.2 se comparan los resultados en términos de los factores de interacción cinemática de grupos de pilotes inclinados  $2 \times 2$  con un modelo MEC–MEF, ver *p.e.* [PAMS10, MPA<sup>+</sup>14]. Este modelo MEC–MEF ha sido validado previamente por comparación con otros modelos existentes en la bibliografía, y frente a aquellos tiene la ventaja de estar disponible por haber sido formulado en el grupo de investigación en el que se ha desarrollado esta tesis. Aclarar que en este apartado de validación sólo interviene la parte de elementos de contorno del modelo presentado, (el elemento finito tipo viga Timoshenko y su acoplamiento con las regiones rígidas no se usan) por lo que nos referiremos al modelo con las condiciones de cuerpo rígido como MEC–MEC.

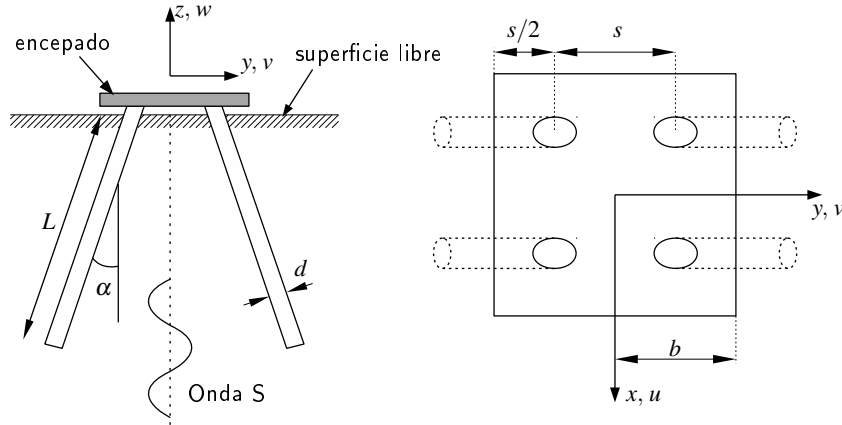
Incorporar las condiciones de cuerpo rígido dentro del modelo de elementos de contorno permite, por ejemplo, modelar el encepado de grupos de pilotes como un dominio perfectamente rígido, mientras que los pilotes y el terreno son considerados como medios lineales, isótropos, homogéneos y viscoelásticos. Como validación de la correcta introducción de dichas condiciones, se estudia la respuesta dinámica de grupos de pilotes inclinados unidos por un encepado rígido y sin masa, comparando los factores de interacción cinemática obtenidos aplicando la formulación presentada en el apartado 5.2, y a través de un modelo acoplado de elementos de contorno y elementos finitos [PAMS10, MPA<sup>+</sup>14]. Mientras que el primero modela terreno, encepado y pilote mediante elementos de contorno, el segundo usa el método de elementos de contorno para modelar el suelo y la presencia de los pilotes se introduce a través del uso elementos finitos. En la figura 5.7 se muestra la malla de elementos de contornos del pilote inclinado y parte de la superficie libre. Sólo es necesario discretizar un cuarto de la geometría total ya que el código permite tener en cuenta las condiciones de simetría del problema.



**Figura 5.7:** Malla de elementos de contorno para el cálculo de factores de interacción cinemática de grupos de pilotes  $2 \times 2$ . Se muestra un cuarto de la geometría ya que el código permite tener en cuenta las condiciones de simetría.

El problema estudiado incluye diferentes configuraciones de grupos  $2 \times 2$  de pilotes inclinados, simétricos con respecto a los planos  $yz$  y  $xz$ , hincados en un semiespacio y cuyas cabezas se

consideran unidas mediante un encepado rígido sin masa completamente libre de contacto con el suelo, ver figura 5.8.



**Figura 5.8:** Esquema de la geometría de grupo  $2 \times 2$  de pilotes inclinados. Corte transversal del terreno y vista superior.

Todos los pilotes son del mismo material y tienen idénticas características geométricas. En la figura 5.8 pueden verse los principales parámetros geométricos del sistema, siendo  $L$  la longitud del pilote y  $d$  el diámetro,  $s$  la distancia entre centros de pilotes adyacentes y  $\alpha$  el ángulo entre eje del pilote y la vertical. El semiancho del encepado ( $b$  en la figura 5.8) se utilizará para el cálculo de los factores de interacción cinemática relacionados con el giro del encepado. En este estudio se ha adoptado el valor  $b = s$ . Se han utilizado dos valores para el ratio entre el módulo de elasticidad del pilote  $E_p$  y del suelo  $E_s$ , por tanto se consideran  $E_p/E_s = 10^3$  (suelo blando) y  $E_p/E_s = 10^2$  (suelo duro). En la tabla 5.1 se muestran las propiedades que son fijas para todos los casos estudiados, siendo  $L/d$  la esbeltez del pilote,  $\beta_s$  el coeficiente de amortiguamiento del terreno,  $\rho_s/\rho_p$  el ratio entre las densidades del suelo y el pilote,  $\nu_s$  y  $\nu_p$  los coeficientes de Poisson del suelo y el pilote respectivamente.

**Tabla 5.1:** Parámetros del sistema comunes a todos los casos de grupos de pilotes  $2 \times 2$  estudiados

$L/d$	$\beta_s$	$\rho_s/\rho_p$	$\nu_s$	$\nu_p$
15.00	0.05	0.70	0.40	0.25

Como excitación se consideran ondas transversales tipo S con incidencia vertical que producen desplazamientos en la dirección del eje  $x$  o  $y$ . Se calculan para cada caso los factores de interacción cinemática en términos del desplazamiento transversal  $I_u$  o  $I_v$  y de giro  $I_{\theta_y}$  o  $I_{\theta_x}$ , medidos ambos en el centro del encepado rígido y normalizados con el desplazamiento de campo libre en la superficie  $u_{ff}$  o  $v_{ff}$ , por tanto se define

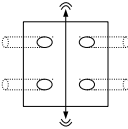
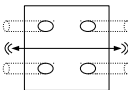
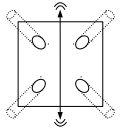
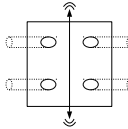
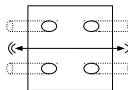
$$I_u = \frac{u}{u_{ff}} \quad ; \quad I_{\theta_y} = \frac{b \theta_y}{u_{ff}} \quad (5.52)$$

$$I_v = \frac{v}{v_{ff}} \quad ; \quad I_{\theta_x} = \frac{b \theta_x}{v_{ff}} \quad (5.53)$$

Se estudiarán diferentes configuraciones para un grupo  $2 \times 2$ , en los que se varían el ángulo de inclinación de los pilotes y la relación  $s/d$ . En la tabla 5.2 se recogen dichos casos mostrando con

diagramas la dirección del movimiento de excitación con respecto a la dirección de inclinación de los pilotes, así como los valores de los ángulos de inclinación  $\theta$  y la relación  $s/d$ . Notar que para el caso en el que el  $\alpha = 20^\circ$ , los pilotes se inclinan en la dirección de las diagonales del encepado.

Tabla 5.2: Casos grupos  $2 \times 2$

					
$s/d$	5.0	5.0	10.0	10.0	10.0
$\alpha$	$10^\circ$	$10^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$	$30^\circ$

En las figuras 5.9, 5.10 y 5.11 se representan la parte real e imaginaria de los factores de interacción cinemática de dichas configuraciones frente a la frecuencia adimensional  $a_o = \omega d/c_s$ , siendo  $\omega$  la frecuencia de excitación y  $c_s$  la velocidad de propagación de las ondas transversales en el semiespacio. Se indica en los gráficos de cada figura cada caso con un pequeño esquema, y mediante una etiqueta los valores del ángulo  $\alpha$  y la relación  $s/d$ . Se representan con línea continua los resultados para el modelo de elementos de contorno que incorpora las condiciones de cuerpo rígido, etiquetados como MEC-MEC, mientras la línea discontinua corresponde a los factores obtenidos con el modelo de elementos de contorno y elementos finitos MEC-MEF. Los colores usados diferencian los resultados según la relación entre los módulos de elasticidad del pilote y el suelo, siendo azul para el suelo blando ( $E_p/E_s = 10^3$ ) y verde para el suelo más duro ( $E_p/E_s = 10^2$ ).

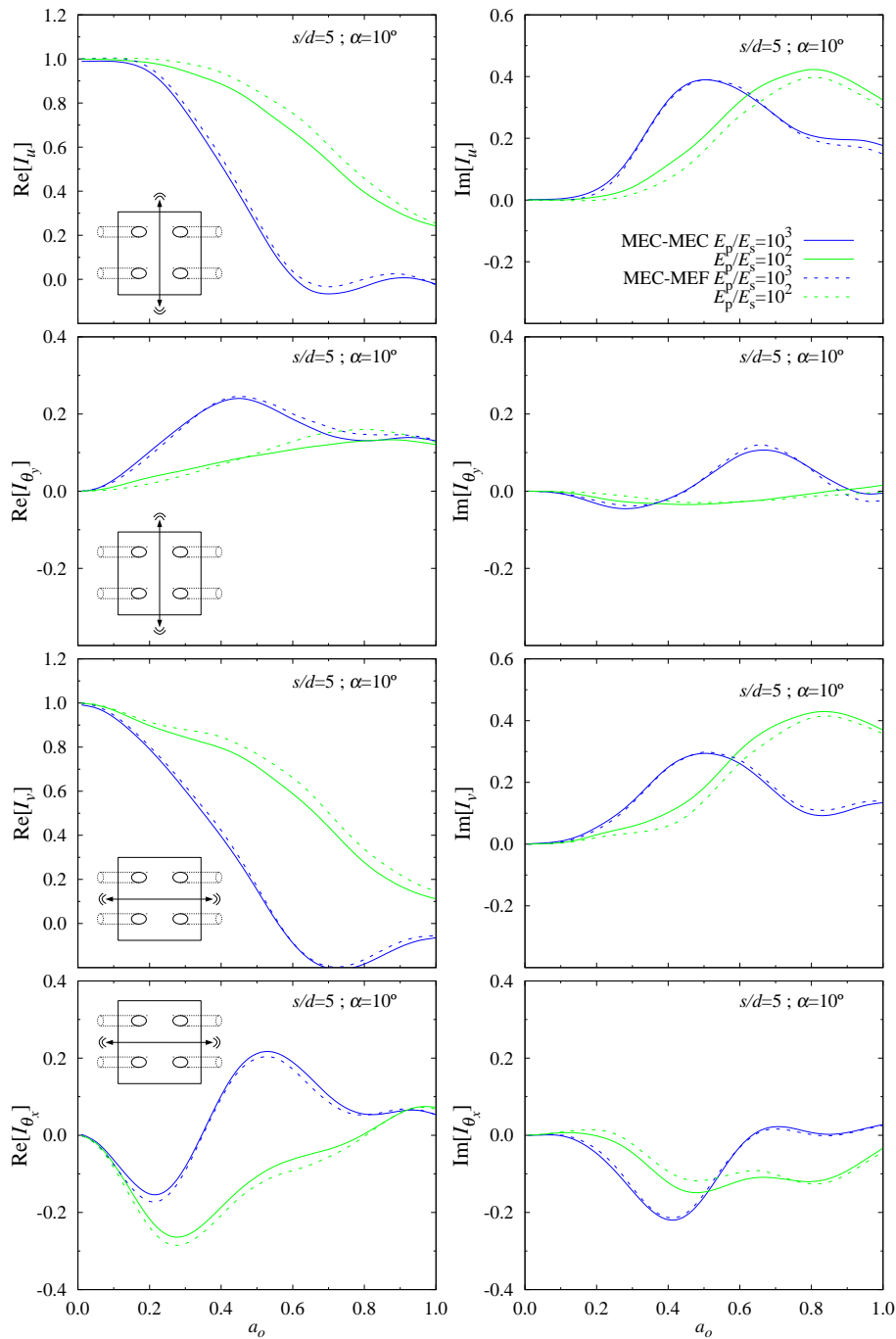
Se observa en todas las gráficas que los resultados de ambos modelos muestran gran concordancia entre sí. Los errores relativos no superan el 8 % en términos de la rotación y están por debajo del 3 % en términos de traslación.

### 5.5.2 Elemento finito tipo viga Timoshenko

Es necesario validar también la formulación de las matrices de rigidez y de masas del elemento finito tipo viga, presentadas en el apartado 5.3. El problema de validación trata de una viga de longitud 30 metros con una sección transversal como la que se muestra en la figura 5.12. Se observa que dicha sección es simétrica sólo respecto al eje  $x$  y que por la forma en U de la misma existe una excentricidad  $e_x$ , ya que el centro de esfuerzos cortantes  $C$  y el centro de gravedad  $G$  no son coincidentes.

Las propiedades de dicha sección transversal se resumen en la tabla 5.3, siendo  $I_x, I_y$  los momentos de inercia,  $J$  el módulo de torsión,  $A$  el área total,  $e_x, e_y$  las excentricidades y  $\kappa'_x, \kappa'_y$  los factores de corrección de cortante.

Un extremo de la viga se considera empotrado sobre una base rígida con los desplazamientos y giros completamente restringidos, estando el extremo opuesto completamente libre. Dicha base rígida es sometida a un desplazamiento unitario en dirección del eje  $y$ , que induce flexión y torsión a lo largo de la viga. Se estudia el comportamiento dinámico, por un lado con el modelo de elementos finitos tipo viga presentado en el actual capítulo, y se comparan los resultados

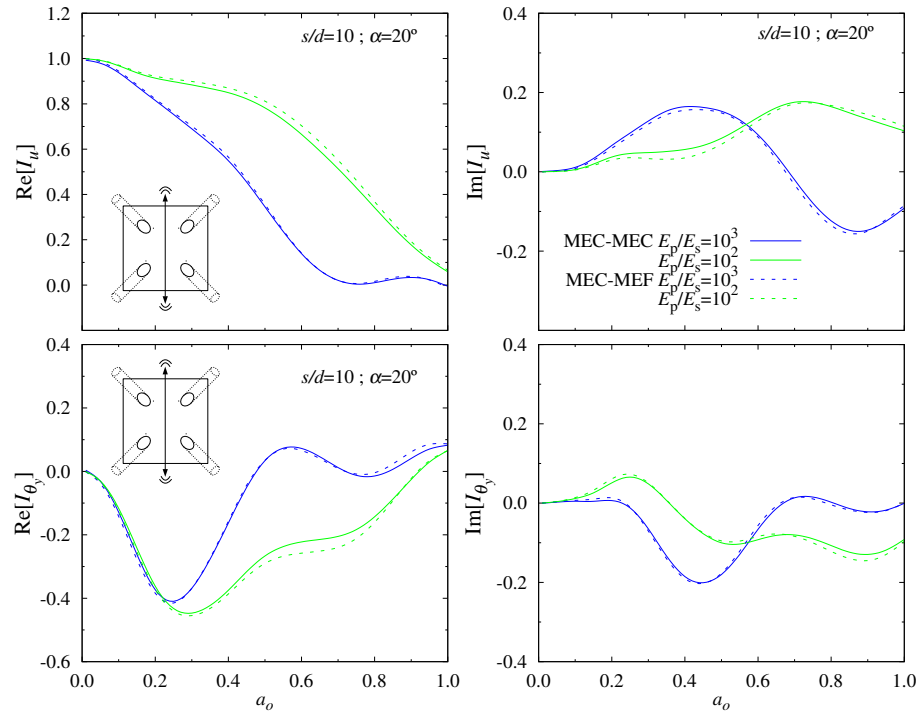


**Figura 5.9:** Factores interacción cinemática de grupo  $2 \times 2$  de pilotes con ángulo de inclinación  $10^\circ$  y relación  $s/d = 5$ , en términos de la parte real e imaginaria del desplazamiento horizontal y giro de flexión, considerando onda transversal de tipo S vibrando tanto en dirección paralela al eje  $x$  como al eje  $y$ .

**Tabla 5.3:** Propiedades de la sección transversal U para la definición de los elementos finitos

$I_x$ ( $\text{N} \cdot \text{m}^2$ )	$I_y$ ( $\text{N} \cdot \text{m}^2$ )	$J$ ( $\text{N} \cdot \text{m}^4$ )	$A$ ( $\text{m}^2$ )	$e_x$ (m)	$e_y$ (m)	$\kappa'_x$	$\kappa'_y$
4.8515625	2.035546875	2.79898	5.625	0.417639	0.0	0.789799	0.636621





**Figura 5.10:** Factores interacción cinemática de grupo  $2 \times 2$  de pilotes con ángulo de inclinación  $20^\circ$  y relación  $s/d = 10$ , en términos de la parte real e imaginaria del desplazamiento horizontal y giro de flexión, considerando onda transversal de tipo S vibrando tanto en dirección paralela al eje  $x$  como al eje  $y$ .

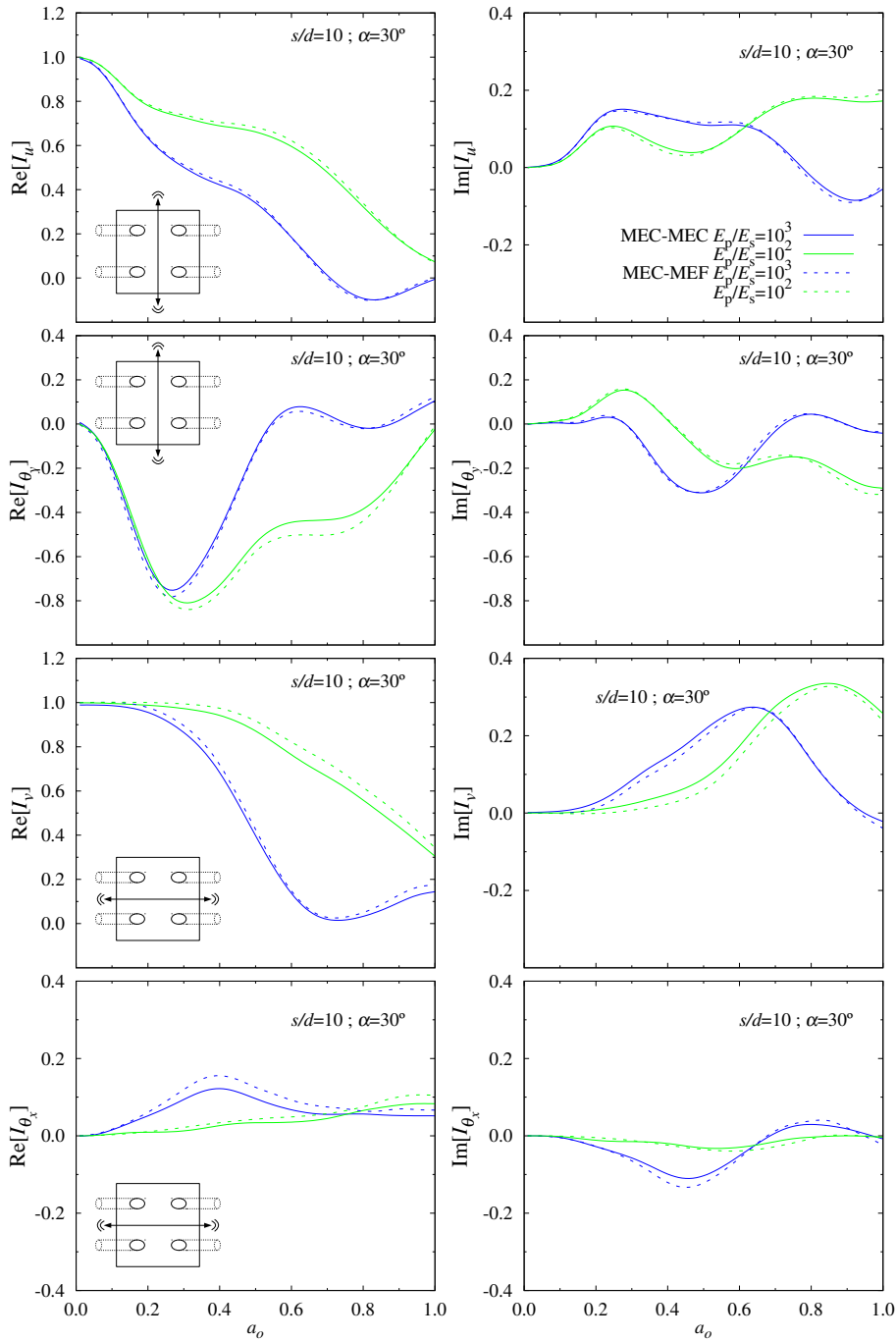
con los obtenidos con el 'software' de elementos finitos ANSYS® y también con los calculados haciendo uso del modelo de elementos de contorno. La malla de elementos de contorno usada se muestra a la izquierda de la figura 5.13, notar que se presenta sólo la mitad de la misma ya que es posible tener en cuenta condiciones de simetría. A la derecha de la misma figura se muestra un esquema de la discretización de elementos finitos usada tanto por ANSYS® como para el modelo de viga Timoshenko, que consiste en dividir la viga desde un extremo al otro de la misma en 30 elementos de dos nodos colocados consecutivamente sobre la línea imaginaria que une los centros de gravedad de la secciones transversales.

Las propiedades del material de la viga se resumen en la tabla 5.4, siendo  $\mu$  el módulo de rigidez transversal,  $\rho$  la densidad lineal equivalente,  $\nu$  el módulo de Poisson y  $\beta$  el coeficiente de amortiguamiento.

**Tabla 5.4:** Propiedades del material de la viga

$\mu$ (N/m <sup>2</sup> )	$\rho$ (kg/m)	$\nu$	$\beta$
$9.77 \cdot 10^9$	$4.05 \cdot 10^4$	0.33	0.05

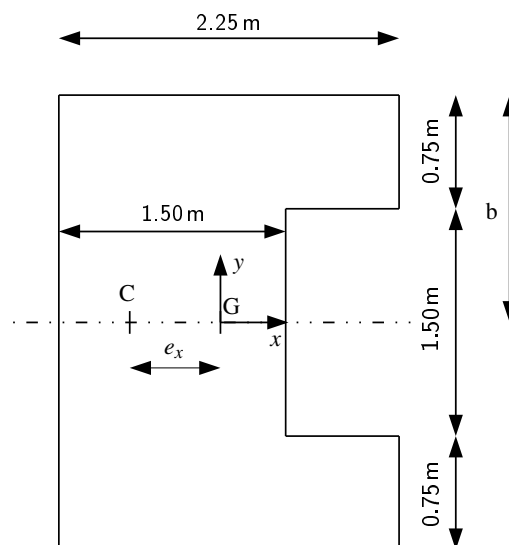
Se presentan los resultados de esta validación en términos del desplazamiento transversal  $v$  y el giro de torsión  $\theta_z$ , ambos medidos en la punta, normalizados con el desplazamiento unitario en la base  $v_{br}$ . En la figura 5.14 se muestra la respuesta en frecuencia en términos del módulo de estas dos variables, siendo  $b$  el semiancho de la sección en dirección  $y$  ( $b=1.50$  m), ver figura 5.12. La línea de color azul representa los resultados obtenidos con el modelo de elementos de contorno (MEC), mientras que los del modelo de elementos finitos se muestran en verde para ANSYS y en rojo (MEF) para los calculados con el modelo de viga presentado en la sección



**Figura 5.11:** Factores interacción cinemática de grupo  $2 \times 2$  de pilotes con ángulo de inclinación  $30^\circ$  y relación  $s/d = 10$ , en términos de la parte real e imaginaria del desplazamiento horizontal y giro de flexión, considerando onda transversal de tipo S vibrando tanto en dirección paralela al eje  $x$  como al eje  $y$ .

5.3 del actual capítulo.

Se observa que los resultados de ANSYS® y el MEF, tanto en términos de flexión como de torsión, son prácticamente coincidentes tanto para el valor de las amplitudes como para el valor de las frecuencias naturales del sistema. Con respecto a los resultados del MEC también se muestra una gran concordancia aunque se aprecian diferencias a frecuencias más altas, a partir de 25 Hz para la flexión y de 15 Hz para la torsión. Se estima que las diferencias encontradas entre los modelos viga (aquí denominados MEF y ANSYS® respectivamente) y el modelo MEC



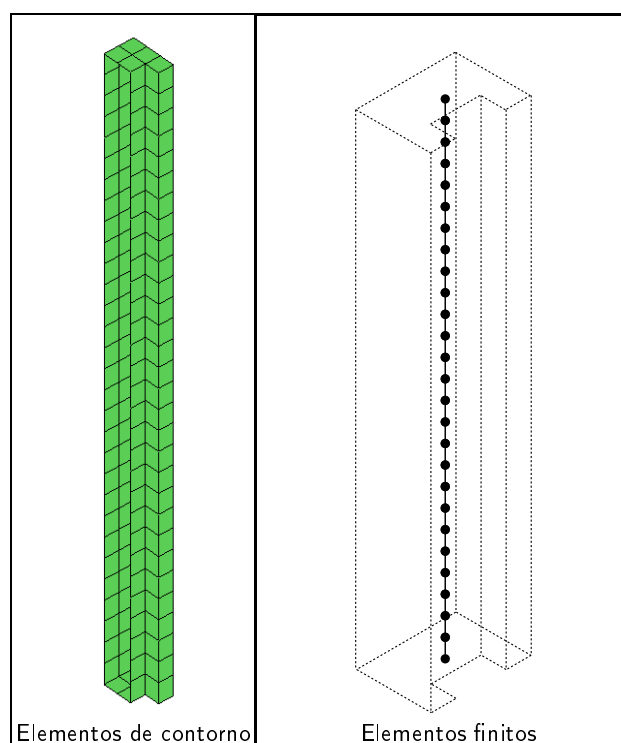
**Figura 5.12:** Geometría de la sección transversal en forma de U de la viga.

de medio continuo pueden venir generadas por el hecho de que ninguno de los modelos viga incorporan en alabeo de las secciones que tiene lugar en este problema. La gran coincidencia con los resultados obtenidos usando ANSYS® y la buena concordancia con los del MEC, demuestran que las matrices de rigidez y masa presentadas están bien formuladas, por lo que queda validado el modelo de elementos finitos tipo viga Timoshenko presentado en el apartado 5.3. Viendo la gráfica superior en la figura 5.14, se observa como la flexión se ve modificada en torno a la segunda frecuencia fundamental apareciendo un doble pico inducido por la segunda frecuencia fundamental de torsión.

Inicialmente se eligió la malla de elementos finitos con 30 elementos de manera que coincidiera con el número de divisiones que la malla de elementos de contorno en la dirección vertical. Sin embargo, es interesante ver como varían los resultados del modelo MEF a medida que se reduce el número de divisiones. Así, se presentan en la figura 5.15 los resultados del MEF con distinto número de divisiones, de nuevo en términos del desplazamiento transversal y la torsión en el extremo libre de la viga. En dicha figura pueden verse estos resultados para cuatro discretizaciones MEF de la viga, 30 elementos (línea roja), 15 elementos (línea azul), 10 elementos (línea verde) y 5 elementos (línea gris). Reduciendo el número de divisiones a la mitad o a la tercera parte no supone una variación notable en los resultados, aunque en el caso de 10 elementos se observan diferencias a frecuencias a partir de 40 Hz. En el caso de 5 elementos las diferencias se aprecian a partir de 15 Hz y a frecuencias altas, a partir de 25 Hz, se demuestra la necesidad de un mayor refinamiento.

### 5.5.3 Validación del modelo MEC–MEF conjuntamente

Para la validación del modelo en su conjunto, así como del acoplamiento entre los elementos finitos y la región rígida modelada con elementos de contorno, se ha escogido un problema de interacción suelo estructura en el que se estudia un edificio cimentado en un suelo considerado como un semiespacio viscoelástico. La figura 5.16 muestra la geometría y las dimensiones del edificio, de 100 metros de altura y con una sección transversal en forma de U. La superestructura se aloja en el semiespacio a través de una cimentación embebida en el terreno, que será



**Figura 5.13:** A la izquierda malla de elementos de contorno para la viga con sección transversal en U. Sólo es necesario mallar la mitad de la misma ya que se tienen en cuenta las condiciones de simetría. A la derecha esquema de la discretización de elementos finitos.

considerada infinitamente rígida (figura 5.17).

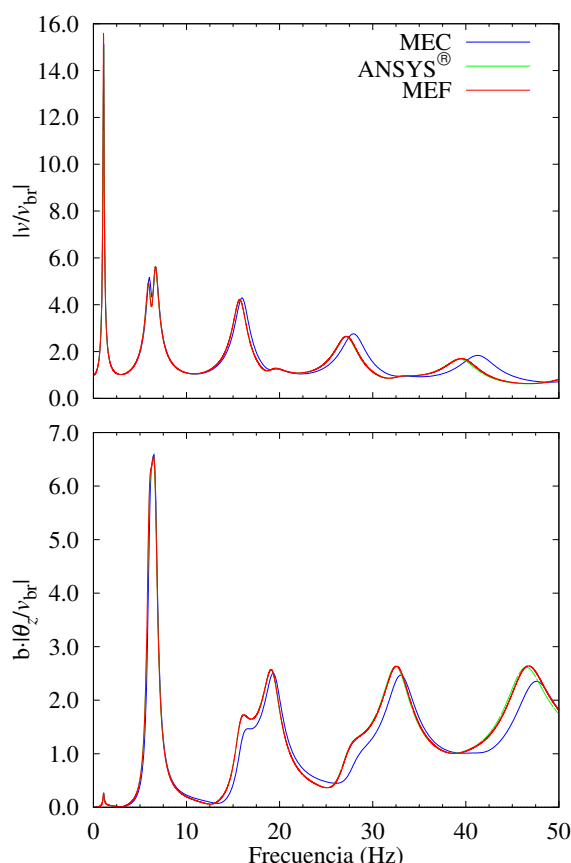
Las propiedades escogidas para modelar la superestructura como una viga Timoshenko son: el módulo de rigidez transversal equivalente  $\mu = 3.0 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$ , la densidad lineal equivalente  $\rho = 2.7 \cdot 10^5 \text{ kg/m}$  (correspondiente a la densidad específica que se considera usualmente de  $0.3 \text{ t/m}^3$ ), el coeficiente de Poisson  $\nu = 0.2$  y el coeficiente de amortiguamiento  $\xi = 0.05$ . Con estas propiedades, las frecuencias naturales en base rígida para este edificio en los planos  $xz$  e  $yz$  son respectivamente  $f_{br}^{xz} = 0.564 \text{ Hz}$  ( $T_{br}^{xz} = 1.773 \text{ s}$ ) y  $f_{br}^{yz} = 0.920 \text{ Hz}$  ( $T_{br}^{yz} = 1.087 \text{ s}$ ), valores que siguen la línea de la expresión propuesta por Goel and Chopra [GC97] para calcular el periodo fundamental de edificios de hormigón armado. La tabla 5.5 presenta las propiedades de la sección transversal, siendo  $I_x, I_y$  los momentos de inercia,  $J$  el módulo de torsión,  $A$  el área,  $e_x, e_y$  las excentricidades y  $\kappa'_x, \kappa'_y$  los factores de corrección de cortante.

**Tabla 5.5:** Propiedades de la sección transversal del edificio para definir los elementos finitos

$I_x$ ( $\text{N} \cdot \text{m}^2$ )	$I_y$ ( $\text{N} \cdot \text{m}^2$ )	$J$ ( $\text{N} \cdot \text{m}^4$ )	$A$ ( $\text{m}^2$ )	$e_x$ (m)	$e_y$ (m)	$\kappa'_x$	$\kappa'_y$
130000.0	40763.9	84281.6	900.0	2.37039	0.0	0.886399	0.748341

El semiespacio que define la región del terreno donde se encuentra cimentado el edificio se caracteriza por los siguientes parámetros: velocidad de propagación de la onda transversal  $c_s = 300 \text{ m/s}$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0.3$ , densidad  $\rho = 1620 \text{ kg/m}^3$  y coeficiente de amortiguamiento  $\xi = 0.05$ . Estas propiedades se corresponden con el medio viscoelástico equivalente al terreno sin agua (seco) presentado en Todorovska and Al Rjoub [TAR06a].

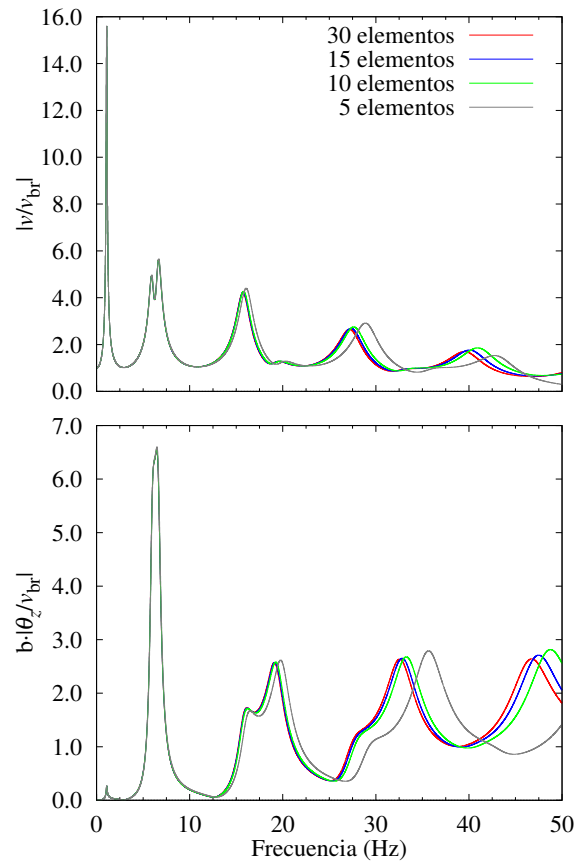
Tanto en el caso del terreno como de la estructura, el amortiguamiento se introduce a través



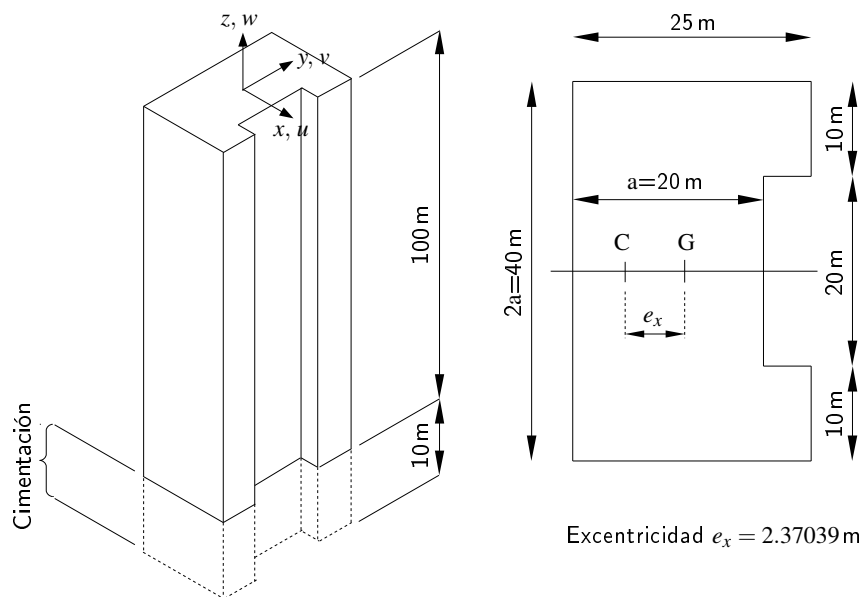
**Figura 5.14:** Resultados de validación para una viga de sección transversal en U y longitud 30 metros empotrada base rígida en términos del desplazamiento transversal  $v/v_{br}$  y de la torsión  $\theta_z b/v_{br}$  en el extremo libre. Se comparan los resultados del modelo de elementos finitos presentado (MEF), con los obtenidos con ANSYS® y con el modelo de elementos de contorno (MEC).

del modulo de rigidez transversal equivalente de tipo complejo e independiente de la frecuencia de la forma  $\mu = \text{Re}[\mu](1 + 2\xi i)$ , siendo  $i$  la unidad imaginaria.

Con el fin de validar el modelo que se presenta en este capítulo, los resultados se comparan frente a los obtenidos con el modelo de elementos de contorno, más riguroso, presentado en el capítulo 2, que ha sido validado con anterioridad y con el que se han realizado diversos trabajos, por ejemplo [MAD02, MAD04, MAG05, AMD06]. Usando éste para resolver el problema, todas las regiones que definen el problema (terreno, cimentación y edificio) se modelan como medios continuos, lineales, homogéneos, isótropos y viscoelásticos. La figura 5.17(a) muestra la malla de elementos de contorno usada en este caso. El código es capaz de tener en cuenta las propiedades de simetría del problema, por lo que sólo es necesario discretizar la mitad de la geometría. El tamaño del elemento debe ser más pequeño que la semi-longitud de onda en la región correspondiente para la frecuencia más alta, en este caso 10 Hz. La extensión de la superficie libre del terreno y el número de elementos se definen después de realizar un análisis de convergencia de las variables de interés obtenidas con diferentes mallados. Las propiedades del material de la cimentación coinciden con los parámetros dados anteriormente para la región del edificio, excepto para el valor del módulo de rigidez transversal, el cual se asume cien veces más rígido que el módulo de rigidez equivalente de la viga Timoshenko que modela el edificio. Por otro lado, la malla usada para resolver el problema con el modelo de elementos de contorno y elementos finitos (MEC-MEF) es presentada en la figura 5.17(b). El mallado de la superficie libre y de la superficie cimentación-terreno es exactamente igual a la usada por el

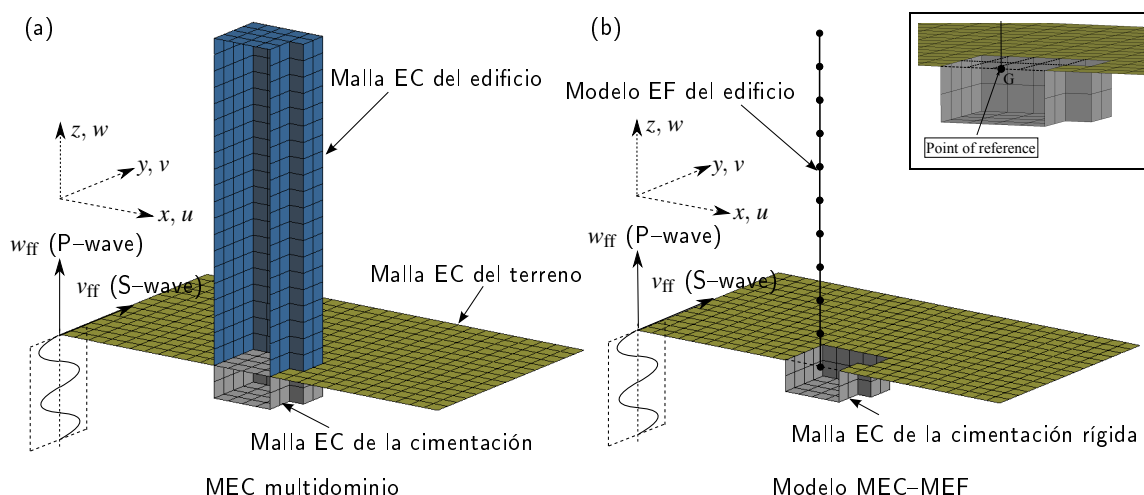


**Figura 5.15:** Resultados en términos del desplazamiento transversal  $v/v_{br}$  y de la torsión  $\theta_z b/v_{br}$  en el extremo libre obtenidos con el modelo de elementos finitos. Ensayos con diferente número de divisiones en la malla de elementos finitos.



**Figura 5.16:** Dimensiones del edificio y de la sección transversal en forma de U del mismo.

modelo de elementos de contorno multidominio (figura 5.17(a)). La parte enterrada del edificio se modela en este caso como un dominio perfectamente rígido usando la formulación expuesta en la sección 5.2, por lo que sólo es necesario mallar con elementos de contorno las superficies rígidas y la superficie libre del terreno. La superestructura se discretiza ahora usando elementos finitos Timoshenko de dos nodos (10 elementos de 10 metros de longitud cada uno). El punto de referencia del cuerpo rígido se sitúa en la parte superior del dominio de la cimentación, exactamente sobre el eje  $x$  de simetría y coincidiendo con el centro de gravedad  $G$  de la sección transversal (ver detalle en la figura 5.17(b)). Los resultados obtenidos considerando el edificio en base rígida se presentan siempre en las gráficas de este apartado como referencia para medir los efectos de interacción suelo–estructura. La respuesta en base rígida se calcula usando el modelo de elementos finitos explicado en el apartado 5.3, sometiendo a dicha base rígida al correspondiente desplazamiento armónico unitario.

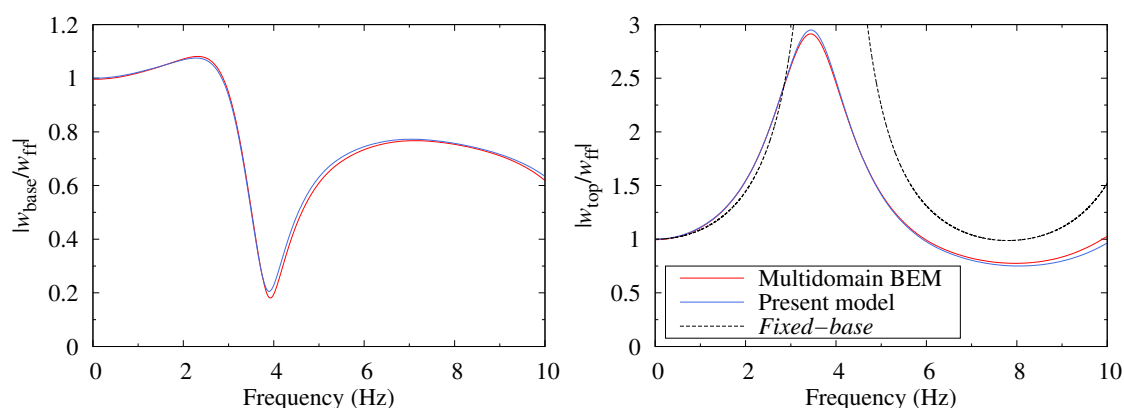


**Figura 5.17:** (a) Malla de elementos de contorno para el modelo multidominio. (b) Malla de elementos de contorno y elementos finitos para el modelo MEC-MEF y detalle del acoplamiento edificio–cimentación en el punto de referencia.

La figura 5.18 muestra el módulo del desplazamiento vertical  $w$  en la base y la parte alta del edificio considerando como excitación una onda P con incidencia vertical, y siendo  $w_{ff}$  el desplazamiento vertical de campo libre. Por otro lado, si el sistema está sujeto a la acción de una onda S vertical que induce desplazamientos en dirección  $y$ , las variables de interés son el desplazamiento transversal  $v$  y el giro de flexión  $\theta_x$  alrededor del eje  $x$ , y el giro de torsión  $\theta_z$  debido a la excentricidad  $e_x$  de la sección transversal. La figura 5.19 muestra las funciones de respuesta en frecuencia de estas tres variables, medidas en la base y la parte alta del edificio y normalizadas con el desplazamiento de campo libre  $v_{ff}$ , siendo  $a$  el semiancho de la sección ( $a = 20\text{ m}$ ).

Las figuras 5.18 y 5.19 muestran buena concordancia entre el modelo MEC multidominio y el modelo MEC-MEF. Las diferencias son del orden del 1.5 % alrededor de la primera frecuencia de resonancia del desplazamiento vertical al estar el sistema sometido a una onda P; y del 2 % y 3 % en torno a la primera y segunda frecuencia de resonancia del desplazamiento horizontal y el giro de flexión respectivamente cuando la excitación es una onda S. Las diferencias entre ambos modelos para el giro de torsión son del orden del 16 % alrededor de la primera frecuencia de resonancia. Estas diferencias en la torsión aparecen principalmente por dos razones: a) la torsión no uniforme, la cual no es tomada en cuenta por el modelo de elementos finitos, y b) los resultados en términos de flexión y torsión del modelo MEC multidominio son obtenidos indirectamente a través de los nodos de la malla.

Ambos modelos son capaces de capturar los efectos de interacción suelo–estructura, evidentes



**Figura 5.18:** Comparativa entre los modelos MEC mutidominio y MEC–MEF. Funciones de respuesta en frecuencia en la base y la parte alta del edificio en términos del desplazamiento vertical  $w$ , normalizado con el de campo libre  $w_{ff}$ , debido a la acción de una onda P con incidencia vertical.

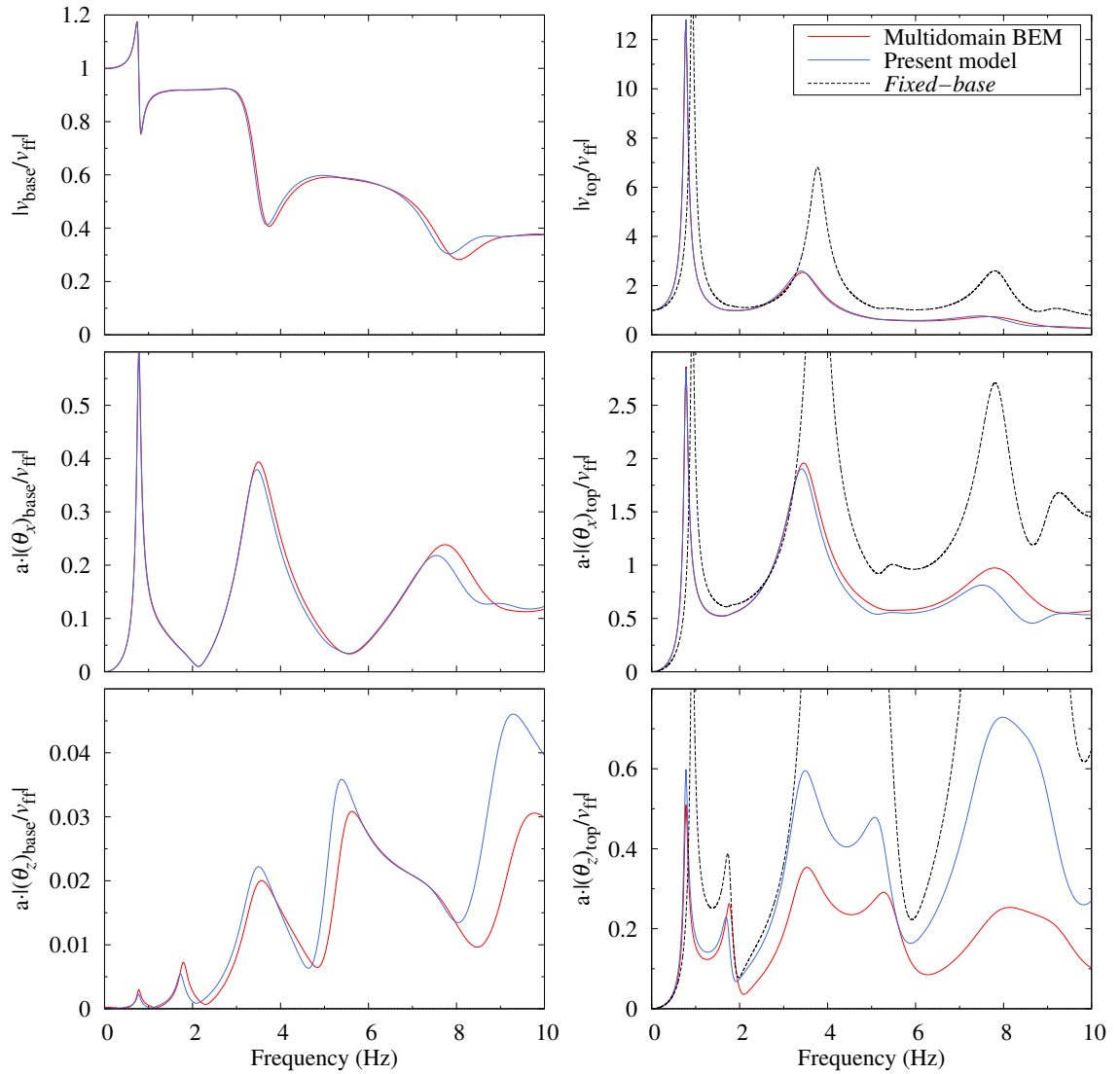
en las diferencias con la respuesta en base rígida del edificio (representada con línea negra discontinua). Se cumple siempre que todas las frecuencias naturales del sistema son más bajas que las correspondientes a las obtenidas en base rígida, como es de esperar cuando tiene lugar la interacción suelo–estructura. Por ejemplo, las frecuencias fundamentales del desplazamiento vertical observadas para la onda P (figura 5.18 derecha) y del desplazamiento horizontal para la onda S (figura 5.19 arriba derecha) se reducen un 11% y un 15% respectivamente. Al mismo tiempo, el hecho de considerar el edificio cimentado en un semiespacio viscoelástico aporta al sistema amortiguamiento (amortiguamiento geométrico y amortiguamiento del material), lo que se traduce en modos con mayor amortiguamiento. Por tanto, la amplitud de los desplazamientos verticales en la parte alta del edificio producidos por la onda P se reduce en un 77% cuando existe interacción suelo–estructura. El desplazamiento y el giro de flexión, debidos a la onda S, en la parte alta se reducen un 13% y 18% respectivamente. Como es de esperar, estos efectos se acentúan a frecuencias altas y las mayores diferencias se observan al comparar la respuesta de torsión en la parte alta.

Notar que para el caso de validación estudiado en este apartado, al aplicar el modelo BEM multidominio, el número de grados de libertad del problema para la malla mostrada asciende a 10173. Por contra, con el modelo MEC–MEF dicho número se queda en 5091. Es evidente el descenso en el número de grados de libertad entre un modelo y otro, y en consecuencia el ahorro en tiempo y recursos de computación. Además es fácil intuir que el ahorro será más acentuado, por ejemplo, cuando se trate con problemas en los que intervienen varias estructuras cercanas.

## 5.6 Conclusiones

Se ha presentado en este capítulo un modelo MEC–MEF en el dominio de la frecuencia para el estudio de la interacción suelo–estructura y estructura–suelo–estructura en problemas que involucran estructuras de edificación sobre cimentaciones para las cuales puede asumirse una rigidez mucho mayor que la del suelo que las aloja. Esta simplificación sobre la cimentación permite reducir el número de grados de libertad del problema modelando la misma como un sólido indeformable. También, al modelar la superestructura como viga Timoshenko por medio de elementos finitos de dos nodos se consigue una importante reducción del coste computacional para dicho análisis.





**Figura 5.19:** Comparativa entre los modelos MEC mutidominio y MEC-MEF. Funciones de respuesta en frecuencia en la base y la parte alta del edificio en términos del desplazamiento transversal  $v$ , giro de flexión  $\theta_x$  y giro de torsión  $\theta_z$  normalizados con el desplazamiento de campo libre  $v_{ff}$  debidos a una onda S con incidencia vertical.

Un modelo de elementos de contorno previo ha sido mejorado para incluir el acoplamiento entre regiones rígidas y viscoelásticas o poroelásticas. Se ha implementado también un modelo de elementos finitos tipo viga Timoshenko acoplado a dichas regiones rígidas. El elemento finito para modelar la superestructura como una viga Timoshenko ha sido formulado de manera que se tiene en cuenta la excentricidad de la sección y en consecuencia la respuesta torsional que ésta produce.

Se han obtenido resultados para validar de manera separada las mejoras implementadas en el modelo, así como de su conjunto. Estos han demostrado que la implementación es correcta, además de asegurar que el modelo tiene la capacidad de reproducir los efectos de la respuesta torsional debida a la excentricidad así como los principales aspectos de los problemas de interacción suelo-estructura.

En el siguiente capítulo se utilizará el modelo MEC-MEF aquí formulado y validado para estudiar entre otras cosas el efecto de la condición de contacto entre el encepado y la superficie del terreno en el cálculo de factores de interacción cinemática de grupos de pilotes. También se

presentarán resultados para mostrar el efecto que produce la consideración del terreno como un semiespacio viscoelástico o poroelástico en la estimación de la respuesta de estructuras de edificación, así como la influencia de la interacción estructura–suelo–estructura.

# Capítulo 6

## Estudio de la respuesta dinámica de estructuras de edificación. Resultados.

### 6.1 Introducción

En el capítulo anterior se expuso la formulación y validación de un modelo MEC–MEF para el estudio dinámico de estructuras, principalmente de edificación, cimentadas en terrenos viscoelásticos o poroelásticos. Se trata ahora de utilizar dicho modelo para estudiar la influencia de factores como el ángulo de incidencia de la excitación, la naturaleza del terreno o la presencia de estructuras cercanas en la respuesta dinámica de este tipo de estructuras en problemas donde existe interacción suelo–estructura o interacción estructura–suelo–estructura. Dicho estudio se hará aplicando el modelo a la resolución de diversos problemas que involucran al edificio del apartado 5.5.3 del capítulo anterior, cuyas características se presentan de nuevo aquí para mayor comodidad. Tal edificio tiene 100 metros de altura y sección transversal en U, cuyas dimensiones y geometría se muestran en la figura 6.1. Se observa en la figura que dicho edificio está cimentado en el semiespacio a través de una región con la misma sección transversal que la superestructura, enterrada hasta una profundidad de 10 metros, y que se considera como infinitamente rígida.

Las propiedades que permiten modelar la superestructura como una viga Timoshenko son: el módulo de rigidez transversal equivalente  $\mu = 3.0 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$ , la densidad lineal equivalente  $\rho = 2.7 \cdot 10^5 \text{ kg/m}$  (correspondiente a la densidad específica que se considera usualmente de  $0.3 \text{ t/m}^3$ ), el coeficiente de Poisson  $\nu = 0.2$  y el coeficiente de amortiguamiento  $\xi = 0.05$ . Con estas propiedades, la frecuencias naturales en base rígida para este edificio en los planos  $xz$  e  $yz$  son respectivamente  $f_{br}^{xz} = 0.564 \text{ Hz}$  ( $T_{br}^{xz} = 1.773 \text{ s}$ ) y  $f_{br}^{yz} = 0.920 \text{ Hz}$  ( $T_{br}^{yz} = 1.087 \text{ s}$ ), valores que siguen la línea de la expresión propuesta por Goel and Chopra [GC97] para calcular el periodo fundamental de edificios de hormigón armado. La tabla 6.1 presenta las propiedades de la sección transversal, siendo  $I_x, I_y$  los momentos de inercia,  $J$  el módulo de torsión,  $A$  el área,  $e_x, e_y$  las excentricidades y  $\kappa'_x, \kappa'_y$  los factores de corrección de cortante.

Este capítulo se estructura de manera que en el apartado 6.2 se presenta un estudio de la influencia, en la respuesta dinámica de la estructura ya definida, del ángulo de incidencia  $\theta_0$  de la excitación, considerando ondas de tipo P, SH o SV. Después de observar la influencia

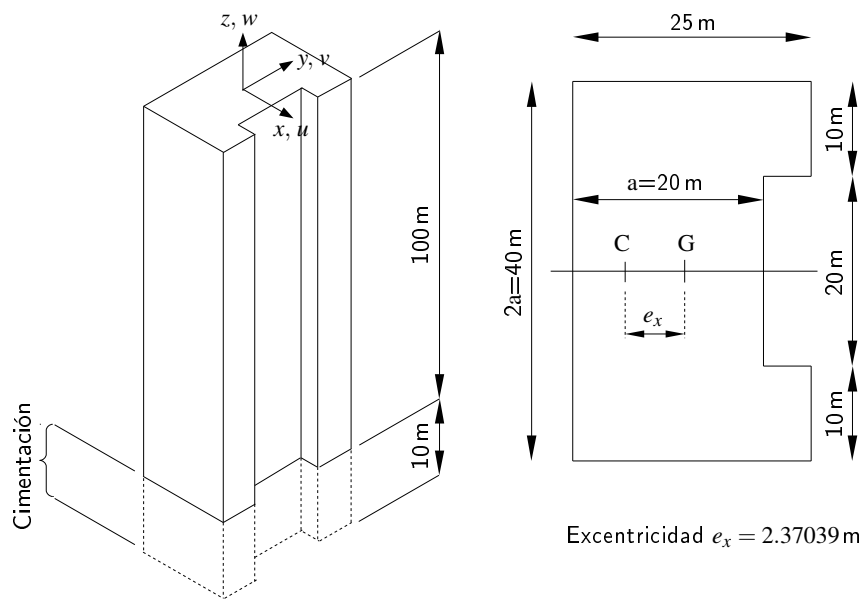


Figura 6.1: Dimensiones del edificio y de la sección transversal en forma de U del mismo.

Tabla 6.1: Propiedades de la sección transversal del edificio para definir los elementos finitos

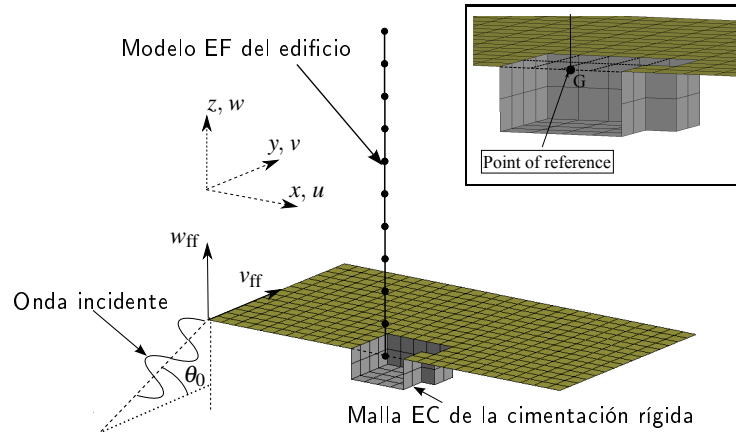
$I_x$ ( $N \cdot m^2$ )	$I_y$ ( $N \cdot m^2$ )	$J$ ( $N \cdot m^4$ )	$A$ ( $m^2$ )	$e_x$ (m)	$e_y$ (m)	$\kappa'_x$	$\kappa'_y$
130000.0	40763.9	84281.6	900.0	2.37039	0.0	0.886399	0.748341

del ángulo de incidencia para cada tipo de onda mencionada, se estudia en el apartado 6.3 el fenómeno interacción estructura–suelo–estructura y su influencia en la respuesta. Para ello se define un sistema formado por dos estructuras idénticas a la de la figura 6.1, separadas una distancia  $d$  que toma diferentes valores, y considerando como excitación ondas P, SV o SH con ángulo de incidencia  $\theta_0$ . El modelo permite también modelar problemas que involucran estructuras cimentadas en terrenos con naturaleza poroelástica, así en el apartado 6.4 se estudia la respuesta del edificio cimentado en un semiespacio poroelástico por el cual se propagan ondas de tipo P o S con incidencia vertical. En este caso se presentan resultados que permiten determinar la variación de la respuesta con del grado de saturación del terreno, para diferentes valores del coeficiente de disipación  $b$ , y con la condición de contacto entre la cimentación y el terreno. Se muestran también resultados del sistema de dos edificios cercanos cimentados sobre suelo poroelástico. Finalmente, en el apartado 6.5 se presentan resultados de la respuesta del sistema formado por dos edificios considerando como excitación ondas de Rayleigh, es decir, ondas de superficie.

## 6.2 Interacción suelo estructura. Influencia del ángulo de incidencia de la excitación

En este apartado se estudia la influencia del ángulo de incidencia  $\theta_0$  de la excitación (ver figura 2.4). Se considerará para tal fin el edificio de la figura 6.1 sometido a la acción de ondas planas de tipo P, SV o SH, contenidas en el plano  $yz$  e incidiendo con un ángulo  $\theta_0$  con valores

desde 15 a 90 grados en incrementos de 15 grados. Las propiedades del semiespacio viscoelástico en el que se encuentra cimentado el edificio vuelven a ser las mostradas en Todorovska y Al Rjoub [TAR06a] para el terreno sin agua (seco): velocidad de propagación de la onda transversal  $c_s = 300\text{m/s}$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0.3$ , densidad  $\rho = 1620\text{kg/m}^3$  y coeficiente de amortiguamiento  $\xi = 0.05$ .

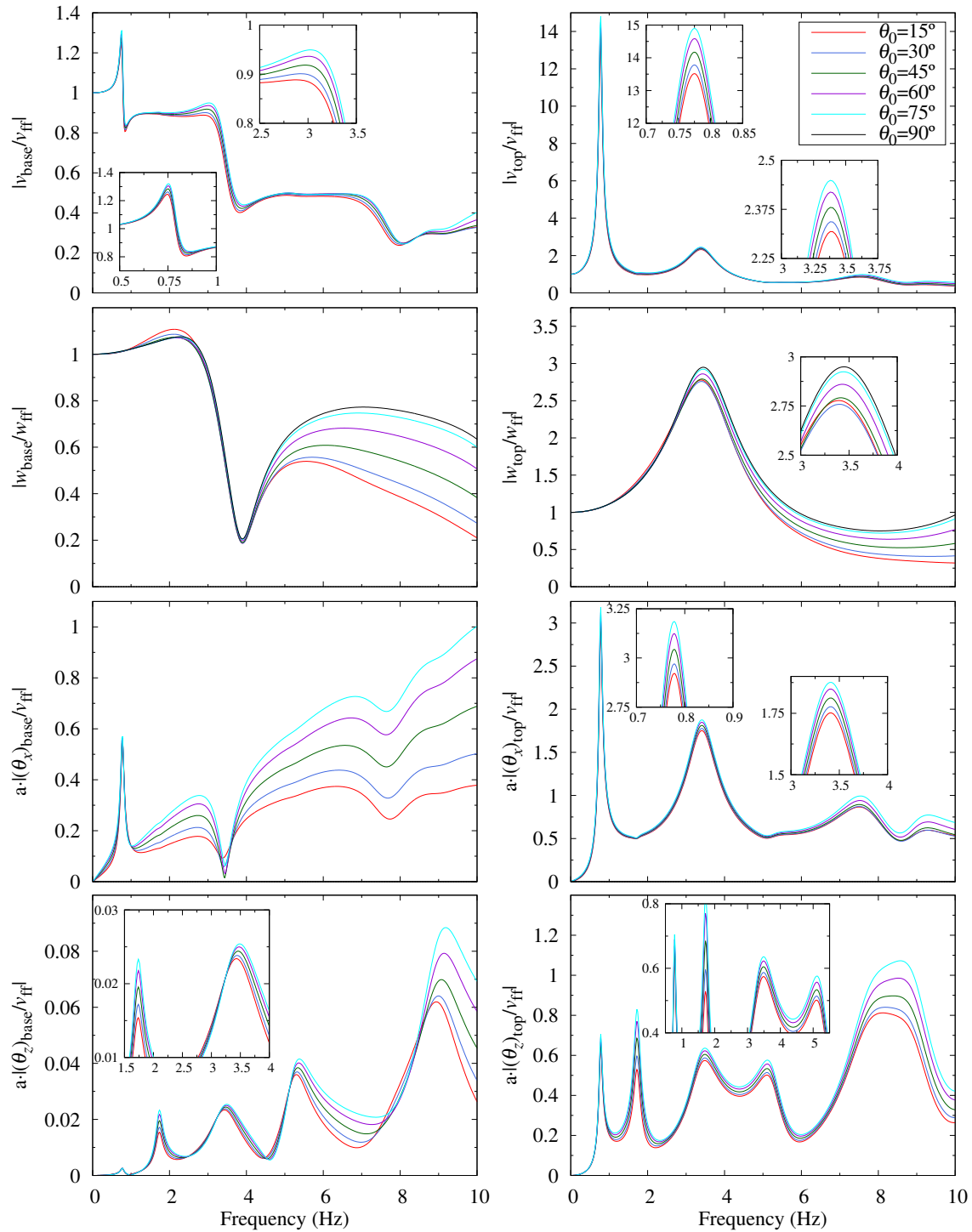


**Figura 6.2:** Malla de elementos de contorno y elementos finitos para el modelo MEC-MEF y detalle del acoplamiento edificio-cimentación en el punto de referencia.

La malla de elementos de contorno y elementos finitos utilizada es la que se muestra en la figura 6.2, siendo ésta la misma que la utilizada para el problema de validación en el apartado 5.5.3. Los resultados se presentan a través del módulo de las funciones en frecuencia de las variables representativas de la respuesta para cada tipo de onda en el rango entre 0 y 10 Hz.

### 6.2.1 Ondas P

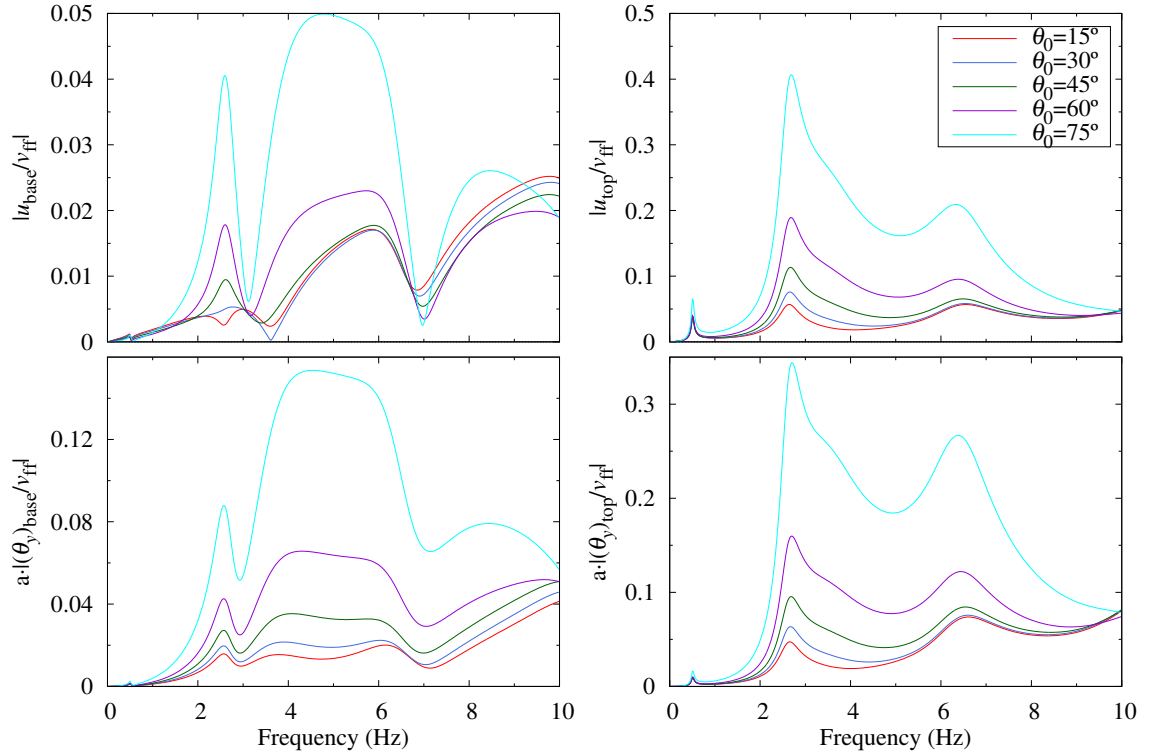
En el caso de la incidencia de un tren de ondas P contenido en el plano  $yz$ , las variables que definen la respuesta son principalmente el desplazamiento transversal  $v$ , el desplazamiento vertical  $w$ , y los giros de flexión  $\theta_x$  y de torsión  $\theta_z$ . Notar que siendo el valor del módulo de Poisson del terreno  $\nu = 0.3$ , no hay un valor del ángulo de incidencia  $\theta_0$  para el que se produzca cambio de modo de la onda P incidente. En la figura 6.3 se representa el módulo de las funciones de respuesta en frecuencia de estas variables, en la base y la parte alta del edificio (top), normalizadas con el desplazamiento de campo libre  $v_{ff}$  o  $w_{ff}$ , siendo  $a$  (20 metros) el semiancho de la sección transversal (ver figura 6.1). En algunas gráficas de esta figura se presentan detalles de los picos de amplitud de estas funciones para las frecuencias fundamentales. Se observa en general para el rango de frecuencias estudiado que cualquiera de las variables que se representan crece en amplitud con el ángulo de incidencia. En particular, la gráfica en la que se representa la función de respuesta del desplazamiento transversal en la parte alta del edificio  $|v_{top}/v_{ff}|$ , muestra detalles de los picos que se producen a la primera y segunda frecuencia fundamental. La variación con el ángulo de inclinación del valor de dicha función entre el mínimo y el máximo es aproximadamente de un 10 % para la primera frecuencia y del orden del 5 % para la segunda. Por otro lado, para la función de respuesta del desplazamiento vertical en la parte alta  $|w_{top}/w_{ff}|$ , en torno a la frecuencia fundamental, la variación entre el mínimo y el máximo valor de la función es aproximadamente del 7 %. En esta figura, para un ángulo de incidencia  $\theta_0 = 90^\circ$  (línea negra), se muestran sólo resultados para el desplazamiento vertical  $w$ , ya que para este valor del ángulo de incidencia el desplazamiento transversal de campo libre  $v_{ff}$  es nulo y no tiene sentido normalizar el desplazamiento transversal  $v$ , el giro de flexión  $\theta_x$  y la rotación torsional  $\theta_z$ , que son también nulos.



**Figura 6.3:** Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento transversal  $|v/v_{ff}|$ , del desplazamiento vertical  $|w/w_{ff}|$ , del giro de flexión  $a \cdot |(\theta_x)/v_{ff}|$  y de la rotación torsional  $a \cdot |(\theta_z)/v_{ff}|$  en la base y la parte alta (top) del edificio, debidos a la acción de ondas P con diferentes valores del ángulo de incidencia  $\theta_0$ .

Hay que mencionar que debido a la no simetría de la sección transversal en forma U, también se producen desplazamientos horizontales  $u$  en dirección del eje  $x$  perpendicular al plano de propagación y giros de flexión  $\theta_y$  alrededor del eje  $y$ , ambos con un orden de magnitud bastante inferior a las variables ya presentadas en la figura 6.3. En la figura 6.4 se presentan las funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento  $u$  y el giro de flexión  $\theta_y$ , pudiendo observarse que

no son nulas y que varían con el ángulo de incidencia. En las gráficas de esta figura el valor de las variables representadas crece con el ángulo de incidencia, es decir, a medida que la onda se vuelve más vertical. Por tanto, la componente vertical del campo de desplazamientos de la onda P, que también aumenta con el ángulo  $\theta_0$ , está relacionada directamente con el crecimiento del desplazamiento transversal  $u$  y del giro  $\theta_y$ . Los resultados correspondientes al ángulo  $\theta_0 = 90^\circ$  no se muestran debido a que para este valor, el desplazamiento transversal de campo libre  $v_{ff}$  es nulo y no tiene sentido representarlos con las reglas de normalización adoptadas, sin embargo por la tendencia mostrada se intuye que los valores de estas variables tendrían un valor aún mayor que los mostrados en las gráficas. Para estas variables se vuelve a mostrar que el valor de las funciones de respuesta crece con el valor ángulo  $\theta_0$ .



**Figura 6.4:** Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento transversal  $|u/v_{ff}|$  y del giro de flexión  $a \cdot |\theta_y/v_{ff}|$  en la base y la parte alta (top) del edificio, debidos a la acción de ondas P con diferentes valores del ángulo de incidencia  $\theta_0$ .

### 6.2.2 Ondas SV

Las variables representativas de la respuesta considerando como excitación una onda SV contenida en el plano  $yz$  y con ángulo de incidencia  $\theta_0$  son el desplazamiento transversal  $v$ , el vertical  $w$  y los giros de flexión  $\theta_x$  y de rotación  $\theta_z$ . Éstas se normalizan con el desplazamiento horizontal  $v_{ff}$  y vertical  $w_{ff}$  de campo libre. Para este tipo de onda incidente, cuando el ángulo de incidencia  $\theta_0 = 45^\circ$ , la amplitud de la onda P reflejada  $A_P^{(2)}$  se anula, lo que provoca que se refleje una única onda SV de igual amplitud que la incidente  $A_{SV}^{(0)} = A_{SV}^{(1)}$  (ver expresiones en la tabla 2.6). La contribución al campo de desplazamientos de la onda SV incidente y reflejada se contrarresta para la componente horizontal en superficie libre ( $x_3 = 0$ ), y en consecuencia ésta ( $u_2$  en la tabla 2.3) toma valor nulo. Es éste el motivo por el que no se presentan para este tipo de onda resultados para este valor del ángulo de incidencia ya que el desplazamiento horizontal de campo libre nulo no está en concordancia con las reglas de normalización de los resultados. El ángulo crítico para el suelo considerado, con un valor del módulo de Poisson  $\nu = 0.3$ , es de

57.69°. Como en el caso de la incidencia de ondas P, para este valor de  $v$  no existe un valor de  $\theta_0$  para el que se produce cambio de modo de la onda SV.

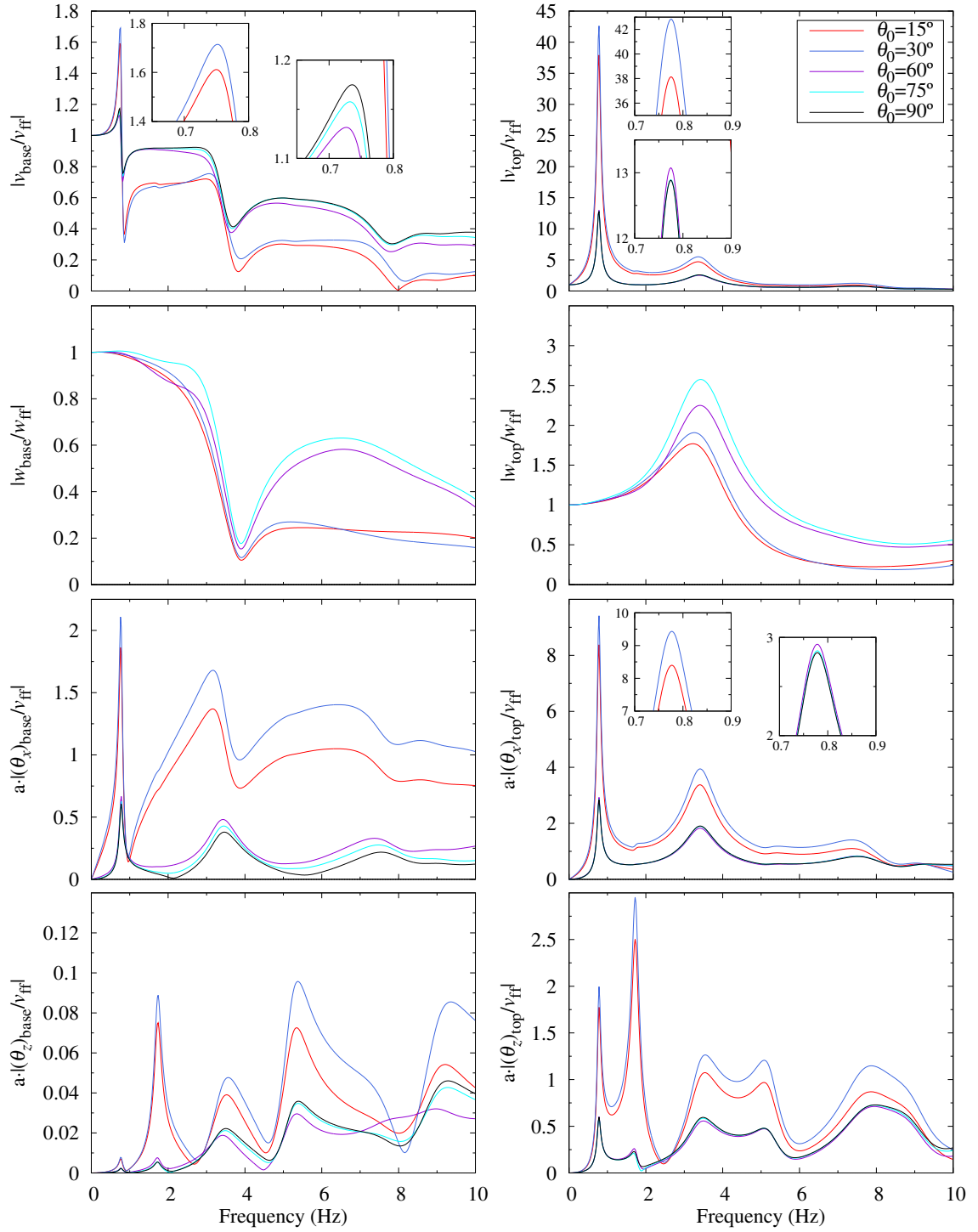
En la figura 6.5 se representa el módulo de las funciones en frecuencia de las variables representativas de la respuesta. En general, se observa que si el ángulo de incidencia  $\theta_0$  es inferior al crítico las funciones de respuesta, tanto en la base como en la parte alta, muestran valores notablemente diferentes con respecto a los resultados que se obtienen para ángulos  $\theta_0$  mayores al crítico, aunque este hecho no es tan evidente para el comportamiento vertical. Las funciones de respuesta del desplazamiento vertical  $|w/w_{ff}|$  crecen en valor con el ángulo  $\theta_0$ , aunque para el caso de incidencia completamente vertical ( $\theta_0 = 90^\circ$ ) no tiene sentido mostrar dichas funciones de respuesta con las reglas de normalización mostradas ya que la componente vertical del campo incidente  $w_{ff}$  se anula. Las funciones del desplazamiento horizontal  $|v/v_{ff}|$  tanto en la base como en la parte alta (top) presentan, en torno a la primera frecuencia fundamental, un valor notablemente mayor cuando el ángulo  $\theta_0$  es inferior al crítico. La diferencia entre los máximos de las funciones para valores de  $\theta_0$  por debajo y por encima del ángulo crítico a esta frecuencia es aproximadamente de 30 % en la base y alrededor del 70 % en la parte alta. A partir de la primera frecuencia se observa que en la base del edificio la respuesta en términos del desplazamiento horizontal  $v$  es menor si el ángulo de incidencia es menor al crítico, mientras que, en esas mismas condiciones, en la parte alta de la estructura el valor de la respuesta es mayor en todo el rango de frecuencias mostrado. Las funciones de respuesta en términos del giro de flexión  $\theta_x$  y de torsión  $\theta_z$  también muestran valores de respuesta mayores en todo el rango de frecuencias cuando el ángulo de incidencia es inferior al crítico. Los valores de las diferencias en torno a la primera frecuencia natural están entre el 60 y el 70 %.

Como ocurría en el caso de la incidencia de ondas P, por la forma en U de la sección, también se producen para ondas SV desplazamientos horizontales  $u$  y giros de flexión  $\theta_y$ . En la figura 6.6 se representan las funciones de respuesta en frecuencia para estas dos variables en la base y la parte alta (top) de la estructura. Se puede ver aquí también la notable diferencia en la respuesta cuando el valor del ángulo de incidencia es menor o mayor que el ángulo crítico. También, como ocurría para el caso de las ondas P, el valor de las funciones de estas variables está relacionado con la componente vertical del campo incidente. De esta forma para valores de  $\theta_0$  inferiores al crítico, el desplazamiento vertical del campo de desplazamientos de la excitación aumenta con el ángulo, y en consecuencia también son mayores los valores de las funciones de respuesta representadas. Por contra, para valores de  $\theta_0$  superiores al crítico, la componente vertical del campo de desplazamientos de las ondas decrece a medida que aumenta  $\theta_0$  y por tanto también lo hace la respuesta en términos de las variables representadas. En el caso de  $\theta_0 = 90^\circ$  el valor del desplazamiento vertical que produce el campo incidente es cero siendo ambas variables  $u$  y  $\theta_y$  también nulas.

### 6.2.3 Ondas SH

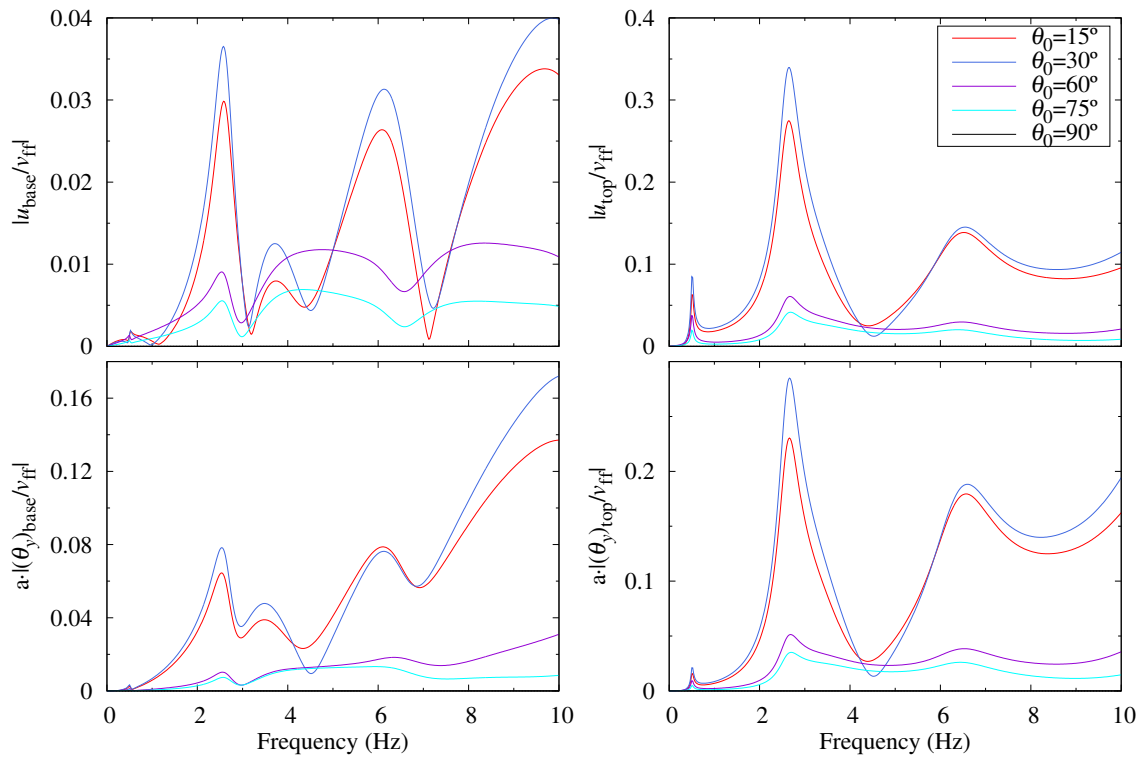
Considerando como excitación la incidencia de ondas SH cuya dirección de propagación está contenida en el plano yz, se producen sobre el sistema desplazamientos transversales  $u$  fuera de dicho plano y giros de flexión  $\theta_y$ . Para cualquier ángulo de incidencia no vertical la excitación contiene parte simétrica y parte antisimétrica (respecto al plano xz). La respuesta de la estructura por tanto puede incluir desplazamientos simétricos como es el desplazamiento vertical  $w$ . En la figura 6.7 se muestran las funciones de respuesta en frecuencia de estas variables normalizadas con el desplazamiento de campo libre  $u_{ff}$ . Los resultados representados en esta figura muestran que para bajas frecuencias, incluyendo la primera frecuencia natural hasta casi la segunda, la variación de la respuesta con el ángulo de incidencia es insignificante. Por contra, a partir de la segunda frecuencia natural, la cual tiene un valor en torno a 2.65 Hz, se aprecia





**Figura 6.5:** Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento transversal  $|v/v_{ff}|$ , del desplazamiento vertical  $|w/w_{ff}|$ , del giro de flexión  $a \cdot |\theta_x/v_{ff}|$  y de la rotación torsional  $a \cdot |\theta_z/v_{ff}|$  en la base y la parte alta (top) del edificio, debidos a la acción de ondas SV con diferentes valores del ángulo de incidencia  $\theta_0$ .

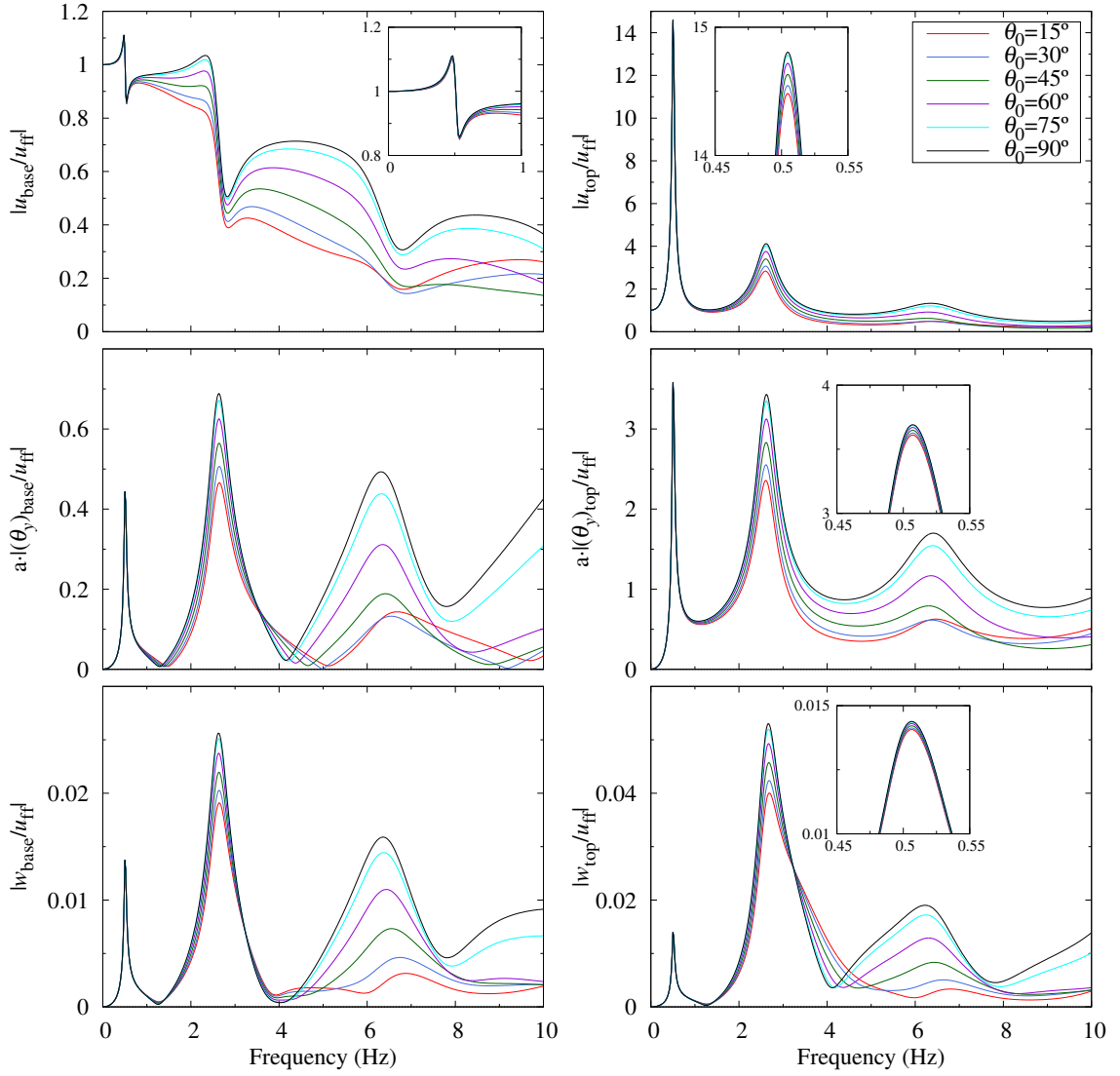
variación en el valor de la respuesta con el ángulo  $\theta_0$ . El detalle en la gráfica del desplazamiento transversal en la parte alta  $|u_{top}/u_{ff}|$  (arriba derecha) muestra, para la primera frecuencia fundamental, que la variación del valor absoluto es aproximadamente del 2 % entre el mínimo (para  $\theta_0 = 15^\circ$ ) y el máximo (para  $\theta_0 = 90^\circ$ ), apreciándose además que el valor de la función aumenta a medida que crece  $\theta_0$ . Para esta misma función, la variación en torno a la segunda frecuencia



**Figura 6.6:** Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento transversal  $|u/v_{ff}|$  y del giro de flexión  $a_l(\theta)_y/v_{ff}$  en la base y la parte alta (top) del edificio, debidos a la acción de ondas SV con diferentes valores del ángulo de incidencia  $\theta_0$ .

fundamental es notablemente mayor, aproximadamente del 30% entre el valor mínimo (para  $\theta_0 = 15^\circ$ ) y el máximo (para  $\theta_0 = 90^\circ$ ). Para las funciones de respuesta del giro de flexión  $\theta_y$  y del desplazamiento vertical  $w$  la variación sigue la misma tendencia, con variaciones insignificantes de la respuesta hasta frecuencias algo mayores a la primera frecuencia fundamental y cambios notablemente más visibles a partir de la segunda frecuencia fundamental. Es claro por tanto que para este tipo de ondas transversales, la respuesta del sistema también aumenta con la magnitud del ángulo de incidencia.

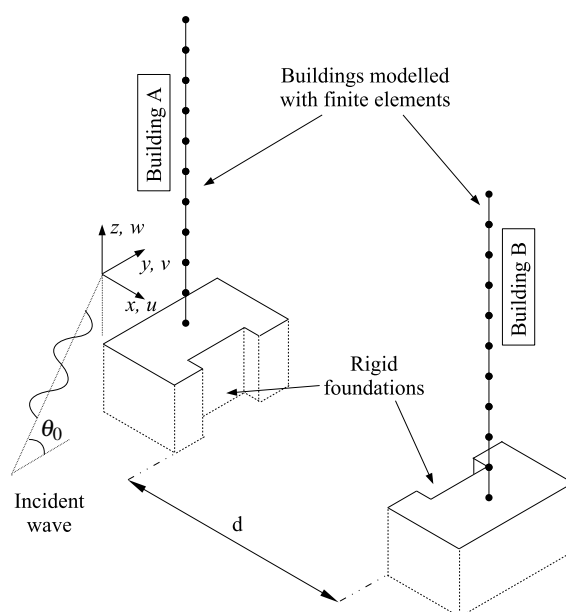
En general se observa que para cualquier tipo de onda considerada (P, SV o SH) existe variación, con el ángulo de incidencia  $\theta_0$ , en la respuesta vertical, transversal, de flexión y de torsión de la estructura. Dichas variaciones se han evidenciado en los valores de las funciones en torno a la primera y segunda frecuencia fundamental y puede hacerse extensivo a prácticamente todo el rango de frecuencias estudiado.



**Figura 6.7:** Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento transversal  $|u/u_{ff}|$ , del giro de flexión  $a \cdot |\theta_y|/u_{ff}$  y del desplazamiento vertical  $|w/w_{ff}|$  en la base y la parte alta (top) del edificio, debidos a la acción de ondas SH con diferentes valores del ángulo de incidencia  $\theta_0$ .

### 6.3 Interacción estructura–suelo–estructura.

Una vez estudiada la respuesta de un edificio para diferentes tipos de onda y la influencia en aquella del ángulo de incidencia, el siguiente paso es estudiar la respuesta de un sistema compuesto por dos edificios como el de la figura 6.1, idénticos entre sí y que se encuentran relativamente cerca el uno del otro, separados una distancia  $d$  (25 y 50 metros). En la figura 6.8 se muestra el esquema con la disposición de las cimentaciones y las correspondientes superestructuras modeladas con elementos finitos de dos nodos.

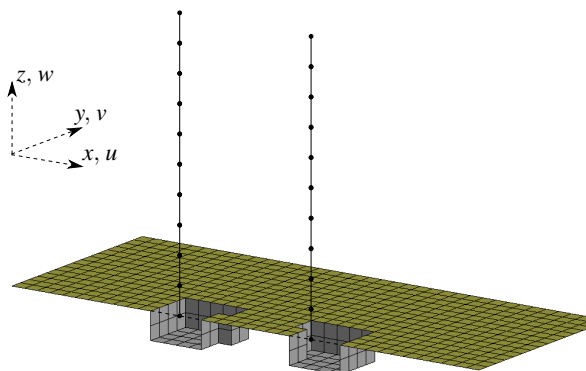


**Figura 6.8:** Esquema de la vista isométrica del sistema compuesto por de dos edificios, separados una distancia  $d$ , sobre el que actúa un campo de ondas (P, SV o SH) contenido en el plano  $yz$  con un ángulo de incidencia  $\theta_0$ .

El terreno que aloja la cimentación de ambas estructuras se considera como un semiespacio viscoelástico con las mismas propiedades que para el caso de un sólo edificio. Nuevamente, se considera como excitación la acción de ondas P, SV y SH contenidas en el plano  $yz$  y que inciden con un ángulo genérico  $\theta_0$ .

En la figura 6.9 se muestra la malla MEC–MEF cuando la distancia entre los edificios es  $d = 25$  metros. La malla para el caso en el que la distancia  $d = 50$  metros es muy similar siendo ésta última algo más grande por la mayor distancia entre edificios.

El interés de este estudio radica en ver cómo influye en la respuesta de la estructura la presencia de otra cercana con respecto a la respuesta de un edificio aislado. Es por ello que los resultados obtenidos para dicho sistema de dos edificios se comparan con los mostrados en el apartado anterior para un único edificio. Para el sistema formado por ambos edificios y con el tipo de excitación considerada, la respuesta de ambas estructuras es idéntica en módulo, sin embargo se verá que las funciones de respuesta de éstos presentan valores diferentes con respecto a los obtenidos para un sólo edificio aislado. Los valores del ángulo de incidencia escogidos son únicamente 30, 60, 75 y 90 grados.



**Figura 6.9:** Malla MEC-MEF para modelar el sistema compuesto por dos edificios separados una distancia  $d = 25$  metros (sólo se malla la mitad de la geometría).

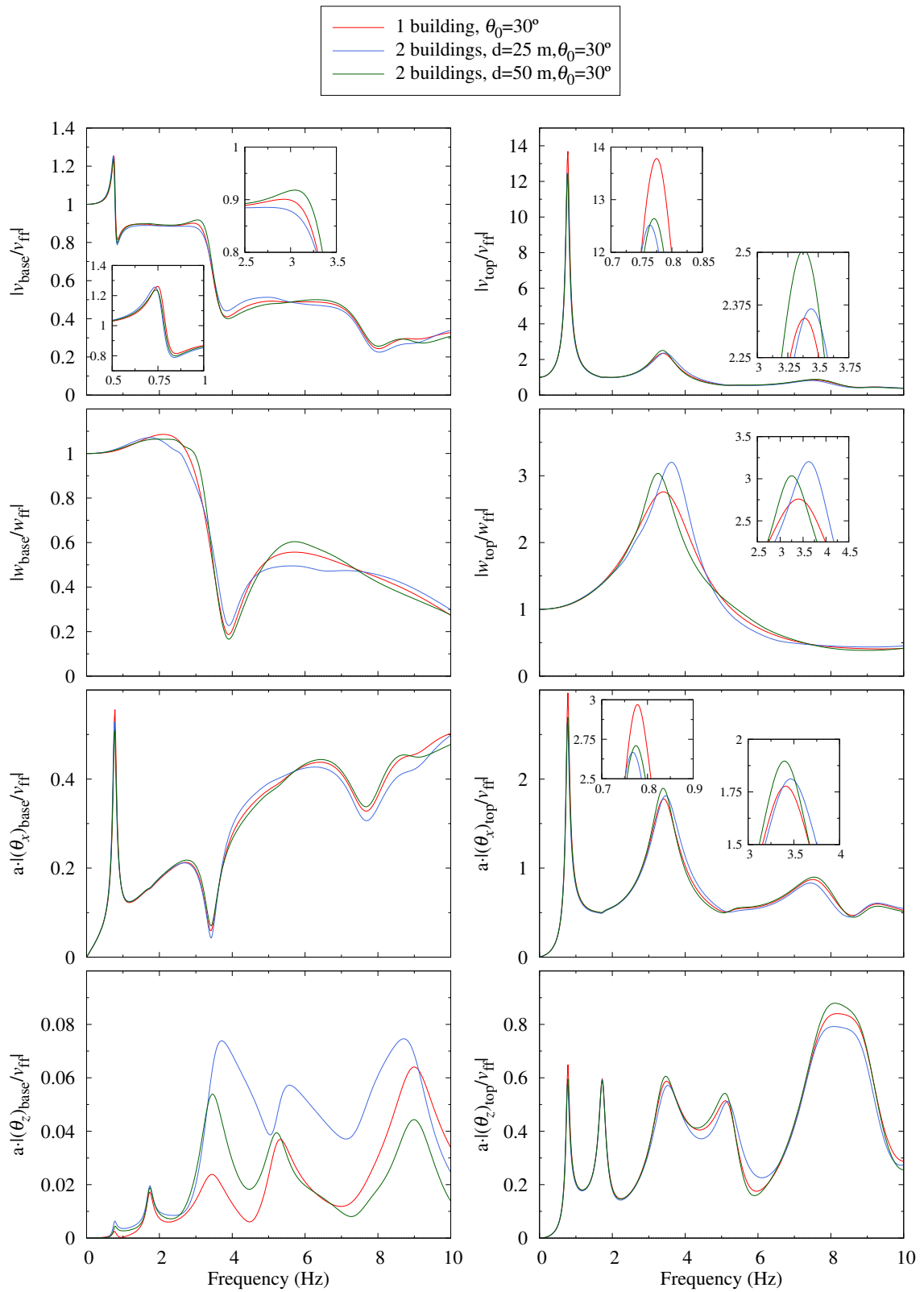
### 6.3.1 Ondas P

Considerando la acción de ondas P con ángulo de incidencia  $\theta_0$ , en las figuras 6.10, 6.11, 6.12 y 6.13 se muestra la respuesta del sistema formado por dos edificios frente a la respuesta de un sólo edificio aislado cuando  $\theta_0$  toma los valores 30, 60, 75 y 90 grados respectivamente. Por la naturaleza de la excitación se representan en la base y parte alta del edificio las funciones del desplazamiento transversal  $|v/v_{ff}|$ , del desplazamiento vertical  $|w/w_{ff}|$ , del giro de flexión  $a \cdot |\theta_x/v_{ff}|$  y la rotación torsional  $a \cdot |\theta_z/v_{ff}|$ . Para el valor  $\theta_0 = 90^\circ$  se presentan sólo las funciones del desplazamiento vertical  $|w/w_{ff}|$  por tratarse de una onda P completamente vertical, siendo el resto de variables mencionadas nulas para este caso particular. En las figuras se observan algunas diferencias entre la respuesta del sistema compuesto por dos edificios con respecto a la del formado por un sólo edificio. Las gráficas que muestran las variables de la respuesta en la parte alta del edificio incluyen detalles de los valores que toman las funciones para las frecuencias fundamentales. Para el desplazamiento transversal  $v$  en la parte alta a la primera frecuencia fundamental, independientemente del ángulo, el valor de la respuesta del sistema con un sólo edificio es aproximadamente un 9 % mayor que la del sistema de dos edificios, siendo poco importante la influencia de la distancia  $d$  a esta frecuencia. En el detalle en torno a la segunda frecuencia fundamental, se puede ver que la diferencia de respuesta de un sólo edificio con respecto a la de dos edificios separados 25 metros es muy pequeña, algo menor del 1 %, mientras que para una distancia entre estructuras de 50 metros las diferencias son del orden de 8 %. Se observan también muy pequeñas modificaciones en el valor de las frecuencias fundamentales del edificio por la presencia de otro cercano. En la gráfica del desplazamiento vertical en la parte alta las diferencias son más evidentes y se observan diferencias también por la variación de la distancia  $d$ , siendo la respuesta vertical entre el 17 % y el 20 % mayor cuando la distancia entre edificios es de 25 metros, y entre el 7 % y el 12 % si la separación es 50 metros, con respecto a la respuesta de un único edificio. Para el comportamiento vertical las variaciones del valor de la frecuencia fundamental, aunque son pequeñas, son algo más notables.

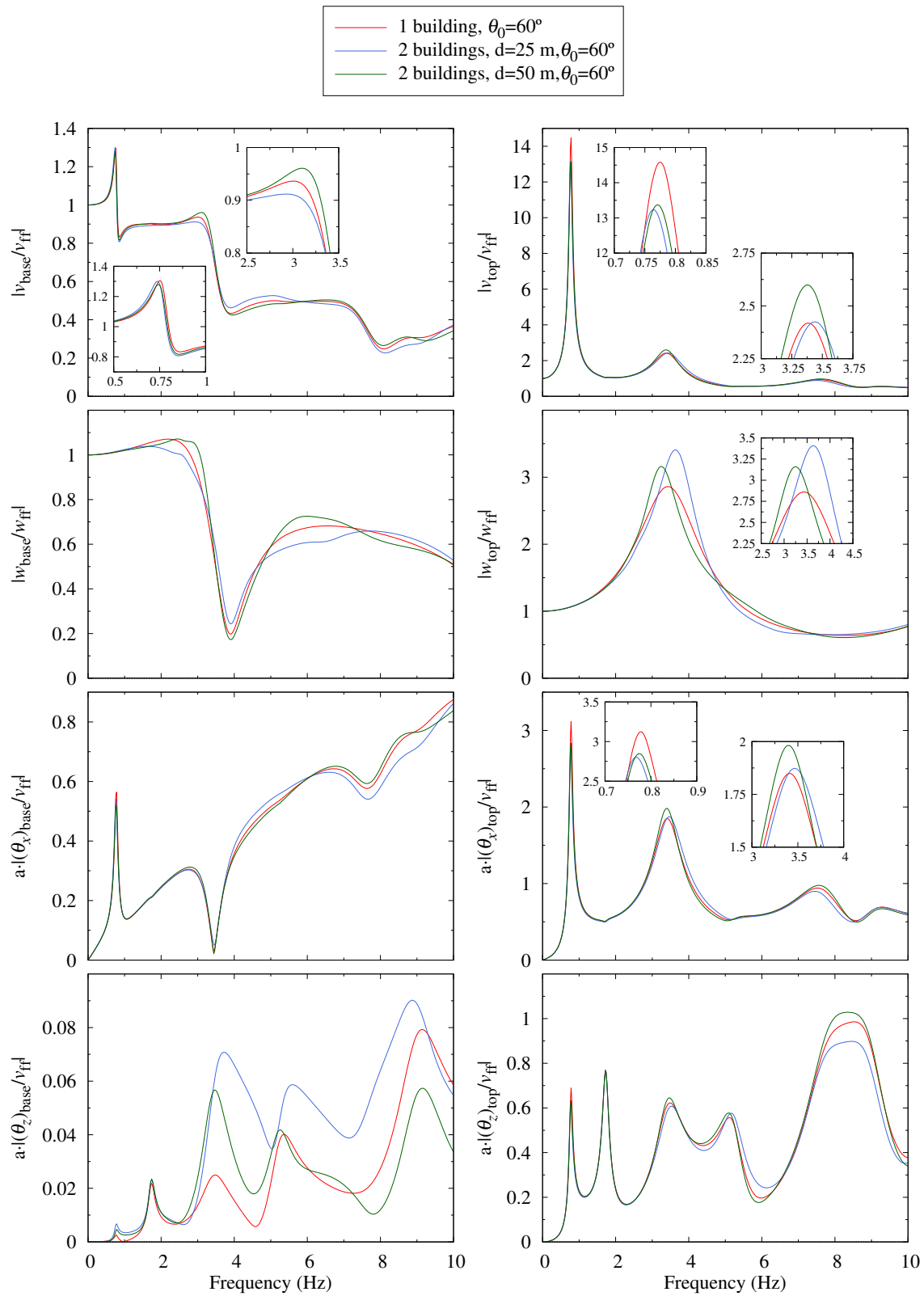
Es interesante observar también como se modifican las funciones la respuesta en términos del desplazamiento transversal  $u$  en la dirección del eje  $x$  y del giro del giro de flexión  $\theta_y$ . Las figuras 6.14, 6.15, 6.16 muestran, respectivamente para valores 30, 60 y 75 grados del ángulo de incidencia  $\theta_0$ , las funciones de respuesta de estas variables en la base y la parte alta del edificio. Para el caso en que el ángulo de incidencia es igual a 90 grados las funciones de respuesta de estas variables no se anulan, pero la normalización no es aplicable ya que, para dicho valor de  $\theta_0$ , se anula  $v_{ff}$ , motivo por el cual no se presentan. Las funciones de estas variables muestran un aumento considerable, tanto en la base como en la parte alta, de la respuesta por la presencia de

## 6 Estudio de la respuesta dinámica de estructuras de edificación. Resultados.

otra estructura cercana. Además, dicho aumento varía con la distancia entre ambas estructuras, siendo mayor la respuesta para el menor valor de la separación (25 metros).

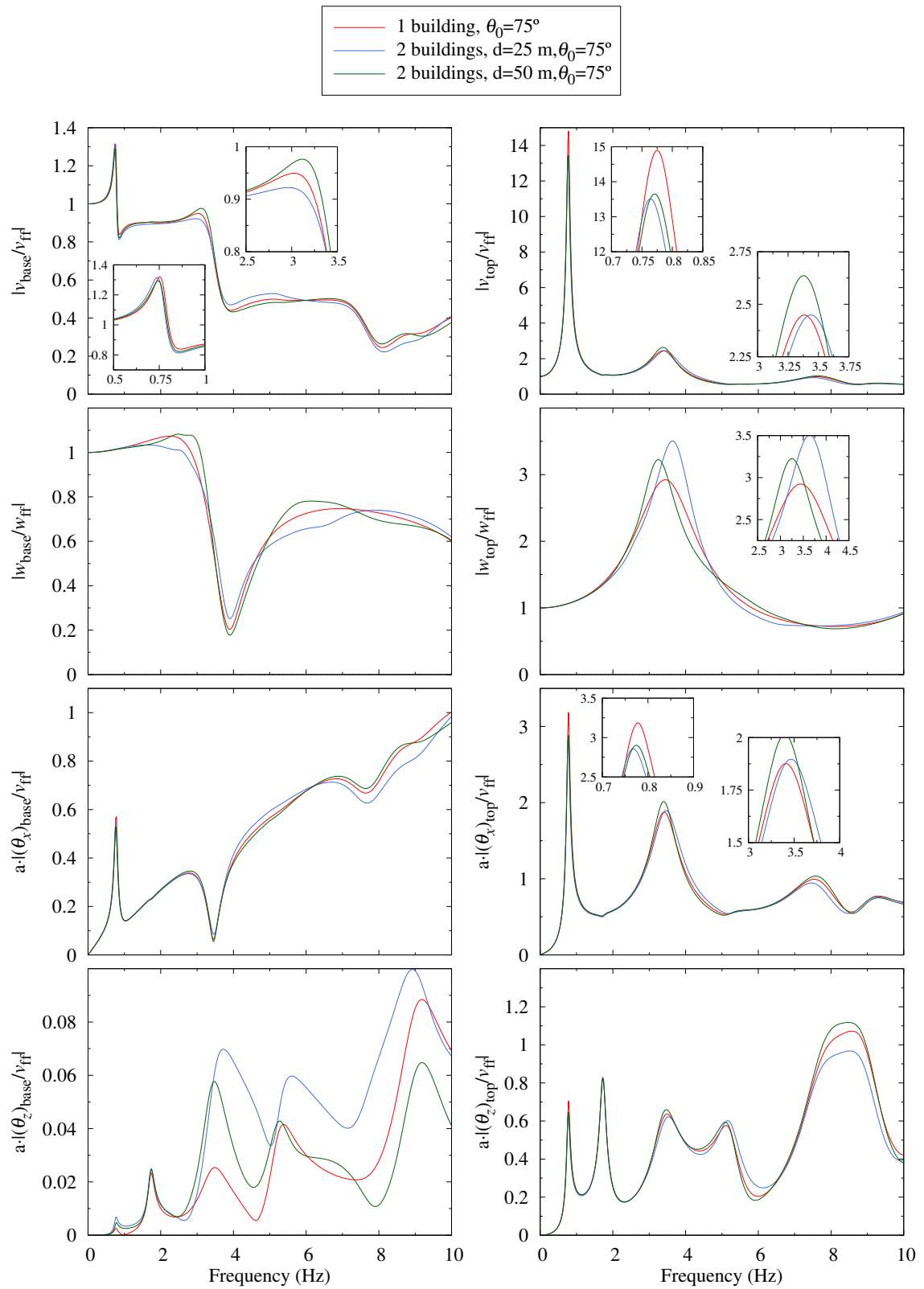


**Figura 6.10:** Comparativa de la respuesta del sistema formado por dos edificios cercanos separados una distancia  $d$  (25 y 50 metros) con la de un sólo edificio aislado. Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento transversal  $|v/v_{\text{ff}}|$ , del desplazamiento vertical  $|w/w_{\text{ff}}|$ , del giro de flexión  $a \cdot |\theta_x/v_{\text{ff}}|$  y de la rotación torsional  $a \cdot |\theta_z/v_{\text{ff}}|$  en la base y la parte alta (top) del edificio, debidos a la acción de ondas P con ángulo de incidencia  $\theta_0 = 30^\circ$ .

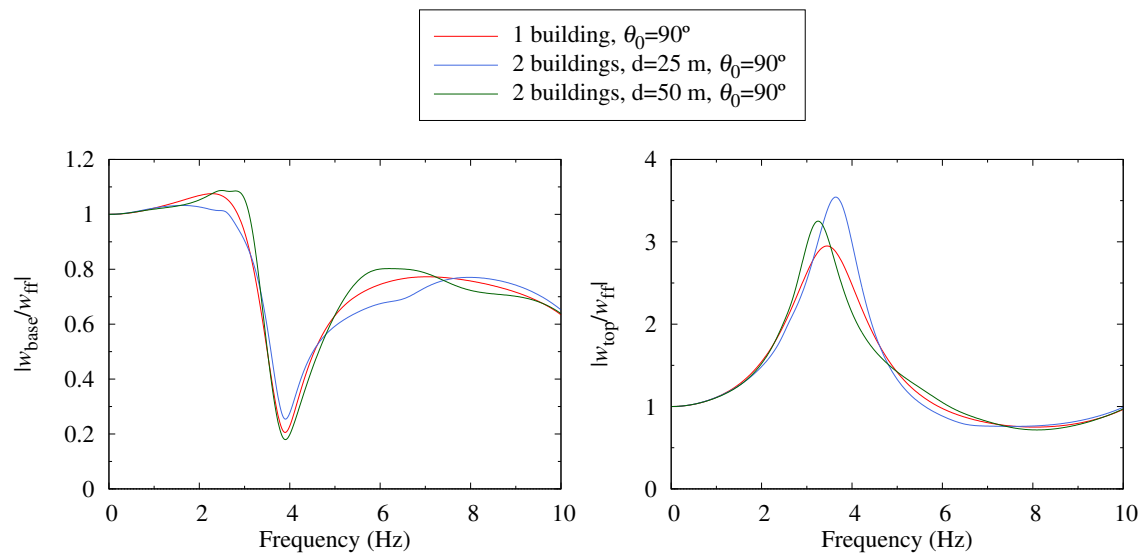


**Figura 6.11:** Comparativa de la respuesta del sistema formado por dos edificios cercanos separados una distancia  $d$  (25 y 50 metros) con la de un sólo edificio aislado. Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento transversal  $|v/v_{\text{ff}}|$ , del desplazamiento vertical  $|w/w_{\text{ff}}|$ , del giro de flexión  $a \cdot |\theta_x/v_{\text{ff}}|$  y de la rotación torsional  $a \cdot |\theta_z/v_{\text{ff}}|$  en la base y la parte alta (top) del edificio, debidos a la acción de ondas P con ángulo de incidencia  $\theta_0 = 60^\circ$ .

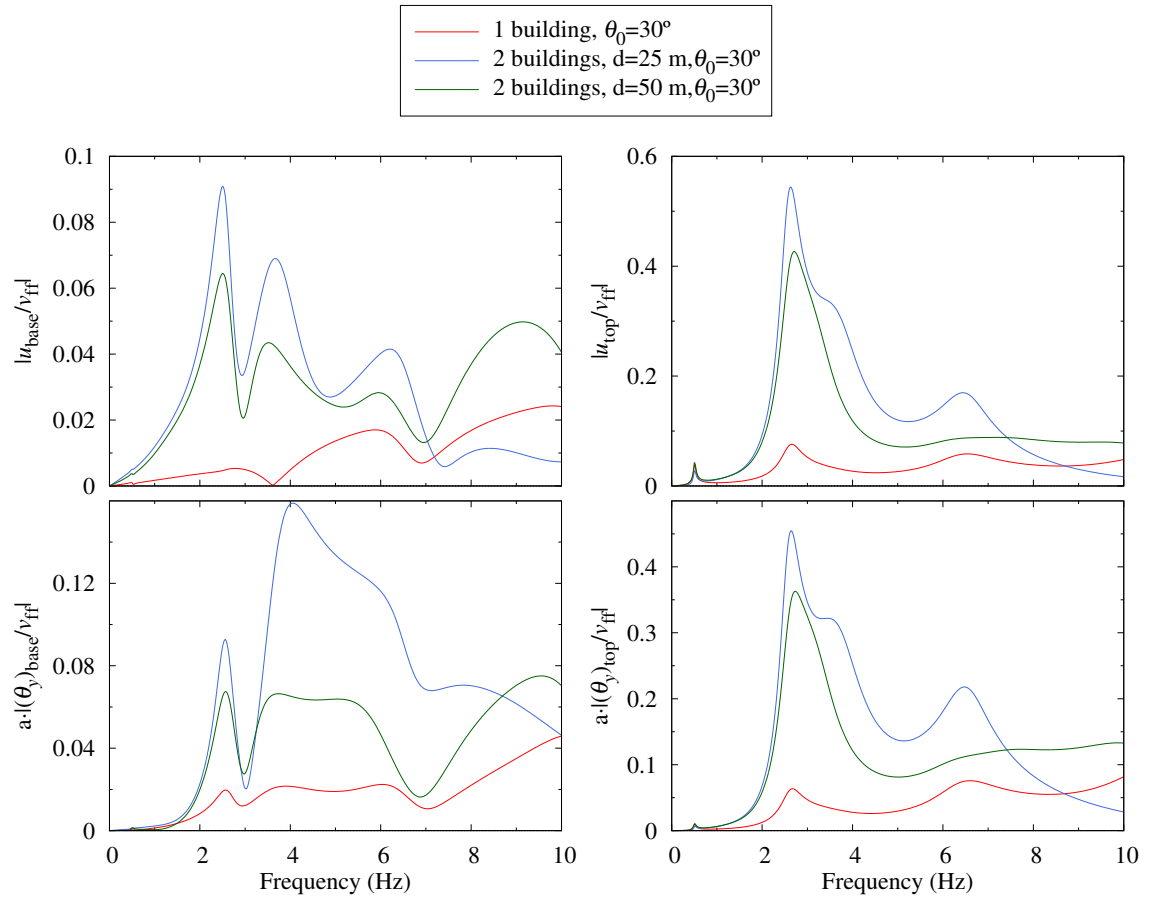




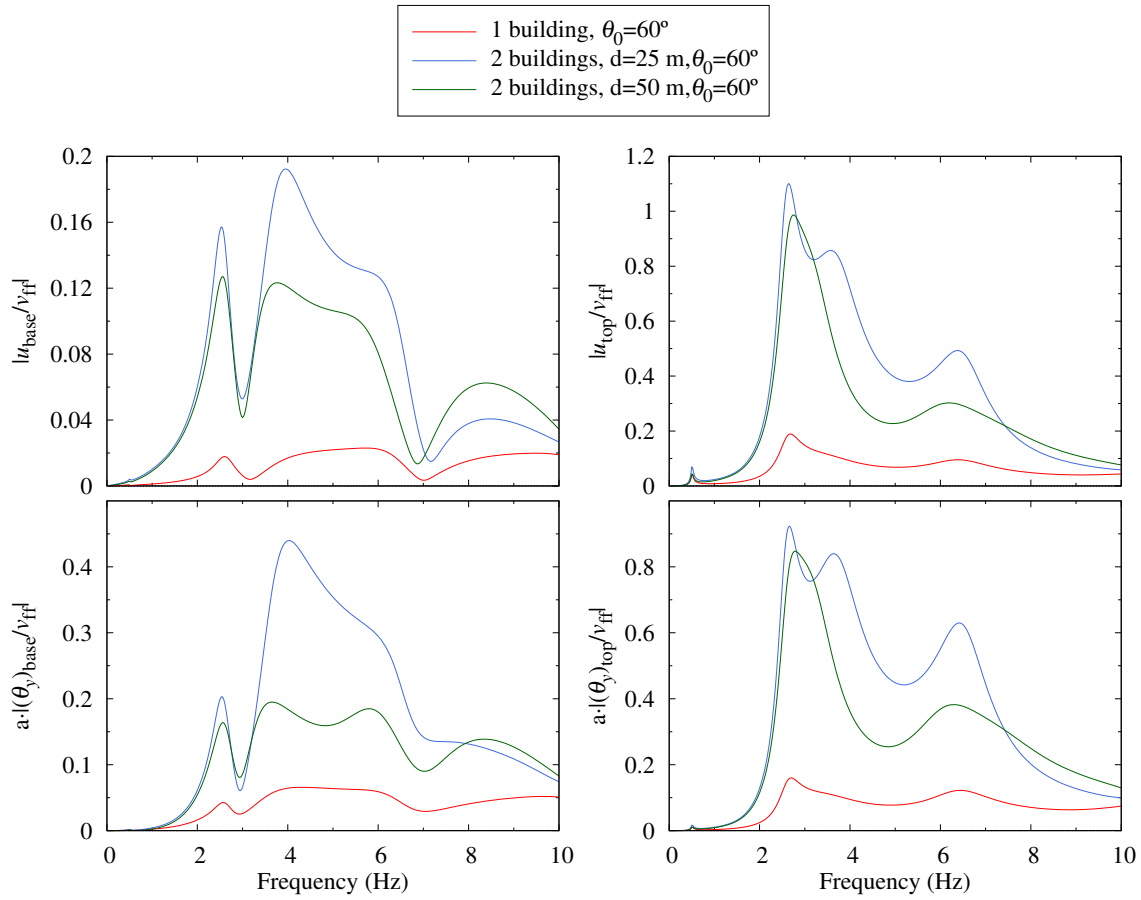
**Figura 6.12:** Comparativa de la respuesta del sistema formado por dos edificios cercanos separados una distancia  $d$  (25 y 50 metros) con la de un sólo edificio aislado. Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento transversal  $|v/v_{ff}|$ , del desplazamiento vertical  $|w/w_{ff}|$ , del giro de flexión  $a \cdot |\theta_x/v_{ff}|$  y de la rotación torsional  $a \cdot |\theta_z/v_{ff}|$  en la base y la parte alta (top) del edificio, debidos a la acción de ondas P con ángulo de incidencia  $\theta_0 = 75^\circ$ .



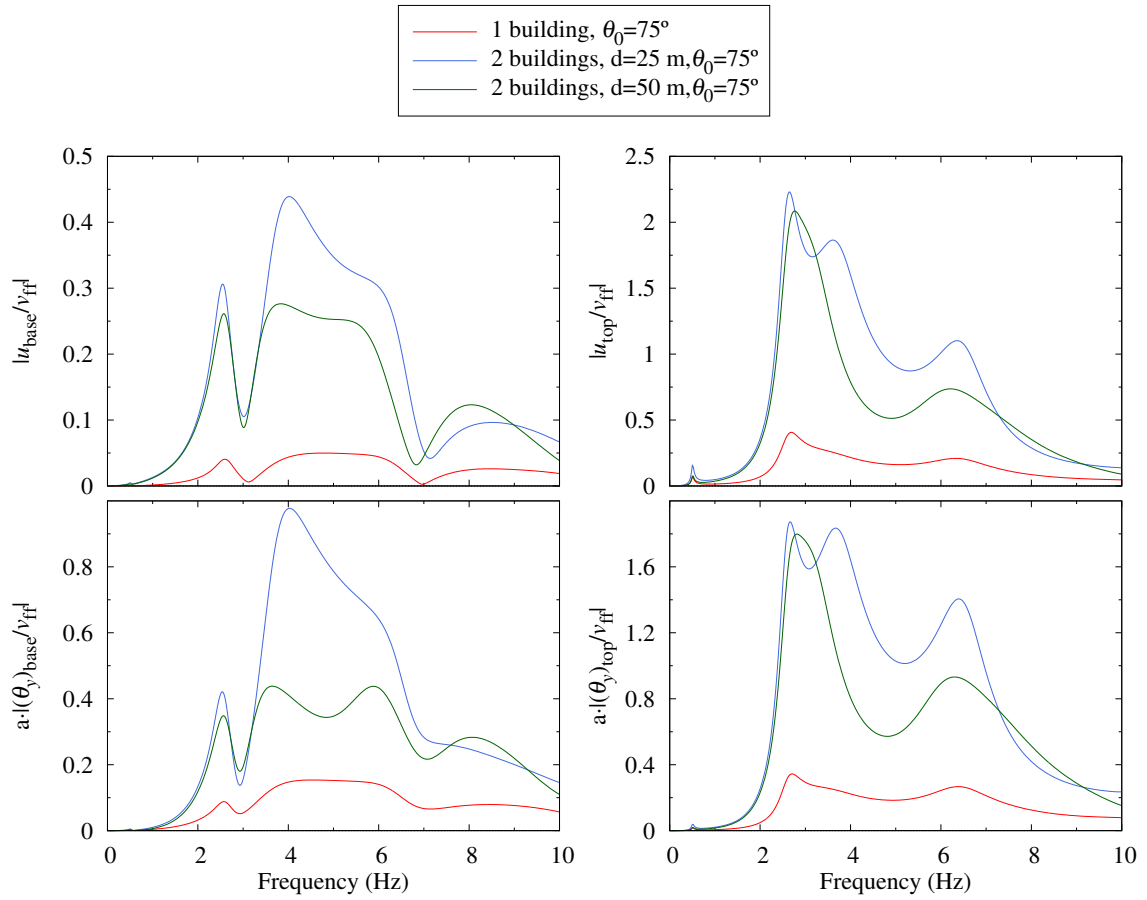
**Figura 6.13:** Comparativa de la respuesta del sistema formado por dos edificios cercanos separados una distancia  $d$  (25 y 50 metros) con la de un sólo edificio aislado. Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento vertical  $|w/w_{ff}|$  en la base y la parte alta (top) del edificio, debidos a la acción de ondas P con ángulo de incidencia  $\theta_0 = 90^\circ$ .



**Figura 6.14:** Comparativa de la respuesta del sistema formado por dos edificios cercanos separados una distancia  $d$  (25 y 50 metros) con la de un sólo edificio aislado. Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento transversal  $|u/v_{ff}|$  y del giro de flexión  $a \cdot |\theta_y/v_{ff}|$  en la base y la parte alta (top) del edificio, debidos a la acción de ondas P con ángulo de incidencia  $\theta_0 = 30^\circ$ .



**Figura 6.15:** Comparativa de la respuesta del sistema formado por dos edificios cercanos separados una distancia  $d$  (25 y 50 metros) con la de un sólo edificio aislado. Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento transversal  $|u/v_{ff}|$  y del giro de flexión  $a \cdot |\theta_x/v_{ff}|$  en la base y la parte alta (top) del edificio, debidos a la acción de ondas P con ángulo de incidencia  $\theta_0 = 60^\circ$ .

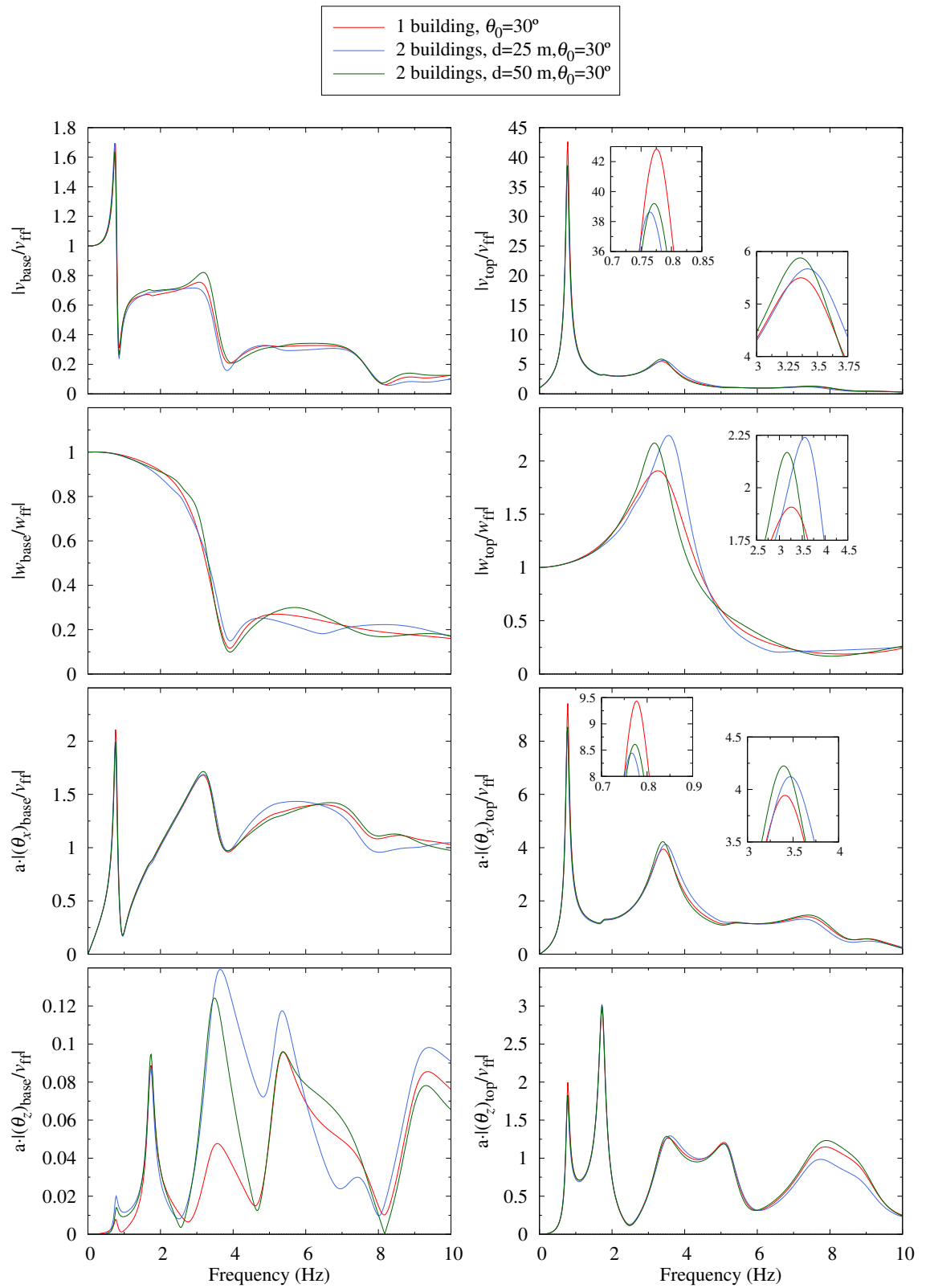


**Figura 6.16:** Comparativa de la respuesta del sistema formado por dos edificios cercanos separados una distancia  $d$  (25 y 50 metros) con la de un sólo edificio aislado. Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento transversal  $|v/v_{\text{ff}}|$  y del giro de flexión  $a \cdot |\theta_x/v_{\text{ff}}|$  en la base y la parte alta (top) del edificio, debidos a la acción de ondas P con ángulo de incidencia  $\theta_0 = 75^\circ$ .

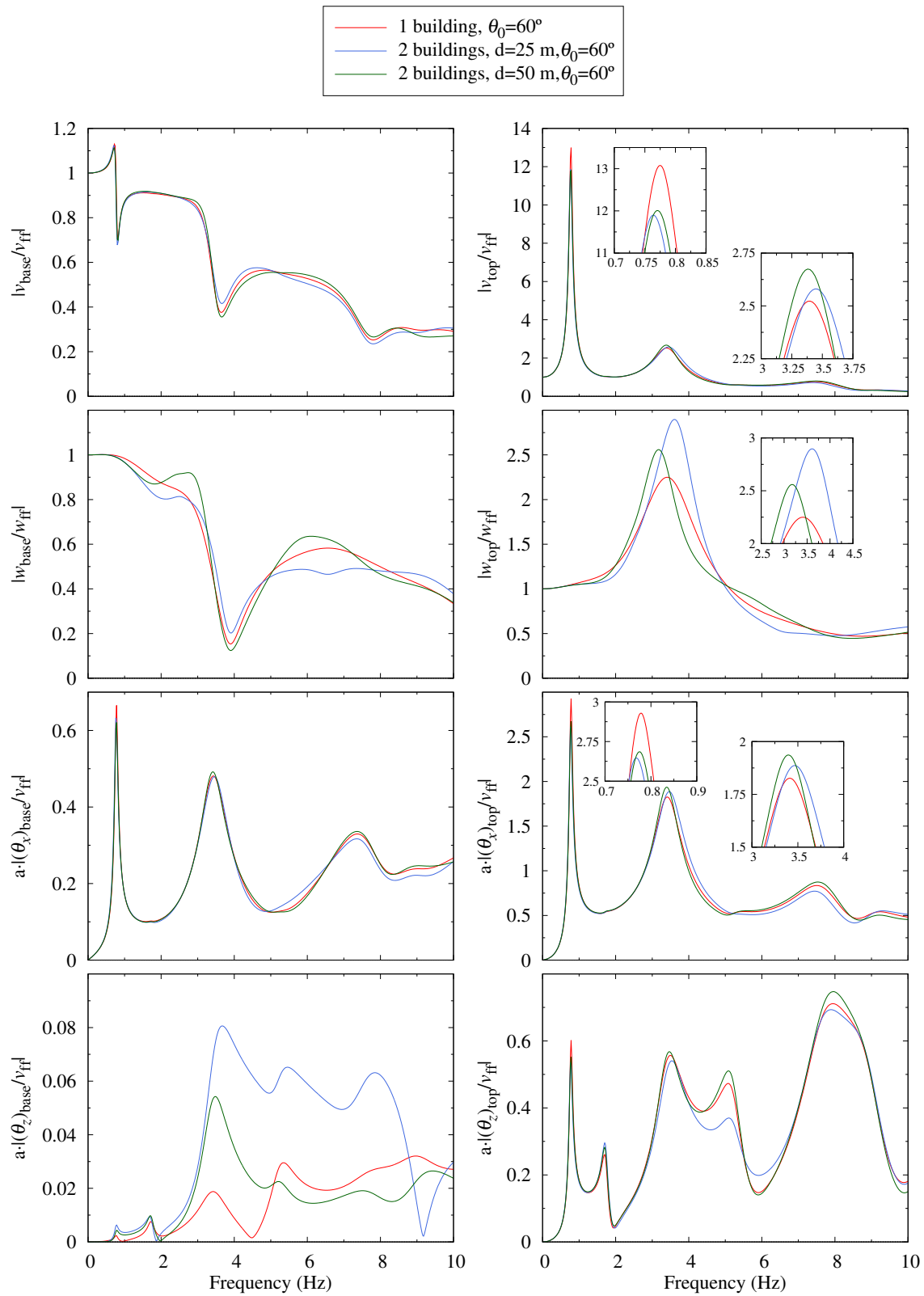
### 6.3.2 Ondas SV

Se considera ahora la acción, sobre el sistema de dos edificios separados una distancia  $d$  (ver figura 6.8), de un tren de ondas SV cuya dirección de propagación está contenida en el plano  $yz$ , con ángulo de incidencia  $\theta_0$ , el cual toma los valores de 30, 60, 75 y 90 grados. En las figuras 6.17, 6.18, 6.19 y 6.20 se muestran las funciones de respuesta de dicho sistema junto con las de un sólo edificio aislado para los valores del ángulo de incidencia mencionados. Dichas funciones se representan, normalizadas con los desplazamientos de campo libre horizontal  $v_{ff}$  y vertical  $w_{ff}$ , en términos del desplazamiento horizontal  $|v/v_{ff}|$ , del desplazamiento vertical  $|w/w_{ff}|$ , del giro de flexión  $a \cdot |\theta_x/v_{ff}|$  y del giro de torsión  $a \cdot |\theta_z/v_{ff}|$ , tanto en la base como en la parte alta de la estructura. En la figura 6.20 no se muestran las funciones de respuesta del desplazamiento vertical, ya que el desplazamiento vertical que produce el campo incidente  $w_{ff}$  se anula y no es posible su normalización. Las gráficas de estas figuras muestran que, también con ondas SV, existe influencia en la respuesta del sistema por la presencia de otra estructura cercana. Las mayores diferencias entre la respuesta del sistema de dos edificios con respecto a la del constituido por una única estructura se observan en las funciones del desplazamiento vertical en la parte alta  $|w_{top}/w_{ff}|$ . En torno a la frecuencia fundamental, el valor de la respuesta del sistema crece, según el ángulo de incidencia, entre el 20 % y el 25 % si la distancia  $d=25$  metros, y entre el 12 % y el 14 % si  $d=50$  metros. Para el comportamiento a flexión de las estructuras, es decir, para las funciones de respuesta del desplazamiento transversal  $v$  y el giro de flexión  $\theta_x$ , las diferencias entre los valores de las funciones en torno a la primera frecuencia fundamental son aproximadamente un 9 % menores para el caso de dos edificios, siendo la variación con la distancia  $d$  insignificante. Los valores de estas mismas funciones en torno a la segunda frecuencia fundamental muestran valores aproximadamente 4 % mayores si  $d=25$  metros y un 8 % mayores si  $d=50$  metros, con respecto a los de la respuesta de un sólo edificio. Se observan también muy pequeñas modificaciones del valor de las frecuencias fundamentales del edificio por la presencia de otro cercano.

Vuelve a ser interesante estudiar como se modifica la respuesta en términos del desplazamiento transversal  $u$  y el giro de flexión  $\theta_y$ . En las figuras 6.21, 6.22, 6.23 se muestran, respectivamente para los valores de  $\theta_0$  mencionados (30, 60, 75 grados), las funciones de respuesta de estas dos variables en la base y la parte alta de la estructura. Es evidente observando estas funciones que el valor de la respuesta aumenta considerablemente cuando existe otra estructura cercana. Dicho aumento es mayor para la distancia entre edificios de 25 metros y decrece cuando la esta distancia aumenta a 50 metros. En particular, para el valor del ángulo de incidencia  $\theta_0 = 90^\circ$  (no hay reflexión en onda P) no se presentan dichas funciones ya que el valor de éstas se anula, lo cual vuelve a confirmar que la respuesta de la estructura en términos de estas variables está relacionada con la componente vertical del campo incidente para este tipo de onda.

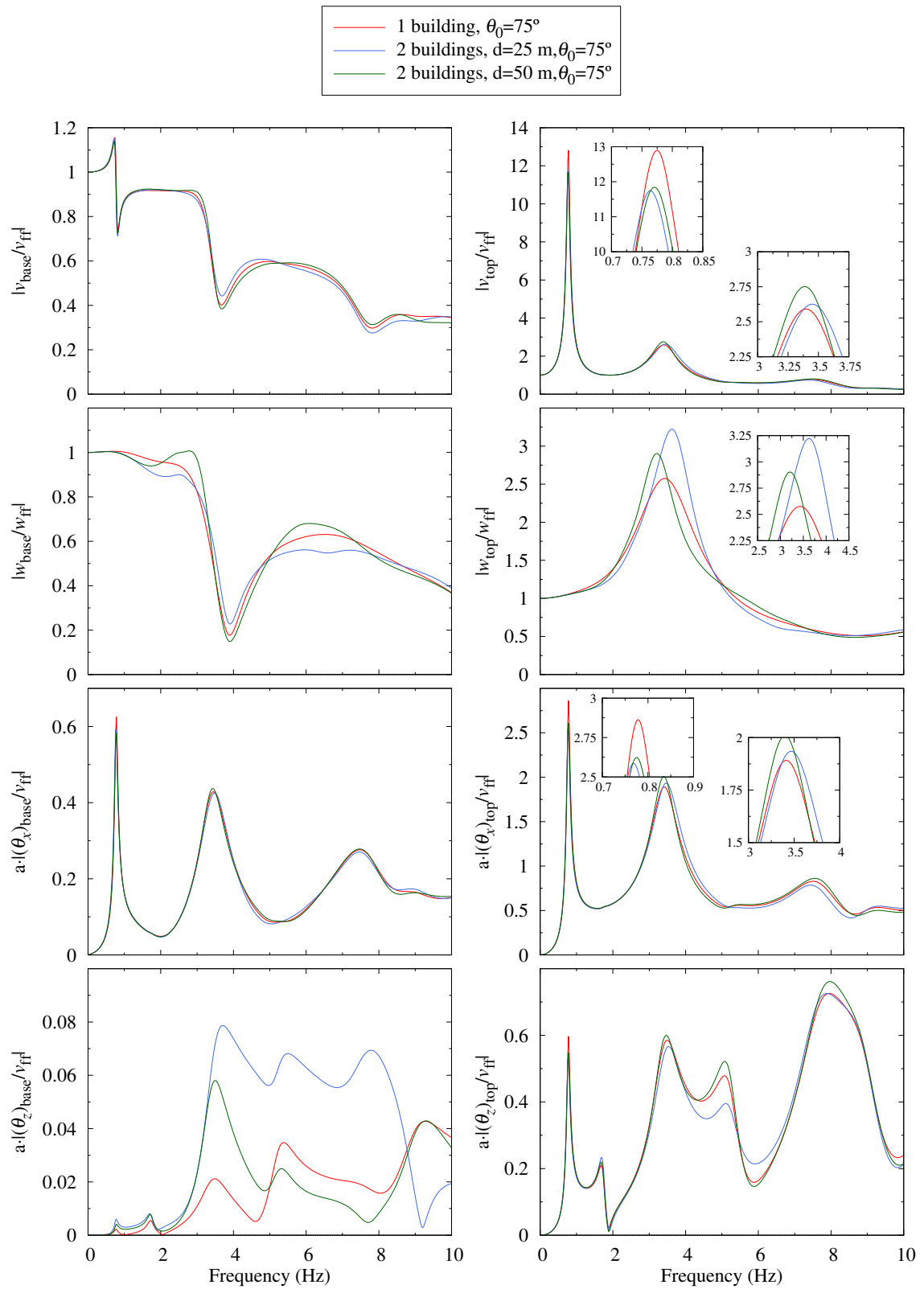


**Figura 6.17:** Comparativa de la respuesta del sistema formado por dos edificios cercanos separados una distancia  $d$  (25 y 50 metros) con la de un sólo edificio aislado. Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento transversal  $|v/v_{\text{ff}}|$ , del desplazamiento vertical  $|w/w_{\text{ff}}|$ , del giro de flexión  $a \cdot |\theta_x/v_{\text{ff}}|$  y de la rotación torsional  $a \cdot |\theta_z/v_{\text{ff}}|$  en la base y la parte alta (top) del edificio, debidos a la acción de ondas SV con ángulo de incidencia  $\theta_0 = 30^\circ$ .

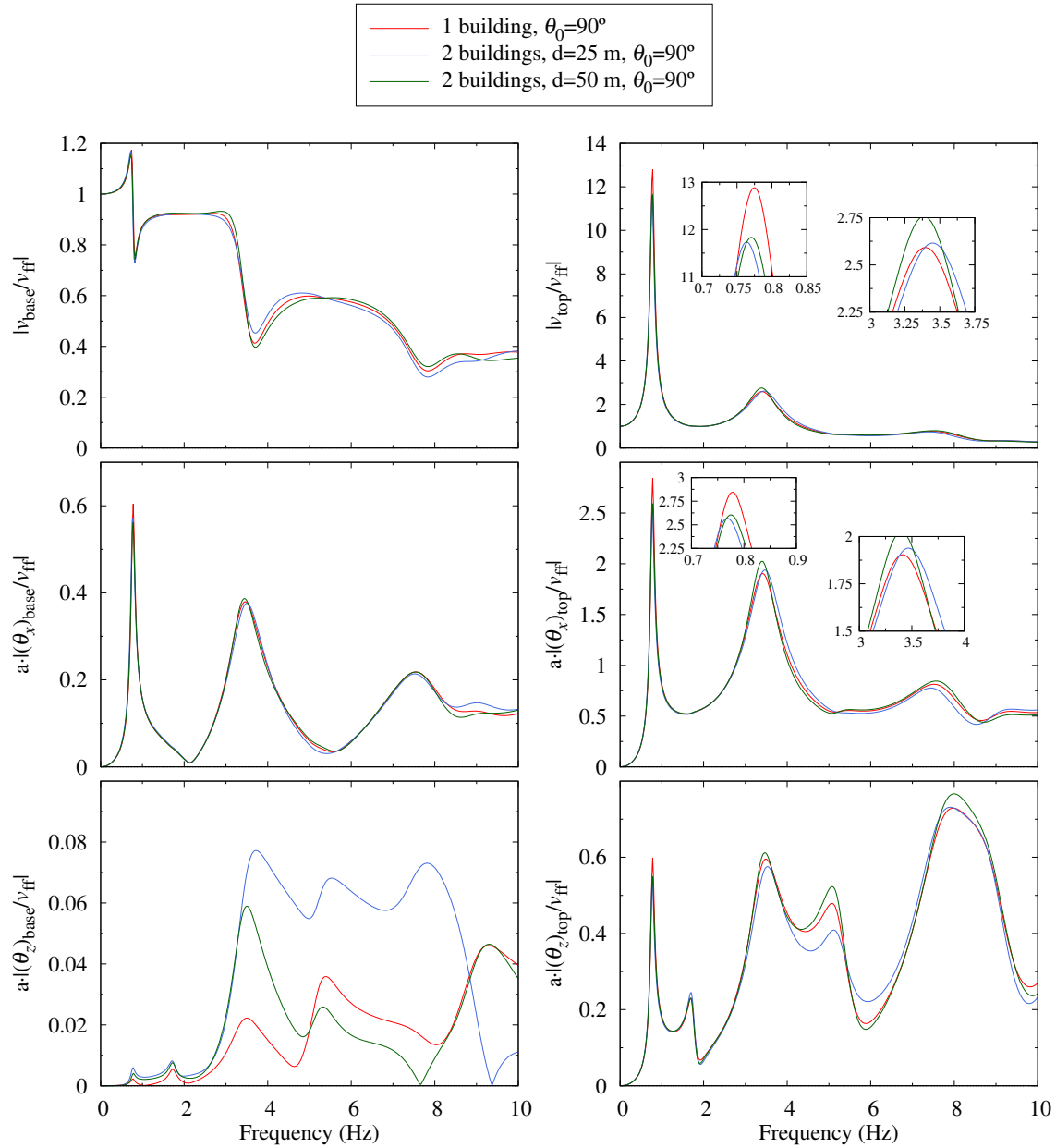


**Figura 6.18:** Comparativa de la respuesta del sistema formado por dos edificios cercanos separados una distancia  $d$  (25 y 50 metros) con la de un sólo edificio aislado. Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento transversal  $|v/v_{\text{ff}}|$ , del desplazamiento vertical  $|w/w_{\text{ff}}|$ , del giro de flexión  $a \cdot |\theta_x/v_{\text{ff}}|$  y de la rotación torsional  $a \cdot |\theta_z/v_{\text{ff}}|$  en la base y la parte alta (top) del edificio, debidos a la acción de ondas SV con ángulo de incidencia  $\theta_0 = 60^\circ$ .

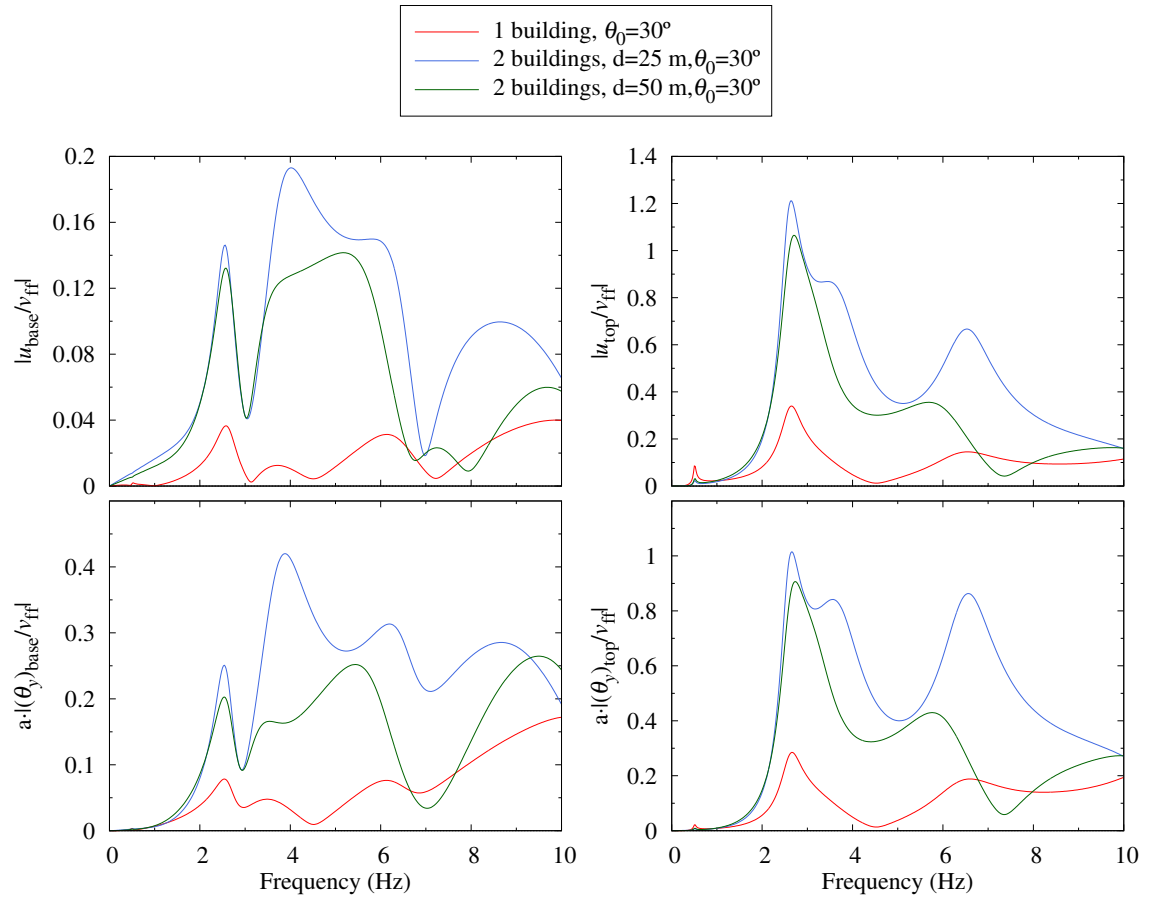




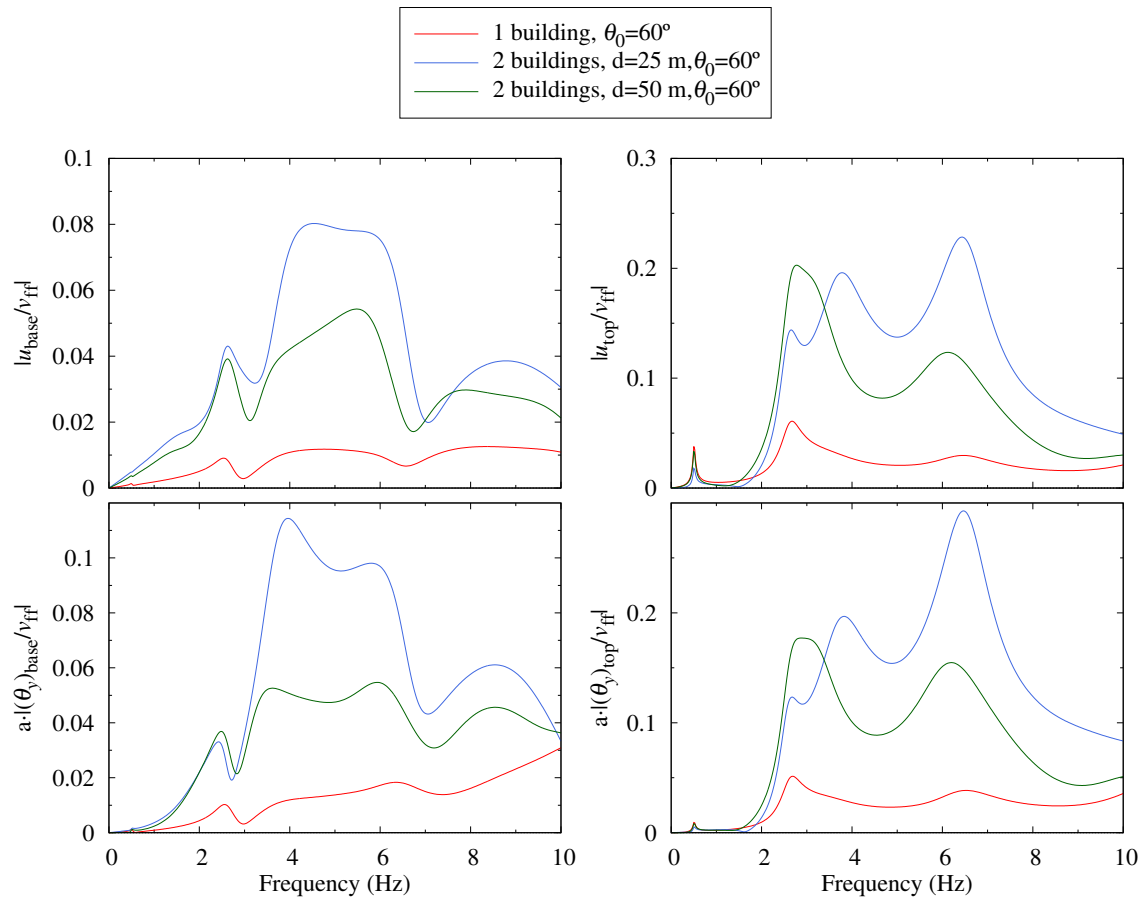
**Figura 6.19:** Comparativa de la respuesta del sistema formado por dos edificios cercanos separados una distancia  $d$  (25 y 50 metros) con la de un sólo edificio aislado. Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento transversal  $|v/v_{\text{ff}}|$ , del desplazamiento vertical  $|w/w_{\text{ff}}|$ , del giro de flexión  $a \cdot |\theta_x/v_{\text{ff}}|$  y de la rotación torsional  $a \cdot |\theta_z/v_{\text{ff}}|$  en la base y la parte alta (top) del edificio, debidos a la acción de ondas SV con ángulo de incidencia  $\theta_0 = 75^\circ$ .



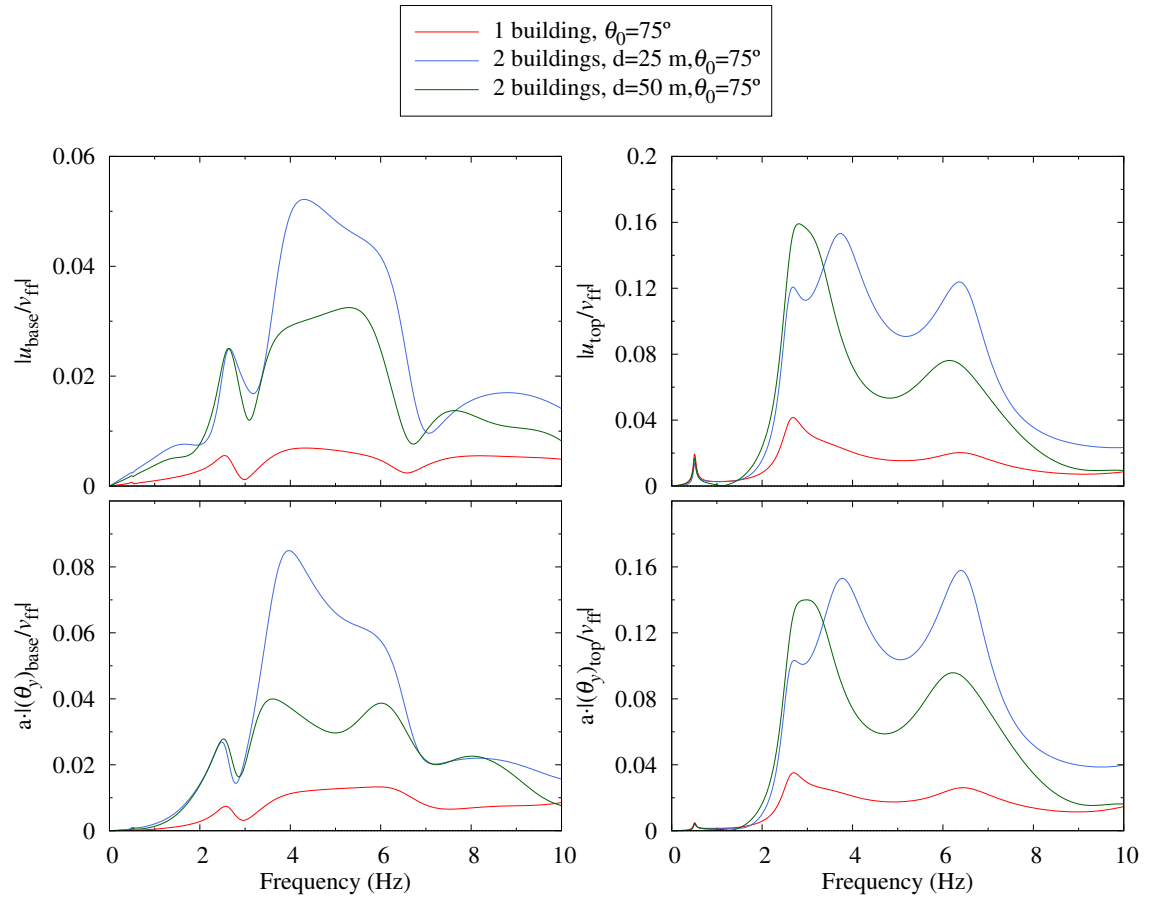
**Figura 6.20:** Comparativa de la respuesta del sistema por formado por dos edificios cercanos separados una distancia  $d$  (25 y 50 metros) con la de un sólo edificio aislado. Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento vertical  $|w/w_{ff}|$  en la base y la parte alta (top) del edificio, debidos a la acción de ondas SV con ángulo de incidencia  $\theta_0 = 90^\circ$ .



**Figura 6.21:** Comparativa de la respuesta del sistema formado por dos edificios cercanos separados una distancia  $d$  (25 y 50 metros) con la de un sólo edificio aislado. Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento transversal  $|u/v_{\text{ff}}|$  y del giro de flexión  $a \cdot |(\theta_y)/v_{\text{ff}}|$  en la base y la parte alta (top) del edificio, debidos a la acción de ondas SV con ángulo de incidencia  $\theta_0 = 30^\circ$ .



**Figura 6.22:** Comparativa de la respuesta del sistema formado por dos edificios cercanos separados una distancia  $d$  (25 y 50 metros) con la de un sólo edificio aislado. Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento transversal  $|u/v_{ff}|$  y del giro de flexión  $a \cdot |\theta_x/v_{ff}|$  en la base y la parte alta (top) del edificio, debidos a la acción de ondas SV con ángulo de incidencia  $\theta_0 = 60^\circ$ .

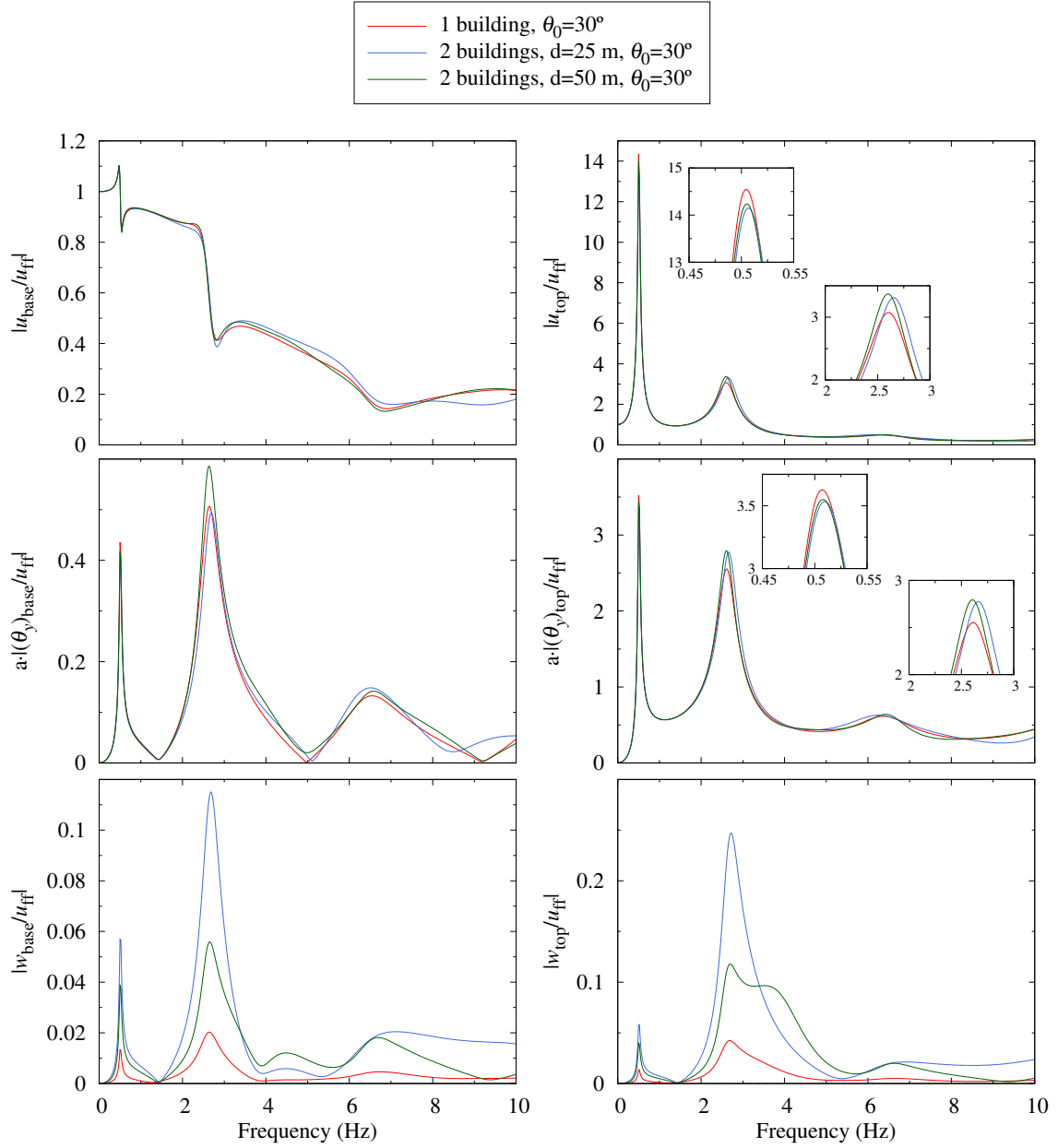


**Figura 6.23:** Comparativa de la respuesta del sistema formado por dos edificios cercanos separados una distancia  $d$  (25 y 50 metros) con la de un sólo edificio aislado. Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento transversal  $|u/v_{\text{ff}}|$  y del giro de flexión  $a \cdot |(\theta_y)/v_{\text{ff}}|$  en la base y la parte alta (top) del edificio, debidos a la acción de ondas SV con ángulo de incidencia  $\theta_0 = 75^\circ$ .

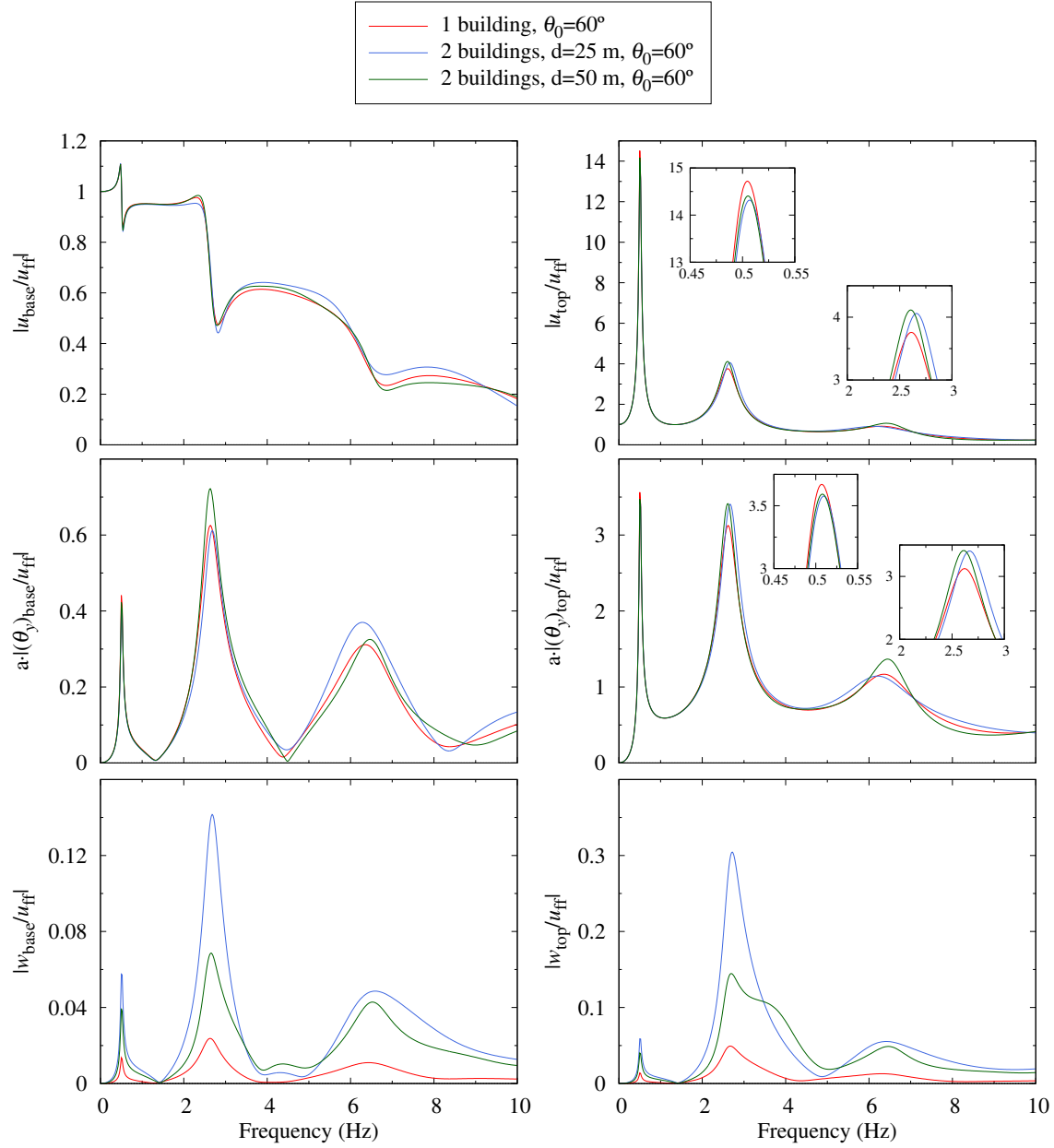
### 6.3.3 Ondas SH

Consideramos también un tren de ondas SH cuya dirección de propagación está contenida en el plano  $yz$ , actuando como excitación del sistema de dos edificios, con un ángulo de incidencia  $\theta_0$ .

En las figuras 6.24, 6.25, 6.26, 6.27 se muestran las funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento transversal  $|u/u_{ff}|$ , del giro de flexión  $a \cdot |\theta_y/u_{ff}|$  y del desplazamiento vertical  $|w/u_{ff}|$  en la base y la parte alta de la estructura. En todas las figuras se presentan detalles en las gráficas de las funciones de respuesta del desplazamiento transversal y el giro de flexión en la parte alta. En términos de estas dos variables, las diferencias en el valor la respuesta del sistema de dos edificios con respecto a la del constituido por uno sólo se mantienen independientemente del ángulo de incidencia, son muy pequeñas en torno a la primera frecuencia fundamental, algo mayores alrededor de la segunda y muestran poca variación con la distancia  $d$ . Cuantitativamente estas diferencias toman un valor de aproximadamente 2% en torno a la primera frecuencia fundamental y de un 9% alrededor de la segunda. El efecto de interacción por la presencia de otra estructura cercana si se hace notar en las funciones de respuesta del desplazamiento vertical  $w$ . Se observa un aumento notable del valor de la respuesta en todo el rango de frecuencias estudiado, siendo dichas diferencias máximas en torno a las frecuencias fundamentales. Para el comportamiento vertical del sistema la distancia  $d$  si tiene influencia, siendo el valor de la respuesta mayor cuanto más cercanas se encuentran ambas estructuras entre sí.

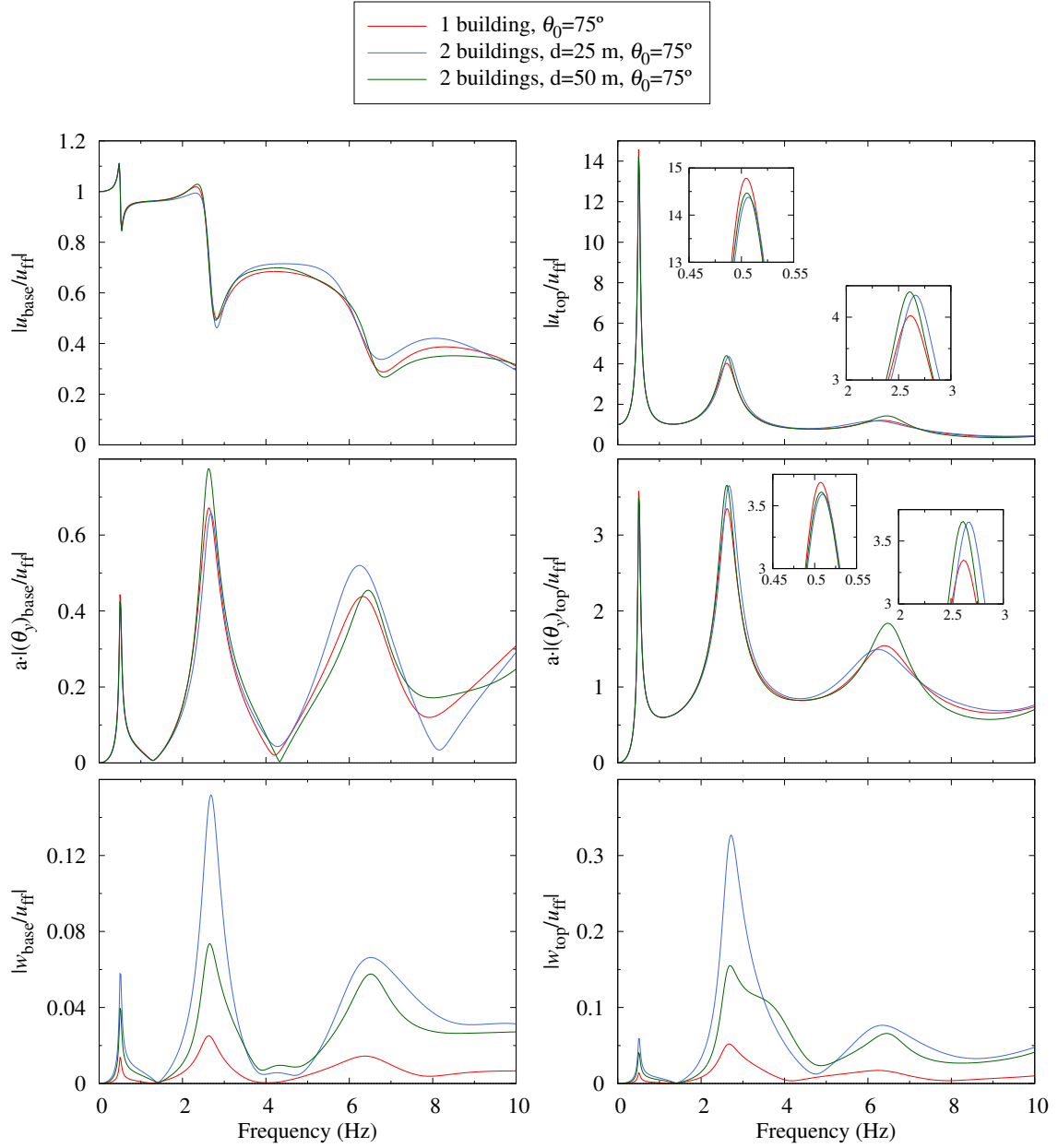


**Figura 6.24:** Comparativa de la respuesta del sistema formado por dos edificios cercanos separados una distancia  $d$  (25 y 50 metros) con la de un sólo edificio aislado. Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento transversal  $|u/u_{\text{ff}}|$ , del giro de flexión  $a \cdot |\theta_y|/u_{\text{ff}}$  y del desplazamiento vertical  $|w/u_{\text{ff}}|$  en la base y la parte alta (top) del edificio, debidos a la acción de ondas SH con ángulo de incidencia  $\theta_0 = 30^\circ$ .

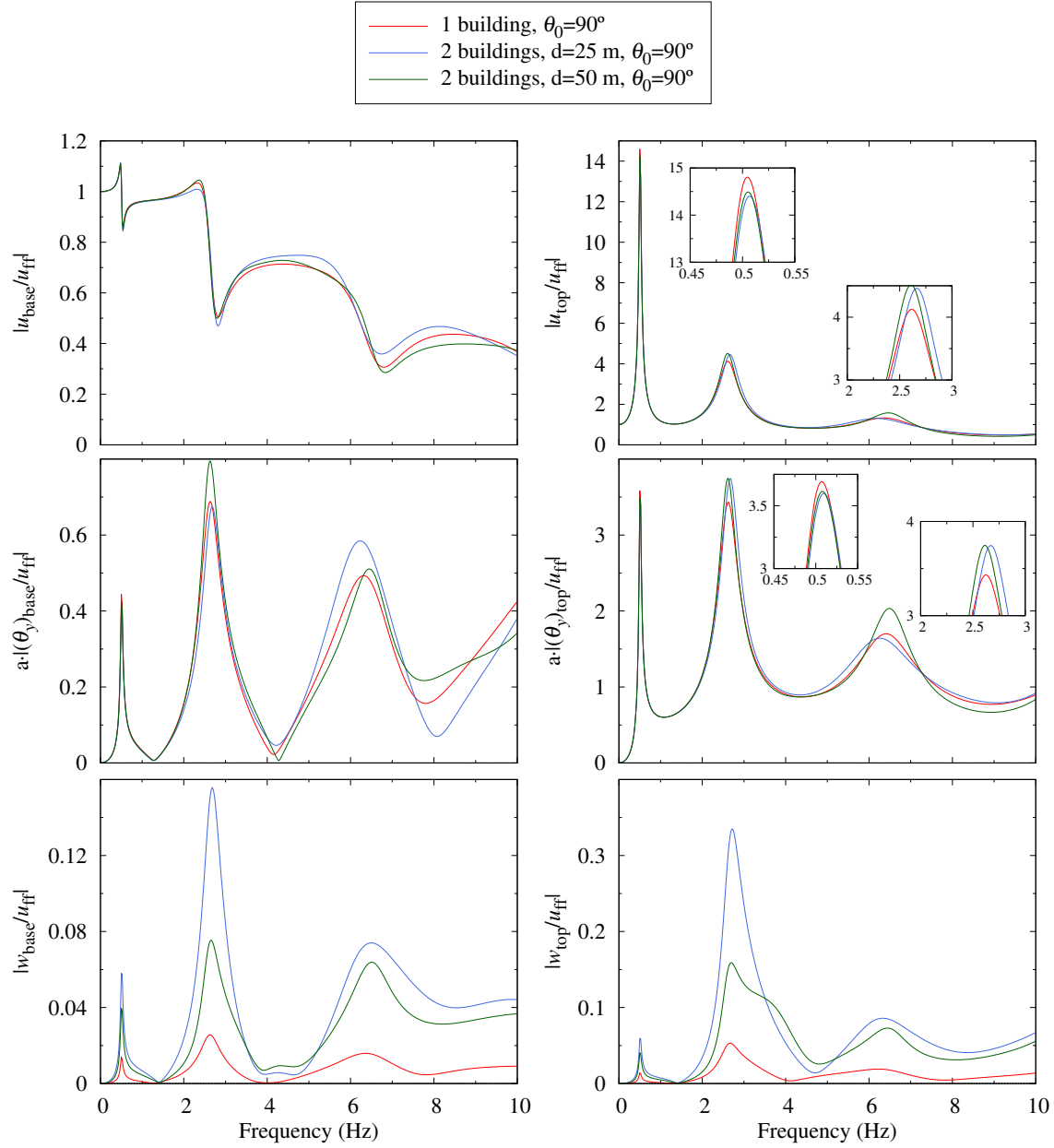


**Figura 6.25:** Comparativa de la respuesta del sistema formado por dos edificios cercanos separados una distancia  $d$  (25 y 50 metros) con la de un sólo edificio aislado. Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento transversal  $|u/u_{\text{ff}}|$ , del giro de flexión  $\alpha \cdot |\theta_x/u_{\text{ff}}|$  y del desplazamiento vertical  $|w/u_{\text{ff}}|$  en la base y la parte alta (top) del edificio, debidos a la acción de ondas SH con ángulo de incidencia  $\theta_0 = 60^\circ$ .





**Figura 6.26:** Comparativa de la respuesta del sistema formado por dos edificios cercanos separados una distancia  $d$  (25 y 50 metros) con la de un sólo edificio aislado. Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento transversal  $|u/u_{ff}|$ , del giro de flexión  $a \cdot |\theta_x|/u_{ff}$  y del desplazamiento vertical  $|w/u_{ff}|$  en la base y la parte alta (top) del edificio, debidos a la acción de ondas SH con ángulo de incidencia  $\theta_0 = 75^\circ$ .



**Figura 6.27:** Comparativa de la respuesta del sistema formado por dos edificios cercanos separados una distancia  $d$  (25 y 50 metros) con la de un sólo edificio aislado. Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento transversal  $|u/u_{\text{ff}}|$ , del giro de flexión  $\alpha \cdot |\theta_x/u_{\text{ff}}|$  y del desplazamiento vertical  $|w/u_{\text{ff}}|$  en la base y la parte alta (top) del edificio, debidos a la acción de ondas SH con ángulo de incidencia  $\theta_0 = 90^\circ$ .

## 6.4 Influencia de la naturaleza poroelástica del terreno

El objetivo de este apartado es estudiar la influencia de considerar el terreno como poroelástico. Tomaremos como referencia para ello el problema que se ha utilizado hasta ahora, por lo que se volverá a estudiar la respuesta del edificio mostrado en la figura 6.1, pero considerando ahora el terreno como poroelástico. Se compararán los resultados con los obtenidos cuando se considera dicho edificio cimentado en un semiespacio viscoelástico. Se estudiará también al final del apartado la influencia de la condición de contacto, permeable (drenado) o impermeable (no drenado), entre la cimentación y el terreno. La correspondiente respuesta del edificio en base rígida se representa en las gráficas como referencia para observar el efecto en la misma de la interacción suelo–estructura.

Las propiedades del semiespacio en el que se encuentra cimentado el edificio son de nuevo las mostradas en Todorovska y Al Rjoub [TAR06a]. Para definir el semiespacio como viscoelástico se usan las propiedades correspondientes al caso del terreno sin agua (seco) que son: velocidad de propagación de la onda transversal  $c_s = 300 \text{ m/s}$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0.3$ , densidad  $\rho = 1620 \text{ kg/m}^3$  y coeficiente de amortiguamiento  $\xi = 0.05$ . Considerando el semiespacio como poroelástico las propiedades son: porosidad  $\phi = 0.4$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0.3$ , densidad de la fase sólida  $\rho_s = 2700 \text{ kg/m}^3$ , módulo de rigidez transversal de la fase sólida  $\mu_s$  (correspondiente a una velocidad de propagación de onda en terreno seco  $c_{s, \text{dry}} = \sqrt{\mu_s / ((1 - \phi) \rho_s)} = 300 \text{ m/s}$ ), densidad de la fase fluida  $\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$ , módulo de compresibilidad de la fase fluida  $K_f = 2.2 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$  y densidad añadida  $\rho_a = 300 \text{ kg/m}^3$ . Las constantes de Biot son  $Q = (1 - \phi) K_f = 8.80 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$  y  $R = \phi K_f = 1.32 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$ .

Con las propiedades expuestas, en este estudio se considerarán suelos con diferentes propiedades para un total de cinco casos. En dos de ellos el suelo se modela como viscoelástico con la diferencia de que uno de ellos está completamente drenado (suelo seco) y otro no drenado (suelo saturado). En este último caso, las propiedades del suelo son: módulo de rigidez transversal  $\mu_{us} = 1.458 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$ , densidad  $\rho_{us} = 2020 \text{ kg/m}^3$ , coeficiente de amortiguamiento  $\xi = 0.05$  y módulo de Poisson  $\nu_{us} = 0.4876$ , el cual está relacionado con las constantes de Biot como

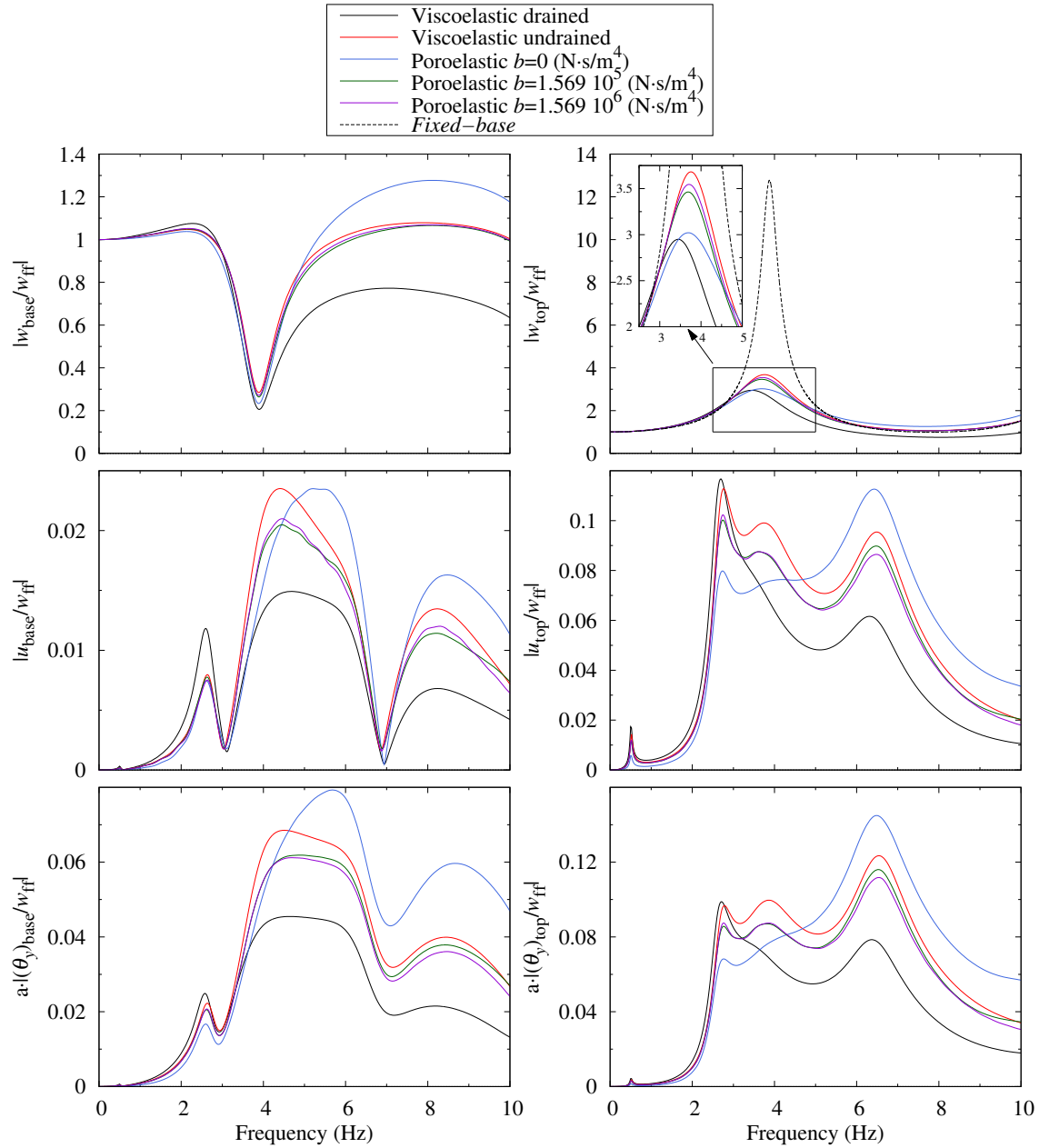
$$\nu_{us} = \frac{\lambda_s + \mu_s + \frac{(Q+R)^2}{R}}{2 \left[ \lambda_s + \mu_s + \frac{(Q+R)^2}{R} \right]} \quad (6.1)$$

donde  $\lambda_s$  es la constante de Lamé.

En los otros tres casos el suelo es modelado como poroelástico y cada uno está caracterizado por el valor de la constante de disipación  $b$ . Se usarán por tanto tres valores de este parámetro  $b = 0, 1.569 \cdot 10^5$  y  $1.569 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$ , correspondientes respectivamente a la conductividad hidráulica de Darcy  $k = \infty, 10^{-2}$  y  $10^{-3} \text{ m/s}$  de acuerdo con la expresión (2.13). Aclarar que la conductividad hidráulica usada por Todorovska y Al Rjoub [TAR06a] debe ser  $k = \infty$  ( $b = 0$ ) basado en los valores de las velocidades de onda incluidos. En principio la condición de contacto entre la cimentación rígida y el suelo se asume como impermeable (contacto no drenado). Posteriormente se estudia también la influencia de la condición de contacto para valores de  $b = 0$ .

La malla MEC–MEF utilizada en todos los casos expuestos en este apartado es la misma que la mostrada en la figura 6.2, pero considerando como excitación únicamente ondas P o S con incidencia vertical ( $\theta_0 = 90^\circ$ ).

La figura 6.28 muestra las funciones de respuesta en frecuencia  $|w/w_{ff}|$ ,  $|u/w_{ff}|$  y  $a \cdot |\theta_y/w_{ff}|$ ,



**Figura 6.28:** Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento vertical  $|w/w_{ff}|$ , del desplazamiento horizontal  $|u/w_{ff}|$  y del giro de flexión  $a \cdot |\theta_y|/w_{ff}$  en la base y la parte alta (top) del edificio, cimentado en un semiespacio poroelástico, debidos a la acción de ondas P con incidencia vertical. Modelo viscoelástico (drenado y no drenado) y modelo poroelástico para diferentes valores de la constante de disipación  $b$ .

que representan respectivamente el desplazamiento vertical y horizontal y el giro de flexión en la base y parte alta del edificio normalizadas con el desplazamiento vertical de campo libre cuando la excitación es un tren de ondas verticales de tipo P. Se incluye también como referencia la respuesta en base rígida en la parte alta del edificio (línea negra punteada). El edificio está sometido a la acción de ondas P con incidencia vertical, pero la naturaleza no simétrica de la sección transversal produce no sólo desplazamientos verticales  $w$ , sino también desplazamientos horizontales  $u$  y giros de flexión  $\theta_y$ . Se puede ver que el modelo es capaz de mostrar el efecto de la interacción suelo-estructura y la influencia del tipo de suelo en la respuesta de la estructura, que producen diferencias significativas a partir de 4 Hz. Estas diferencias se pueden ver sobre

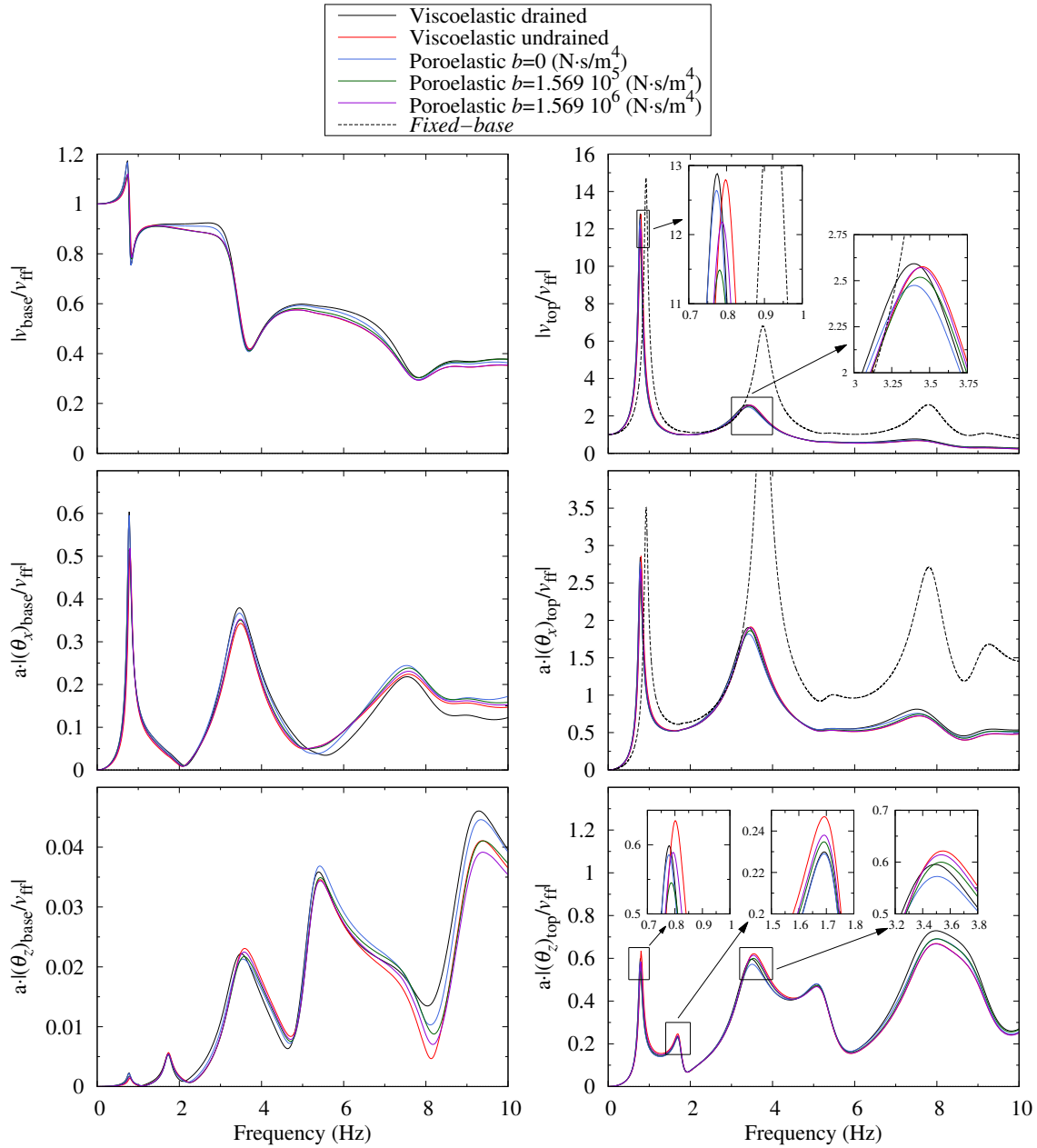
todo en torno a los picos de las frecuencias fundamentales. El recuadro incluido en la gráfica en la que se representa la función de respuesta del desplazamiento vertical  $w$  en la parte alta muestra una vista detallada del pico de la primera frecuencia fundamental. Con respecto a la respuesta en suelos viscoelásticos drenados, cuando el edificio está cimentado en suelos saturados de agua (viscoelástico no drenado o poroelásticos) las frecuencias de resonancia son mayores. La primera frecuencia natural se incrementa en un 10 % de 3.4 Hz hasta 3.75 Hz. Esta variación por el contrario es prácticamente independiente de la constante de disipación  $b$ , o de la naturaleza viscoelástica o poroelástica del terreno. En cuanto a la amplitud de los picos, ésta sí dependen del valor de  $b$ . Las magnitudes de la amplitud son muy similares cuando el terreno se modela como viscoelástico drenado o poroelásticos con  $b = 0$ , mientras que las amplitudes incrementan con el valor de la constante de disipación, siendo el incremento del 20 % para  $b = 1.569 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$ .

La figura 6.29 muestra la respuesta en la base y la parte alta del edificio cuando está sometido a la acción de ondas S verticales que producen desplazamientos transversales en la dirección del eje  $y$ . Debido a la excentricidad, se representan las funciones de respuesta en frecuencia de la rotación torsional  $a \cdot |\theta_z/v_{ff}|$  junto con la del desplazamiento transversal  $|v/v_{ff}|$  y la del giro a flexión  $a \cdot |\theta_x/v_{ff}|$ . La influencia en la respuesta del modelo de suelo es muy pequeña en este caso. En contraste con lo que pasaba para ondas incidentes de tipo P, las frecuencias de resonancia entre el modelo viscoelástico drenado y el poroelásticos con  $b = 0$  son casi coincidentes. Sólo se aprecia un ligero incremento con la constante de disipación  $b$ , siendo el caso viscoelástico no drenado el límite superior. La diferencia entre el límite inferior y superior de las frecuencias de resonancia está en torno al 4 % para la primera y alrededor del 3 % en torno a la segunda. Estas tendencias son consistentes con los resultados numéricos publicados por Todorovska y Al Rjoub [TAR06b], que presentan diferencias del orden del 2 % para un modelo 2D. Los resultados están también en línea con los datos experimentales presentados por Todorovska y Al Rjoub [TAR06a] sobre el incremento de las frecuencias del edificio Milikan en Pasadena, California, después de fuertes lluvias. En lo que respecta a la respuesta transversal-rotacional acoplada, el efecto de la naturaleza porosa del terreno de esta región en las frecuencias de resonancia es insignificante para la primera y la segunda, e implica cambios no mayores del 1.5 % en la tercera de ellas. Las amplitudes de los picos relacionados con éstas dependen de la permeabilidad del terreno, con variaciones del 5 %.

El modelo, además de para estudiar los efectos de la constante de disipación  $b$ , puede usarse para observar el efecto de la condición de contacto entre la cimentación rígida y el suelo. En los resultados presentados hasta ahora en este apartado se asume condición de contacto impermeable (no drenada). Ahora se compara la influencia en la respuesta según se considere la condición de contacto como permeable o impermeable siendo  $b = 0$ . La figura 6.30 muestra las funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento vertical  $|w/w_{ff}|$ , del desplazamiento horizontal  $|u/w_{ff}|$  y del giro de flexión  $a \cdot |\theta_y/w_{ff}|$  en la base y la parte alta (top) del edificio cuando inciden verticalmente ondas de tipo P; y la figura 6.31 que presenta las funciones en frecuencia del desplazamiento transversal  $|v/v_{ff}|$ , del giro de flexión  $a \cdot |\theta_x/v_{ff}|$  y de la rotación por torsión  $a \cdot |\theta_z/v_{ff}|$  en la base y la parte alta del edificio cuando la excitación es una onda S vertical.

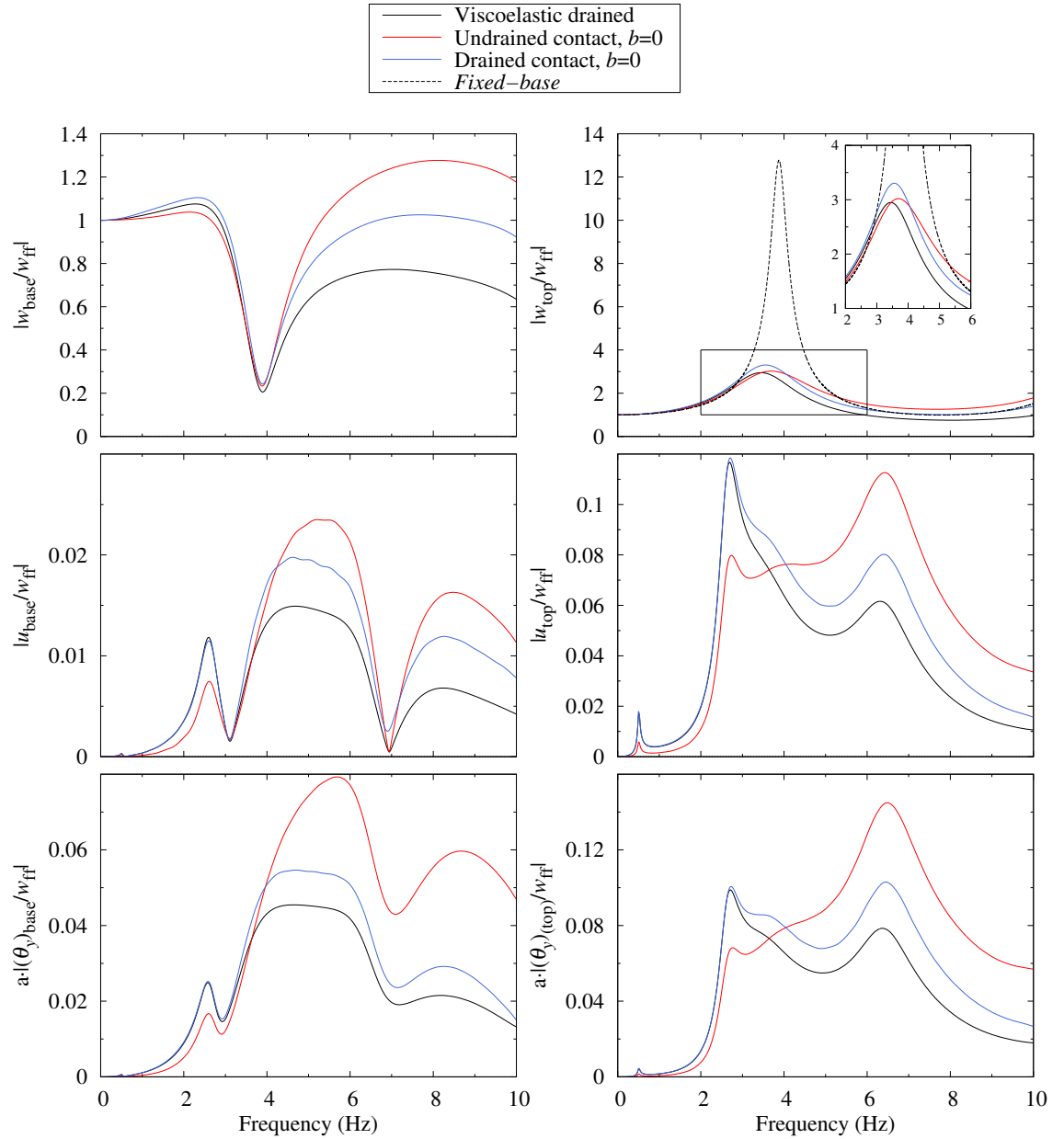
Estos últimos resultados muestran una importante influencia de la condición de contacto cuando el sistema está sometido a ondas de tipo P, pero insignificante en el caso de ondas S. Efectos similares de la condición de contacto pueden encontrarse en Japón et al [JGD97] para el estudio de las funciones de rigidez dinámica de cimentaciones.

A continuación se estudiará el fenómeno de interacción estructura-suelo-estructura considerando el suelo como un semiespacio poroelástico para el sistema formado por dos edificios separados una distancia  $d$ . Habiéndose estudiado la influencia del coeficiente de disipación y



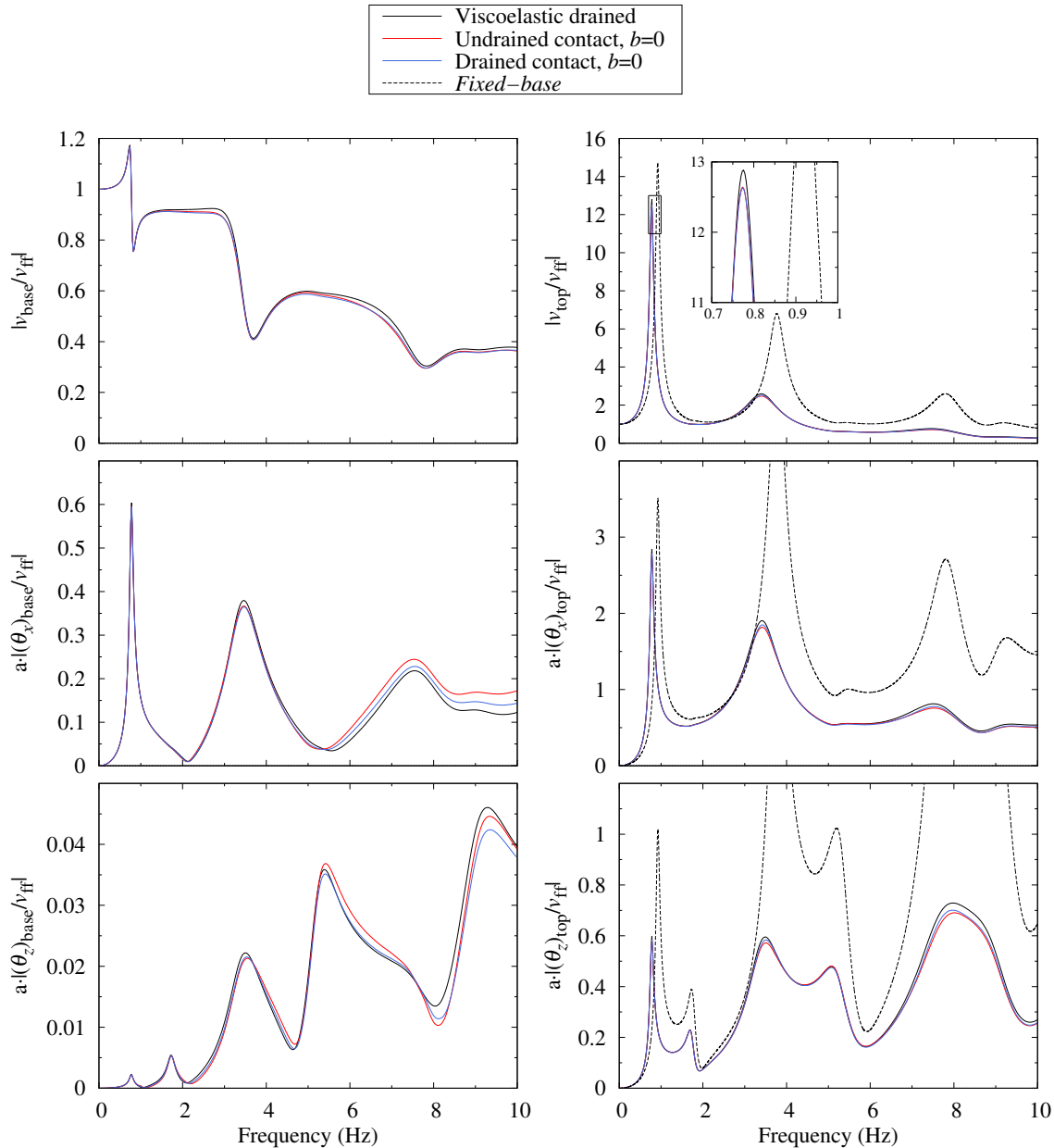
**Figura 6.29:** Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento transversal  $|v/v_{ff}|$ , el giro de flexión  $a \cdot |\theta_x/v_{ff}|$  y la rotación torsional  $a \cdot |\theta_z/v_{ff}|$  en la base y la parte alta (top) del edificio, cimentado en un semiespacio poroelástico, debidos a la acción de ondas S con incidencia vertical. Modelo viscoelástico (drenado y no drenado) y modelo poroelástico para diferentes valores de la constante de disipación  $b$ .

de la condición de contacto, para este caso se usa únicamente el valor  $b = 0$  con condición de contacto impermeable (no drenada). Se presentan las funciones de respuesta del sistema de dos edificios para dos valores de la distancia entre edificios  $d$ , 25 y 50 metros, considerando como excitación ondas P o S con incidencia vertical. En el caso de la onda transversal decir que ésta produce desplazamientos horizontales  $v$  en dirección del eje  $y$ , giros de flexión alrededor del eje  $x$  y, debido a la excentricidad de la sección de la estructura, giros de torsión alrededor de la dirección del eje  $z$ . Las mallas MEC-MEF utilizadas son las mismas que las usadas en el apartado 6.3.



**Figura 6.30:** Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento vertical  $|w/w_{ff}|$ , del desplazamiento horizontal  $|u/w_{ff}|$  y del giro de flexión  $a \cdot |\theta_y/w_{ff}|$  en la base y la parte alta (top) del edificio, cimentado en un semiespacio poroelástico, debidos a la acción de ondas P con incidencia vertical teniendo en cuenta diferentes condiciones hidráulicas de contacto.

En la figura 6.32 se muestra la respuesta de un sólo edificio frente a la de dos edificios cercanos cuando la excitación es una onda P con incidencia vertical. Están representadas las funciones de respuesta del desplazamiento vertical  $|w/w_{ff}|$ , del desplazamiento transversal  $|u/w_{ff}|$  y del giro de flexión  $a \cdot |\theta_y/w_{ff}|$  en la base y la parte alta de los edificios. Los resultados para el desplazamiento vertical en la parte alta muestran la influencia en la respuesta del efecto de otra estructura cercana. En torno a la frecuencia fundamental, se observa que el valor de la respuesta cuando se consideran dos edificios separados una distancia de 25 metros, con respecto a la de un edificio aislado, crece desde un valor de 3 hasta casi 4, esto significa un aumento del 33 % en base a la respuesta del edificio aislado. Si la distancia  $d$  aumenta hasta 50 metros el pico se desplaza ligeramente a una frecuencia algo inferior aunque su valor es prácticamente

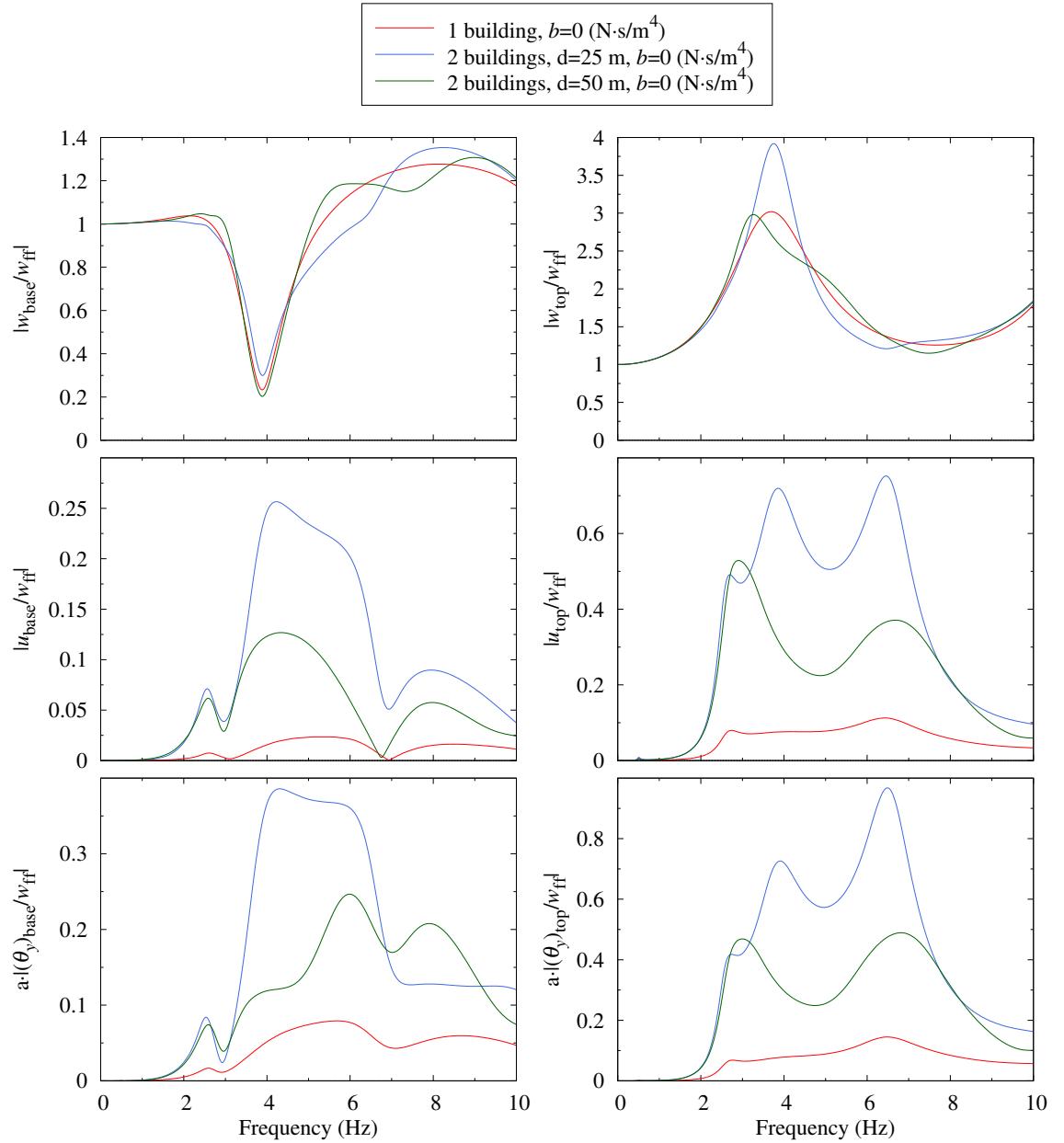


**Figura 6.31:** Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento transversal  $|v/v_{ff}|$ , del giro de flexión rotations  $a \cdot |\theta_x/v_{ff}|$  y de la rotación torsional  $a \cdot |\theta_z/v_{ff}|$  en la base y la parte alta (top) del edificio, cimentado en un semiespacio poroelástico, debidos a la acción de ondas S con incidencia vertical teniendo en cuenta diferentes condiciones hidráulicas de contacto.

el mismo que el que se da para una sola estructura. El efecto en la respuesta del fenómeno de interacción estructura–suelo–estructura se hace notable para el desplazamiento horizontal  $u$  y el giro de flexión  $\theta_y$ , donde se muestran grandes diferencias con respecto a la respuesta de un único edificio, siendo estas diferencias mayores cuanto menor es la distancia  $d$ .

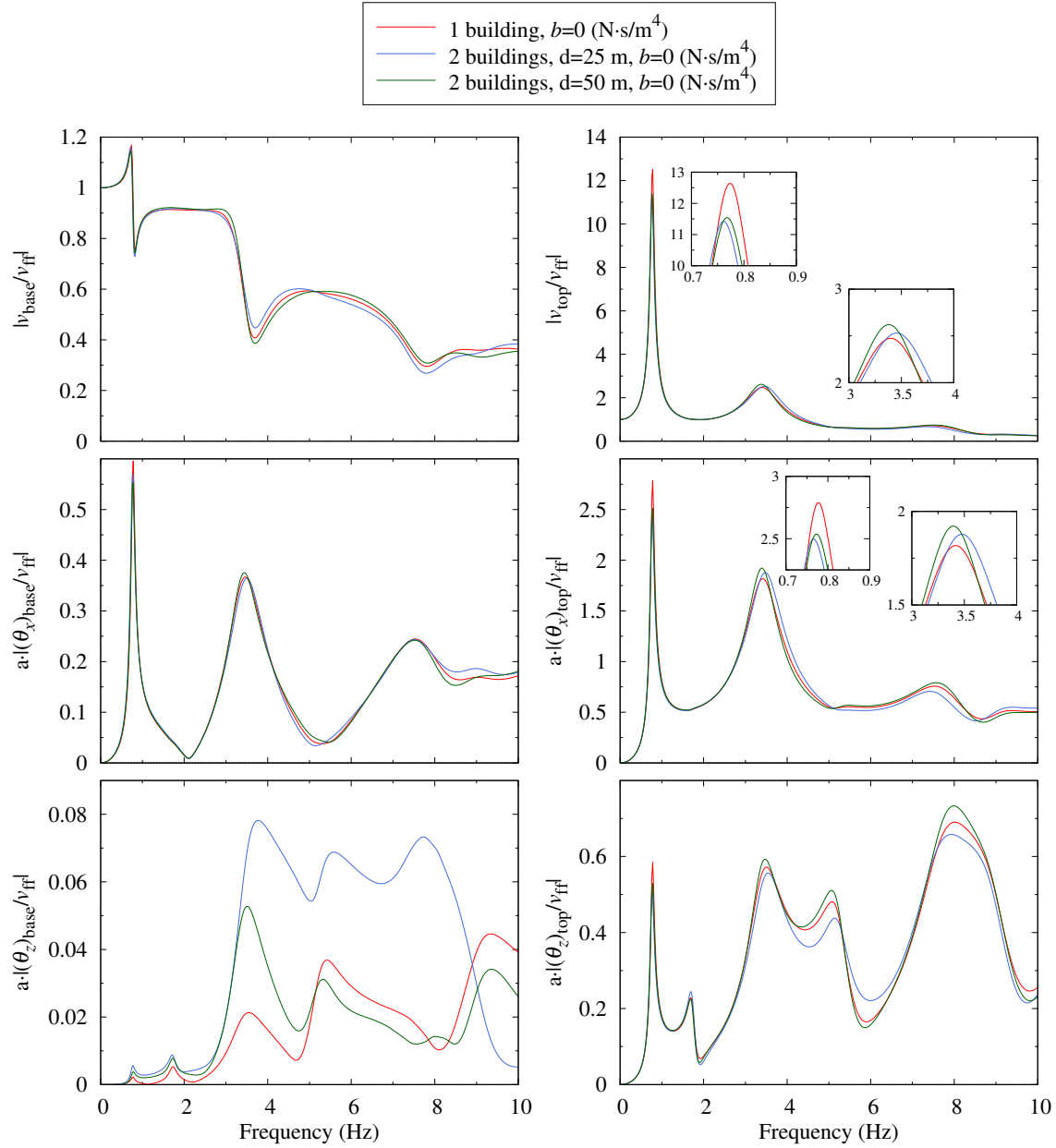
La figura 6.33 muestra la respuesta de un sólo edificio frente a la del sistema de dos edificio cercanos cuando la excitación es una onda de tipo S con incidencia vertical, cuyo campo de desplazamientos tiene componente en la dirección del eje  $y$ . Están representadas por tanto las funciones de respuesta del desplazamiento transversal  $|v/v_{ff}|$ , del giro de flexión  $a \cdot |\theta_x/v_{ff}|$  y del giro de torsión  $a \cdot |\theta_z/v_{ff}|$  en la base y la parte alta de la estructura. Los detalles incluidos en





**Figura 6.32:** Comparativa de la respuesta del sistema formado por dos edificios cercanos separados una distancia  $d$  (25 y 50 metros) con la de un sólo edificio aislado, cimentados en un semiespacio poroelástico. Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento vertical  $|w/w_{ff}|$ , del desplazamiento horizontal  $|u/w_{ff}|$  y del giro de flexión  $a \cdot |\theta_y/w_{ff}|$  en la base y la parte alta (top) del edificio debidos a la acción de una onda P con incidencia vertical

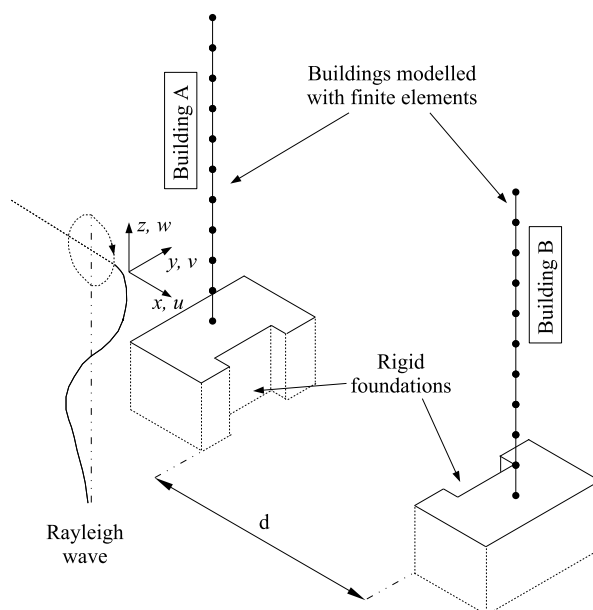
las gráficas de las funciones del desplazamiento transversal y el giro de flexión en la parte alta (top) muestran los picos de amplitud a la primera y segunda frecuencia fundamental. Para estas variables no se observa una influencia importante en la respuesta de la distancia de separación  $d$  y las diferencias con respecto a la de un edificio son mucho menores que en el caso de ondas P. Para la primera frecuencia fundamental, la respuesta cuando se considera otra estructura cercana es de un 8% menor a la de un edificio aislado. En el detalle de la segunda frecuencia fundamental se observa un leve desplazamiento de la frecuencia a la que se produce el pico de la función de respuesta cuando la distancia  $d = 25$  metros, y también un aumento en el valor de la función de aproximadamente 3% si  $d=25$  metros y 5% si  $d=50$  metros.



**Figura 6.33:** Comparativa de la respuesta del sistema formado por dos edificios cercanos separados una distancia  $d$  (25 y 50 metros) con la de un sólo edificio aislado, cimentados en un semiespacio poroelástico. Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento horizontal  $|v/v_{ff}|$ , del giro de flexión  $a \cdot |\theta_x/v_{ff}|$  y del giro de torsión  $a \cdot |\theta_z/v_{ff}|$  en la base y la parte alta (top) del edificio, cimentado en un semiespacio poroelástico, debidos a la acción de una onda S con incidencia vertical

## 6.5 Interacción estructura–suelo–estructura. Ondas de Rayleigh.

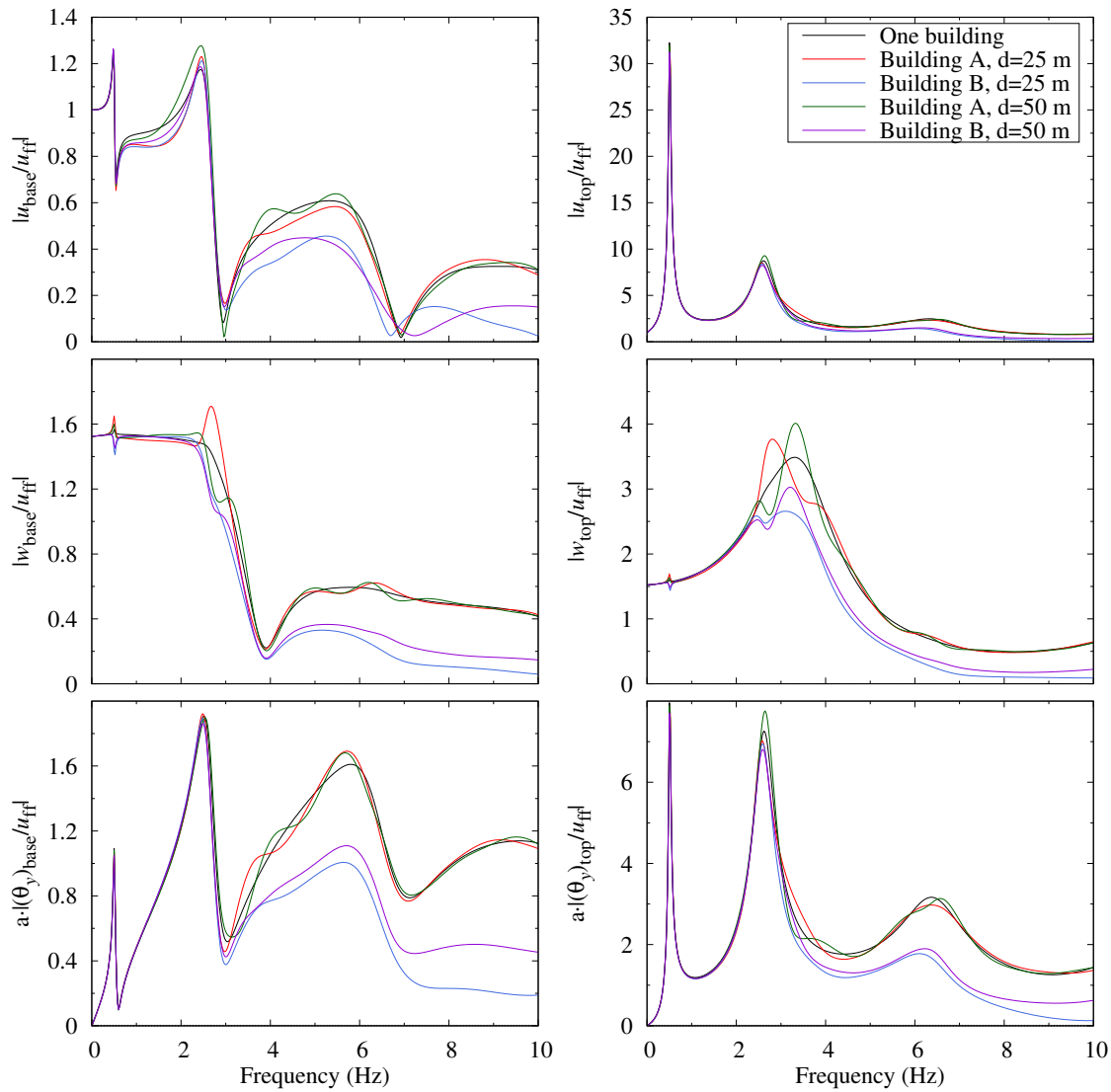
El modelo MEC–MEF presentado en el capítulo 5 se aplica en esta sección para estudiar el efecto de la interacción estructura–suelo–estructura presentando resultados de la respuesta dinámica del sistema que involucra dos edificios idénticos cercanos considerando como excitación una onda de Rayleigh (onda de superficie) que se propaga desde la parte negativa del eje  $x$  y cuya amplitud se asume como constante a lo largo de toda la superficie libre del terreno (campo incidente con amortiguamiento nulo). Ambos edificios están enfrentados uno con respecto al otro, siendo  $d$  la distancia entre ellos (25 y 50 metros). estudio.



**Figura 6.34:** Esquema de la vista isométrica del problema de dos edificios modelados con el modelo MEC–MEF y considerando como excitación una onda de Rayleigh (onda de superficie)

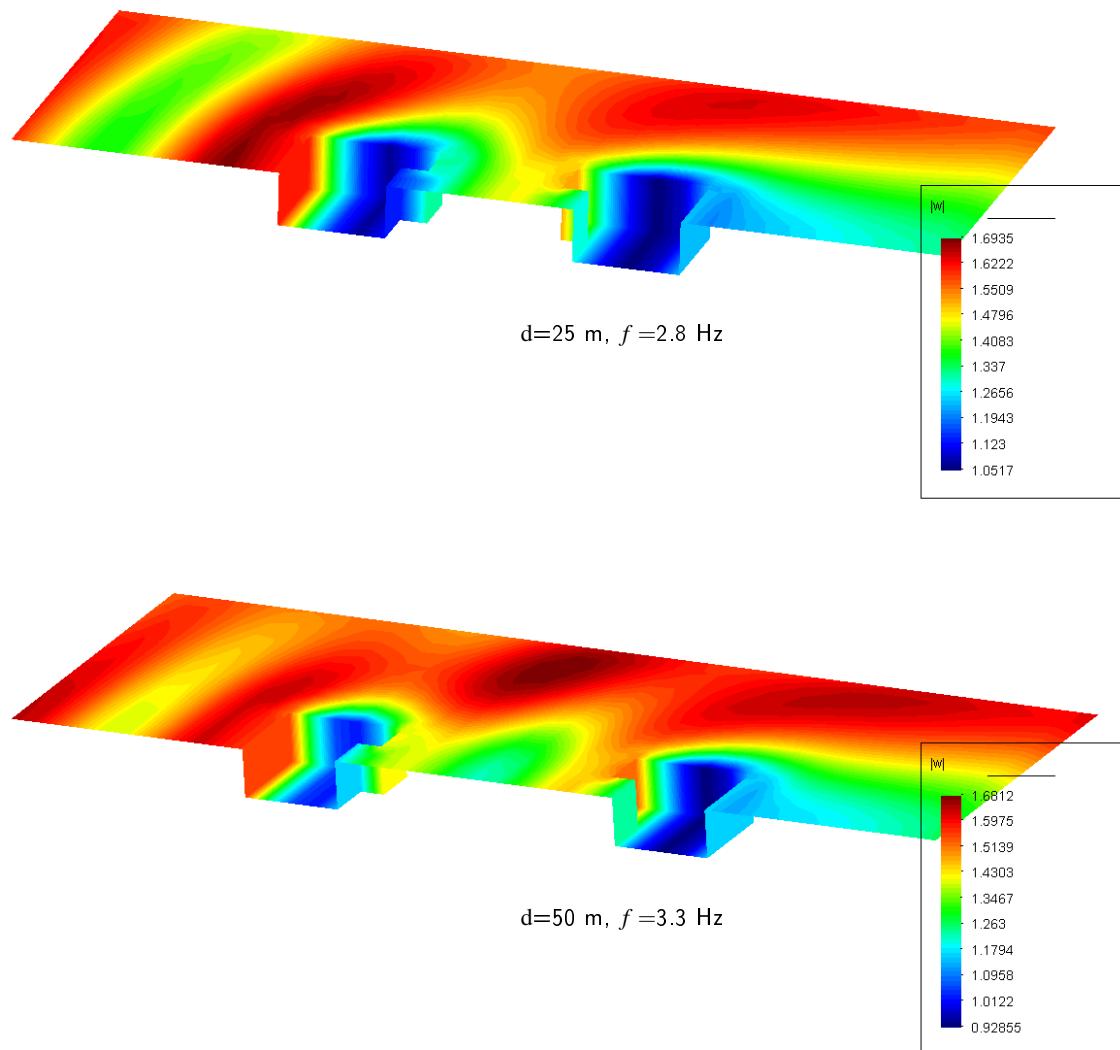
La figura 6.35 muestra la respuesta dinámica del sistema en términos de el desplazamiento horizontal  $u$ , el desplazamiento vertical  $w$  y el giro  $\theta_y$  en la base y la parte alta de ambos edificios, normalizados con el desplazamiento horizontal de campo libre  $u_{ff}$ . La respuesta considerando la presencia de un único edificio se incluye en las gráficas de la figura como referencia. La frecuencia fundamental del edificio en la dirección de la onda de Rayleigh ( $f^{xz} \approx 0.5$  Hz) se observa en todas las funciones de respuesta, más claramente en el desplazamiento transversal y el giro de flexión. En casi todo el rango de frecuencias, la respuesta del edificio B es significativamente menor que la del edificio A (primero en recibir el frente de onda). Incluso la magnitud de la respuesta del edificio B es también menor que la de un único edificio sin otras estructuras cercanas. Esto se debe a la energía cinemática que llega a la cimentación del edificio B, la cual experimenta una reducción con respecto a la que llega al edificio A como consecuencia de la presencia de este último, el cual, por contra, presenta una respuesta mayor que la de un sólo edificio en ciertos rangos de frecuencia debido a la energía que se refleja rebotada desde la cimentación del edificio B.

Con el fin de ilustrar este efecto de escudo que produce el edificio A con respecto al B, la figura 6.36 muestra el desplazamiento vertical absoluto en la superficie libre y el contorno de las cimentaciones del sistema excitado por ondas de Rayleigh asumiendo las cimentaciones sin masa (la presencia de las superestructuras no se considera para estudiar sólo la cinemática del



**Figura 6.35:** Funciones de respuesta en frecuencia del desplazamiento transversal  $|u/u_{ff}|$ , del desplazamiento vertical  $|w/u_{ff}|$  y del giro de flexión  $a \cdot |\theta_y|/u_{ff}$  en la base y la parte alta (top) de ambos edificios debido a la incidencia de ondas de Rayleigh.

problema, aunque la respuesta del sistema completo es análoga a la mostrada). Se presentan resultados para ambos valores de la distancia  $d=25$  y  $50$  metros, y respectivamente para los valores de frecuencia  $2.8$  Hz y  $3.3$  Hz, los cuales corresponden a los picos de amplitud que pueden observarse para la respuesta vertical en la parte alta del edificio en la figura 6.35. Se observa un claro efecto de sombra, como una notable disminución de los desplazamientos que experimentan los puntos sobrepasado el edificio A, lo cual explica, como ya se ha comentado, la menor energía cinemática que llega al edificio B.



**Figura 6.36:** Mapas de color del desplazamiento vertical  $w$  sobre la superficie libre y el contorno de las cimentaciones del sistema excitado por ondas de Rayleigh considerando las cimentaciones rígidas y sin masa.



# Capítulo 7

## Revisión, conclusiones y desarrollos futuros

### 7.1 Revisión y conclusiones

El trabajo realizado durante la confección de esta tesis se enmarca en el estudio de la respuesta dinámica y sísmica de estructuras enterradas. Este tipo de problemas ha sido históricamente de mucho interés para la comunidad ingenieril desde la construcción de estructuras masivas (p.e. reactores nucleares, etc.) cuyo colapso podría poner en riesgo a la población civil. En el seno del grupo de investigación se han desarrollado en los últimos años modelos numéricos basados en el Método de los elementos de Contorno (MEC), los cuales se pueden aplicar como herramienta para estudiar este tipo de problemas, entre otros, en los que el efecto de interacción suelo-estructura juega un papel fundamental.

Siguiendo la línea de trabajo del grupo sobre problemas de interacción suelo-estructura, en esta tesis se ha aplicado un modelo numérico 3D en el dominio de la frecuencia y basado en el MEC, previamente desarrollado, en problemas de este tipo para estudiar la importancia de considerar o no la verdadera flexibilidad de la estructura. En principio se ha aplicado a un problema real que por su tipología y dimensiones, históricamente en la bibliografía existente se ha estudiado aplicando metodologías que consideran la hipótesis de rigidez infinita de la estructura. Se ha estudiado por tanto la respuesta sísmica de una estructura real utilizando este modelo numérico MEC para comparar los resultados obtenidos, por un lado, a través del método de los tres pasos y, por otro, aplicando una metodología directa. Con la primera se asume la rigidez infinita de la estructura y el cálculo de la respuesta se realiza en pasos sucesivos, por contra con la metodología directa se tiene en cuenta la flexibilidad de la estructura, y de manera más rigurosa los factores que influyen en la respuesta del sistema. La comparativa de los resultados evidencia diferencias importantes en la respuesta de esta estructura, de manera que se puede infravalorar la magnitud de la misma al asumir la estructura como infinitamente rígida. por tanto se pone de manifiesto que la elección de la metodología de cálculo para estos problemas clásicos de interacción suelo-estructura supone un asunto al que debe prestarse la debida atención, así como que la evaluación precisa de la rigidez de la estructura es determinante.

En la línea de estudiar la importancia de la consideración de la verdadera flexibilidad estructuras

enterradas, consideración de la flexibilidad de la estructura se realiza un estudio paramétrico sobre este aspecto del problema. Los parámetros que se tienen en cuenta para el estudio son la esbeltez de la estructura, la profundidad de enterramiento, la velocidad de propagación del suelo y si la estructura es maciza o hueca. Se ha cuantificado el error cometido en la obtención de la respuesta sísmica bajo la hipótesis de rigidez infinita de la estructura, de manera que se ha intentado presentar un criterio de utilidad para la práctica ingenieril en el ámbito. Así, dependiendo de la geometría de la estructura, el valor relativo de las propiedades de la misma con respecto al suelo, ha sido posible establecer un orden de magnitud de los errores cometidos en tal caso. Por la necesidad de obtener la respuesta para una importante cantidad de casos diferentes se escoge como herramienta de cálculo menos compleja y costosa que el MEC. Se ha utilizado un modelo Winkler que considera la estructura como un elemento viga o un sólido rígido según el caso, y la interacción con el suelo se ha tenido en cuenta a través de elementos resorte–amortiguador distribuidos a lo largo de la parte de la estructura que se encuentra enterrada. Los resultados obtenidos y teniendo en cuenta las simplificaciones para la aplicación de este modelo Winkler, se han establecido unos límites claros fuera de los cuales no resulta recomendable la utilización de métodos que no tengan en cuenta el efecto de la flexibilidad de la estructura.

Posteriormente se ha abordado el desarrollo del modelo numérico MEC ya mencionado, incorporando al mismo nuevas prestaciones. Se ha formulado un modelo acoplado de elementos de contorno y elementos finitos (MEC–MEF) para el estudio principalmente de estructuras de edificación. En este sentido se incorpora el acoplamiento de regiones rígidas (cimentaciones) con medios viscoelásticos o poroelásticos deformables, y condiciones de contacto permeable e impermeable. La superestructura de los edificios se modela haciendo uso de elementos finitos tipo viga Timoshenko con propiedades equivalentes. Ambas estrategias garantizan problemas con un grado razonable de grados de libertad y permitiría analizar de manera viable desde el punto de vista computacional la respuesta sísmica de varios edificios cercanos simultáneamente. En lo que se refiere a la excitación, se incluye la posibilidad de la acción de trenes de onda con incidencia variable en el caso del semiespacio viscoelástico, o con incidencia vertical en el caso de terrenos de naturaleza poroelástica. Se ha validado el modelo y se presentan resultados obtenidos al aplicar éste al estudio de problemas de interacción suelo–estructura y estructura–suelo–estructura. Se ha estudiado la influencia en la respuesta de un único edificio aislado del ángulo de incidencia de ondas P, SV y SH en terrenos viscoelásticos y también el efecto de la interacción estructura–suelo–estructura por la presencia de otra estructura cercana. En el caso de terrenos de naturaleza poroelástica se presentan resultados para medir las variaciones del valor de la respuesta con la constante de disipación y/o la condición de contacto, así como también el efecto de la interacción estructura–suelo–estructura, considerando como excitación ondas transversales o longitudinales con incidencia vertical.

### 7.2 Desarrollos futuros

Los desarrollos futuros más inmediatos están en la incorporación progresiva de nuevas prestaciones al modelo acoplado BEM y (sobre todo) al modelo BEM–FEM para edificios.

1. Prestaciones desde el punto de vista numérico, en el sentido de hacerlo más eficiente y capaz de afrontar problemas que ahora podrían ser costosos y difíciles de llevar a cabo. En esta línea está la incorporación de soluciones fundamentales avanzadas de semiespacio viscoelástico estratificado. El modelo con este tipo de soluciones fundamentales no precisa de la discretización del semiespacio, permitiendo además tratar suelos estratificados con un importante ahorro en el tamaño del problema. En esta línea se desarrolla en el momento



actual una Tesis Doctoral en el Grupo de Trabajo. Centrados en el código BEM-FEM para edificios, este desarrollo se suma a las ventajas computacionales implementadas dando como resultado un modelo muy económico que permitirá abordar problemas con un gran número de edificios, estudiar interacciones mutuas o en que medida cambian las características del campo incidente debido a su presencia (efecto ciudad). Sería un modelo riguroso sin precedentes que permitirá validar otros muy simplificados que existen en la bibliografía para estudiar este problema.

2. En la definición de la excitación sísmica. En esta línea, y para el semiespacio viscoelástico, ampliar el modelo de excitación sísmica general presentado al caso de suelos estratificados. En relación con el modelo BEM-FEM presentado, este avance está en la línea con el primero (soluciones fundamentales avanzadas) y ambos permitirán un código muy general para el análisis sísmico de edificios. También, ampliar la definición del campo incidente para semiespacios porosos. En esta Tesis Doctoral se presentan resultados para el caso de incidencia vertical, se propone trabajar en una rutina que incorpore, en primera instancia, la posibilidad de ondas SH, SV, P y Rayleigh con cualquier ángulo de incidencia sobre el emplazamiento para este tipo de medios.



## Referencias

- [AA03] H Aguilar and J Avilés. Influencia de pilotes de fricción en la interacción dinámica suelo–estructura. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 19(1):3–18, 2003.
- [Aba84] R Abascal. *Estudio de Problemas Dinámicos en Interacción Suelo–Estructura Mediante el Método de los Elementos de Contorno*. PhD thesis, Escuela Superior de Ingenieros Industriales, Sevilla, España, 1984.
- [ACD89] E Alarcón, J J Cano, and J Domínguez. Boundary element approach to the dynamic stiffness functions of circular foundations. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 19:654–664, 1989.
- [Ach73] J. D. Achenbach. *Wave propagation in elastic solids*. North–Holland, Amsterdam, 1973.
- [AH06] S W Alves and J F Hall. Generation of spatially nonuniform ground motion for nonlinear analysis of a concrete arch. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 35(11):1339–1357, 2006.
- [Alv04] S W Alves. Nonlinear analysis of pacoima dam with spatially nonuniform ground motion. Research report EERL 2004-11, California Institute of Technology, Earthquake Engineering Research Laboratory, 2004.
- [AMC99] J J Aznárez, O Maeso, and F Chirino. Una técnica numérica para la determinación de rigideces dinámicas de cimentaciones sobre suelos saturados. In *Memorias del 1ER Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica*, number 2, pages 417–425. JG Sánchez Cabañero (AEIS), 1999.
- [AMD01] J J Aznárez, O Maeso, and J Domínguez. A 3-D boundary element model for the dynamic analysis of arch dams with porous sediments. *Earthquake Resistant Engineering Structures III*, 2001.
- [AMD06] J J Aznárez, O Maeso, and J Domínguez. BE analysis of bottom sediments in dynamic fluid–structure interaction problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 30(2):124–136, 2006.
- [ÁPAM15] G. M. Álamo, L A Padrón, J J Aznárez, and O Maeso. Structure–soil–structure interaction effects on the dynamic response of piled structures under obliquely–incident seismic shear waves. *Soil Dynamic and Earthquake Engineering*, 2015.
- [APR98] J Avilés and L E Pérez-Rocha. Effects of foundation embedment during building–soil interaction. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 27:1523–1540, 1998.

- [ÁRBSSA05] S. Álvarez-Rubio, J J Benito, F J Sánchez-Sesma, and E Alarcón. The use of direct boundary element method for gaining insight into complex seismic response. *Computers & Structures*, 83:821–835, 2005.
- [ÁRSSBA04] S. Álvarez-Rubio, F J Sánchez-Sesma, J J Benito, and E Alarcón. The direct boundary element method: 2D site effects assessment on laterally layered media (methodology). *Soil Dynamic and Earthquake Engineering*, 24(1):167–180, 2004.
- [AS64] M Abramowitz and I A Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover, NY, 1964.
- [ASPM09] J J Aznárez, A Santana, L A Padrón, and O Maeso. Modelo simple para el cálculo de la respuesta sísmica de una estructura enterrada. In *Actas 9º Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica (CIBIM9)*, number 09, pages 106–113, 2009.
- [Azn02] J J Aznárez. *Efectos de los Fenómenos de Interacción Incluyendo Factores Espaciales y Sedimentos de Fondo en la Respuesta Sísmica de Presas Bóveda*. PhD thesis, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, 2002.
- [BC41] M. A. Biot and F. M. Clinan. Consolidation settlement of a soil with impervious top surface. *J. Appl. Phys.*, 1941.
- [Bes87] D E Beskos. Boundary element methods in dynamic analysis. *Applied Mechanics Reviews*, 40:1–23, 1987.
- [Bes97] D E Beskos. Boundary element methods in dynamic analysis: Part II. (1986-1996). *Applied Mechanic Review*, 50:149–197, 1997.
- [Bie75] J Bielak. Dynamic behaviour of structures with embedded foundations. *Earthquake engineering and structural dynamics*, 3:259–274, 1975.
- [Bio41a] M. A. Biot. Consolidation settlement under a rectangular load distribution. *J. Appl. Phys.*, 12:426–430, 1941.
- [Bio41b] M. A. Biot. General theory of three-dimensional consolidation. *J. Appl. Phys.*, 12:155–164, 1941.
- [Bio56a] M. A. Biot. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I: Low frequency range. *Journal of the Acoustical Society of America*, 28(2):168–178, 1956.
- [Bio56b] M. A. Biot. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II: Higher frequency range. *Journal of the Acoustical Society of America*, 28(2):179–191, 1956.
- [BT91a] S Bougacha and J L Tassoulas. Seismic response of gravity dams I: Modelling of sediments. *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, 117(8):1826–1837, 1991.
- [BT91b] S Bougacha and J L Tassoulas. Seismic response of gravity dams II: Effects of sediments. *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, 117(8):1839–1850, 1991.
- [BT06] S Bougacha and J L Tassoulas. Dam-water-sediments-rock systems: Seismic analysis. *Soil Dynamic and Earthquake Engineering*, 26:680–693, 2006.
- [Cam00] R J Camara. A method for coupled arch dam-foundation-reservoir seismic behaviour analysis. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 29:441–460, 2000.

- [CBB91] A H D Cheng, T Badmus, and D E Beskos. Integral equation for dynamic poroelasticity in frequency domain with BEM solution. *J. Eng. Mech, ASCE*, 117(5):1136–1157, 1991.
- [CCwG01] Z Chuhan, Y Chengda, and w Guanglun. Numerical simulation of reservoir sediment and effects on hydrodynamic response of arch dams. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 30:1817–1837, 2001.
- [CH87] H Chen and S Hou. Effect of seismic travelling wave on the response of arch dams. In *Proc. China–U.S. Workshop on Earthquake Behavior of Arch Dams*, Beijing, China, 1987.
- [CH93] B F Chen and T K Hung. Dynamic pressure of water and sediments on rigid dams. *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, 119(7):1411–1433, 1993.
- [Che86] A H D Cheng. Effects of sediments on earthquake induced reservoir hydrodynamic response. *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, 112(7):645–665, 1986.
- [Cho12] A K Chopra. Earthquake analysis of arch dams: factors to be considered. *Journal of Structural Engineering (ASCE)*, 138(2):204–213, 2012.
- [CMA00] F Chirino, O Maeso, and J J Aznárez. Una técnica simple para el cálculo de las integrales en el sentido del valor principal de Cauchy en el MEC 3D. *Rev Int Met Num para Cálculo y Diseño en Ing*, 16:77–95, 2000.
- [CR68] T A Cruse and F Rizzo. A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem I. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 22:244–259, 1968.
- [Cru69] T A Cruse. Numerical solutions in three dimensional elastostatics. *Int J Numer Meth Eng*, 5:1259–1274, 1969.
- [CVA99] H B Coda, W S Venturini, and M H Aliabadi. A general 3D BEM/FEM coupling applied to elastodynamic continua/frame structures interaction analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46:695–712, 1999.
- [CW10] A K Chopra and J T Wang. Earthquake response of arch dams to spatially varying ground motion. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 39:887–906, 2010.
- [DG98] M Doblaré and L Gracia. *Fundamentos de la Elasticidad Lineal*. Síntesis Ingeniería. Síntesis, Madrid, 1998.
- [DJG97] J Domínguez, B R Japón, and R Gallego. Effects of porous sediments on seismic response of concrete gravity dams. *Journal of engineering mechanics*, 123(4):302–311, 1997.
- [DM89a] J Domínguez and F Medina. Boundary elements for the analysis of the seismic response of dams including dam-water-foundation interaction effects, I. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 6(3):152–157, 1989.
- [DM89b] J Domínguez and F Medina. Boundary elements for the analysis of the seismic response of dams including dam-water-foundation interaction effects, II. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 6(3):158–163, 1989.
- [DM93] J Domínguez and O Maeso. Earthquake analysis of arch dams II: Dam-water-foundation interaction. *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, 119(3):513–530, 1993.

- [Dom91] J Domínguez. An integral formulation for dynamic poroelasticity. *J. Appl. Mech., ASME*, 58:588–591, 1991.
- [Dom92] J Domínguez. Boundary element approach for dynamic poroelastic problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 35(2):307–324, 1992.
- [Dom93] J Domínguez. *Boundary Elements in Dynamics*. Computational Mechanics Publication: Southampton and Elsevier Applied Science: New York, 1993.
- [DR78a] J Domínguez and J M Roesset. Dynamic stiffness of rectangular foundations. Research Report R78–20, Department of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, 1978.
- [DR78b] J Domínguez and J M Roesset. Response of embedded rectangular foundations to travelling waves. Research Report R78–24, Department of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, 1978.
- [Dra82] M Dravinski. Scattering of SH waves by subsurface topography. *Journal of Engineering Mechanics Div (ASCE)*, 108:1–31, 1982.
- [DS63] H. Deresiewicz and R. Skalak. On uniqueness in dynamic poroelasticity. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 53(4):783–788, 1963.
- [EA94] J M Emperador and J J Aznárez. Cálculo de impedancias dinámicas de cimentaciones axilsimétricas mediante el MEC. In *Solución de Problemas en Ingeniería con Métodos Numérico*, 1994.
- [ED89] J M Emperador and J Domínguez. Dynamic response of axisymmetric embedded foundations. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 18:1105–1117, 1989.
- [EMR77] F Elsabee, J P Morray, and J M Roesset. *Dynamic behavior of embedded foundations*. Rep. No. R77-33, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge MA, 1977.
- [ES75] A C Eringen and E Suhubi. *Elastodynamics. Vol. 2, linear theory*. Academic Press, New York, 1975.
- [Eur03] *Eurocode 8: Design of Structures for Earthquake Resistance. Part 1: General Rules, Seismic Actions and Rules for Buildings, Standard EN-1998-1, CEN/TC 250: Brussels*, 2003.
- [FC85] G Fenves and A K Chopra. Effects of reservoir bottom absorption and dam-water-foundation rock interaction on frequency response functions for concrete gravity dams. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 13(1):13–31, 1985.
- [FC86] K Fok and A K Chopra. Earthquake analysis of arch dams including dam-water-interaction, reservoir boundary absorption and foundation flexibility. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 14(2):155–184, 1986.
- [FC87] K Fok and A K Chopra. Water compressibility in earthquake response of arch dams. *Journal of Structural. Engineering (ASCE)*, 113(5):958–975, 1987.
- [FK93] Z. Friedman and J.B. Kosmatka. An improved two-node timoshenko beam finite element. *Computers & Structures*, 47(3):473–481, 1993.

- [FMdP05] R Matos Filho, A V Mendoça, and J B de Paiva. Static boundary element analysis of piles submitted to horizontal and vertical loads. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 29:195–203, 2005.
- [GAC<sup>+</sup>14] F García, J J Aznárez, H Cifuentes, F Medina, and O Maeso. Influence of reservoir geometry and conditions on the seismic response of arch dams. *Soil Dynamic and Earthquake Engineering*, 67:264–272, 2014.
- [GAM11] F García, J J Aznárez, and O Maeso. Variabilidad de la respuesta sísmica de presas bóveda ante diferentes combinaciones de ondas P y S compatibles con un espectro de respuesta. In *Métodos Numéricos em Engenharia 2011*, Coimbra, Portugal, 2011.
- [GAMW10] D Greiner, J J Aznárez, O Maeso, and G Winter. Single- and multi-objective shape design of y-noise barriers using evolutionary computation and boundary elements. *Advances in Engineering Software*, 41:368–378, 2010.
- [Gas76] D A Gasparini. *SIMQKE: A program for artificial generation*. Rep. No. R76-4. Massachusetts Institute of Technology, Cambridge MA, 1976.
- [GB98] J Guin and P K Banerjee. Coupled soil-pile-structure interaction analysis under seismic excitation. *Journal of Structural Engineering*, 124(4):434–444, April 1998.
- [GC97] R K Goel and A K Chopra. Period formulas for moment-resisting frame buildings. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 123(11):1454–1461, 1997.
- [GG06] N. Gerolymos and G. Gazetas. Winkler model for lateral response of rigid caisson foundations in linear soil. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 26(5):347–361, 2006.
- [GPMC06] B B Guzina, R Y S Pak, and A Martínez-Castro. Singular boundary elements for three-dimensional elasticity problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 30:623–639, 2006.
- [Gra46] D Graffi. Sul teorema di reciprocità nella dinamica dei corpi elastici. *Mem. Accad. Sci. Bologna, Ser.10*, 4:103–111, 1946.
- [GW01] F Gruttmann and W Wagner. Shear correction factors in Timoshenko's beam theory for arbitrary shaped cross-sections. *Computational Mechanics*, 27:199–207, 2001.
- [Har81] F Hartmann. *Elastostatics*. Progress in boundary element methods. Pentech Press, London, 1981.
- [HC83] J F Hall and A K Chopra. Dynamic analysis of arch dams including hydrodynamics effects. *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, 109(1):149–163, 1983.
- [Ish96] K Ishihara. *Soil Behaviour in Earthquake Geotechnics*. Oxford Science Publications, 1996.
- [JGD97] B. Japón, R. Gallego, and J. Domínguez. Dynamic stiffness of foundations on saturated poroelastic soils. *Journal of Engineering Mechanics*, 123(11):1121–1129, 1997.
- [JHT68] P C Jennings, G W Housner, and N C Tsai. *Simulated Earthquake Motions*. Caeltech, 1968.

- [JZ01] B Jin and Z Zhong. Lateral dynamic compliance of pile embedded in poroelastic half space. *Soil Dynamic and Earthquake Engineering*, 21:519–525, 2001.
- [KG93] M Kavvadas and G Gazetas. Kinematic seismic response and bending of free-heads piles in layered soil. *Géotechnique*, 43(2):207–222, 1993.
- [KK91] A M Kaynia and E Kausel. Dynamics of piles and pile groups in layered soils. *Soil Dynamic and Earthquake Engineering*, 10:386–401, 1991.
- [KPB99] S E Kattis, D Polyzos, and D E Beskos. Vibration isolation by a row of piles using a 3-D frequency domain BEM. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46:713–728, 1999.
- [KR74] E Kausel and J M Roesset. Soil-structure interaction problems for nuclear containment structures. In *Electronic Power and Civil Engineer Conf Paper Power Div Specially Conf*, pages 469–498. Boulder, Colorado, 1974.
- [KT91a] S Kojic and M D Trifunac. Earthquake stresses in arch dams I: Theory and antiplane excitation. *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, 117(3):532–552, 1991.
- [KT91b] S Kojic and M D Trifunac. Earthquake stresses in arch dams II: Excitation by SV–P– and Rayleigh waves. *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, 117(3):553–574, 1991.
- [Kup63] V D Kupradze. *Dynamical Problems in Elasticity, Progress in Solid Mechanics*. North-Holland, Amsterdam, 1963.
- [KWME78] E Kausel, R V Whitman, J P Morray, and F Elsabee. The spring method for embedded foundations. *Nuclear Engineering and Design*, 48:377–392, 1978.
- [LHM85] H B Li, G M Han, and H A Mang. A new method for evaluating singular integrals in stress analysis of solids by the direct boundary element method. *Int J Numer Meth Eng*, 21:2071–2098, 1985.
- [LRT87] V Lofti, J M Roesset, and J L Tassoulas. A technique for the analysis of the response of dams to earthquakes. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 15(4):463–490, 1987.
- [LT87] C Y Lin and J L Tassoulas. Three-dimensional dynamic analysis of dam–water–sediments systems. *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, 113(12):1945–1958, 1987.
- [MA05] O Maeso and J J Aznárez. *Estrategias para la reducción del impacto acústico en el entorno de carreteras. Una aplicación del Método de los Elementos de Contorno*. Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. ISBN 84-689-0340-X, 2005.
- [MAC99] O Maeso, J J Aznárez, and F Chirino. Aplicación del MEC a la determinación de rigideces dinámicas de cimentaciones embebidas sobre suelos poroelásticos. In *Métodos Numéricos en Ingeniería*, 1999.
- [MAD00] O Maeso, J J Aznárez, and J Domínguez. Travelling wave effects on the seismic response of arch dams. In *Proc. 14th ASCE Engineering Mechanics Conference*, University of Texas at Austin, 2000.
- [MAD02] O Maeso, J J Aznárez, and J Domínguez. Effects of space distribution of excitation on seismic response of arch dams. *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, 128(7):759–768, 2002.



- [MAD03] O Maeso, J J Aznárez, and J Domínguez. Dynamic stiffness of piles in uniform soils. In *Advances in Boundary Element Techniques IV*, Queen Mary Univ. of London, 2003.
- [MAD04] O Maeso, J J Aznárez, and J Domínguez. Three-dimensional models of reservoir sediment and effects on the seismic response of arch dams. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 33(10):1103–1123, 2004.
- [MAG05] O Maeso, J J Aznárez, and F García. Dynamic impedances of piles and groups of piles in saturated soils. *Computers & Structures*, 83(10–11):769–782, 2005. Boundary Element Methods.
- [Mak94] N Makris. Soil–pile interaction during the passage of rayleigh waves: an analytical solution. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 23:153–167, 1994.
- [MB90] S M Mammon and P K Banerjee. Response of pile and piles groups to traveling sh–waves. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 19(4):597–610, 1990.
- [MCG07] A Martínez-Castro and R Gallego. Three-dimensional green's function for time-harmonic dynamics in a viscoelastic layer. *International Journal of Solids and Structures*, 44:4541–4558, 2007.
- [MD93] O Maeso and J Domínguez. Earthquake analysis of arch dams I: Dam–foundation interaction. *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, 119(3):145–162, 1993.
- [MD09] M A Millán and J Domínguez. Simplified BEM/FEM model for dynamic analysis of structures on piles and pile groups in viscoelastic and poroelastic soils. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 33(1):25–34, 2009.
- [MDT90] F Medina, J Domínguez, and J L Tassoulas. Response of dams to earthquakes including effects of sediments. *Journal of Structural Engineering (ASCE)*, 116(1):3108–3121, 1990.
- [MG92] N Makris and G Gazetas. Dynamic pile–soil–pile interaction. part II: Lateral and seismic response. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 21:145–162s, 1992.
- [MG99] G Mylonakis and G Gazetas. Lateral vibration and internal forces of grouped piles in layered soils. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering (ASCE)*, 125:16–25, 1999.
- [MMK07] A Maravas, G Mylonakis, and D Karabalis. Dynamic characteristics of simple structures on piles and footings. In *Proceedings of 4th International Conference on Earthquake Geotechnical Engineering*, no. 1672, Thessaloniki, Greece, 2007.
- [MNG06] G Mylonakis, S Nikolaou, and G Gazetas. Footings under seismic loading: Analysis and design issues with emphasis on bridge foundations. *Soil Dynamic and Earthquake Engineering*, 26:824–853, 2006.
- [MPA<sup>+</sup>14] C Medina, L A Padrón, J J Aznárez, A Santana, and O Maeso. Kinematic interaction factors of deep foundations with inclined piles. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 43(13):2035–2050, 2014.
- [MPAM13] C Medina, L A Padrón, J J Aznárez, and O Maeso. Effects of soil–structure interaction on the dynamic properties and seismic response of piled structures. *Soil Dynamic and Earthquake Engineering*, 53:160–175, 2013.

- [MPAM15] C Medina, L A Padrón, J J Aznárez, and O Maeso. Influence of pile inclination angle on the dynamic properties and seismic response of piled structures. *Soil Dynamic and Earthquake Engineering*, 69:196–206, 2015.
- [MS69] R Muki and E Sternberg. On the diffusion of an axial load from an infinite cylindrical pile embedded in an elastic medium. *International Journal of Solids and Structures*, 5:587–606, 1969.
- [Myl01a] G Mylonakis. Elastodynamic model for large-diameter end-bearing shafts. *Soils and foundations*, 41(3):31–44, 2001.
- [Myl01b] G Mylonakis. Simplified model for seismic pile bending at soil layer interfaces. *Soils and Foundations*, 41(4):47–58, 2001.
- [MYP07] M A Millán, Y L Young, and J H Prevost. The effects of reservoir geometry on the seismic response of gravity dams. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 36(11):1441–1459, 2007.
- [MYP09] M A Millán, Y L Young, and J H Prevost. Seismic response of intake towers including dam–tower interaction. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 38(3):307–329, 2009.
- [NH90] P S Nowak and J F Hall. Arch dam response to nonuniform seismic input. *Journal of Engineering Mechanics*, 116(1):125–139, 1990.
- [NNAE78] M Novak, T Nogami, and F Aboul-Ella. Dynamic soil reactions for plane strain case. *J Eng Mech Div ASCE*, 104(4):953–959, 1978.
- [Nor85] A N Norris. Radiation from a point source and scattering theory in a fluid saturated porous solid. *J. Acoust. Soc. Am.*, 77(6):2012–2022, 1985.
- [PAM07] L A Padrón, J J Aznárez, and O Maeso. BEM–FEM coupling model for the dynamic analysis of piles and pile groups. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 31:473–484, 2007.
- [PAM08] L A Padrón, J J Aznárez, and O Maeso. Dynamic analysis of piled foundations in stratified soils by a BEM–FEM model. *Soil Dynamic and Earthquake Engineering*, 28:333–346, 2008.
- [PAM09] L A Padrón, J J Aznárez, and O Maeso. Dynamic structure–soil–structure interaction between nearby piled buildings under seismic excitation by BEM–FEM model. *Soil Dynamic and Earthquake Engineering*, 29:1084–1096, 2009.
- [PAM11] L A Padrón, J J Aznárez, and O Maeso. 3-D boundary element-finite element method for the dynamic analysis of piled buildings. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 35:465–477, 2011.
- [PAMS10] L A Padrón, J J Aznárez, O Maeso, and A Santana. Dynamic stiffness of deep foundations with inclined piles. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 39:1343–1367, 2010.
- [PAMS12] L A Padrón, J J Aznárez, O Maeso, and M Saitoh. Impedance functions of end-bearing inclined piles. *Soil Dynamic and Earthquake Engineering*, 38:97–108, 2012.
- [PD80] H G Poulos and E H Davis. *Pile foundations analysis and design*. John Wiley & Sons, NY, 1980.

- [PG02] R Y S Pak and B B Guzina. Three-dimensional green's functions for a multilayered half-space in displacement potentials. *Journal of Engineering Mechanics*, 128(4):449–461, 2002.
- [PSAM15] L A Padrón, A Suárez, J J Aznárez, and O Maeso. Kinematic internal forces in deep foundations with inclined piles. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 44:2129–2135, 2015.
- [Rai75] J J Rainer. Simplified analysis of dynamic structure–ground interaction. *Canadian Journal of Civil Engineering*, 2(3):345–356, 1975.
- [Roe77] J M Roesset. *Chapter 19: Soil Amplification of Earthquakes*. In CS Desai & JT Christian Eds. *Numerical Methods in Geotechnical Engineering*. McGraw-Hill: NY, 1977.
- [RS87] R K N D Rajapakse and A H Shah. On the longitudinal harmonic motion of an elastic bar embedded in an elastic half-space. *International Journal of Solids and Structures*, 23:267–285, 1987.
- [San10] A Santana. *Modelo Winkler para el análisis de la respuesta dinámica de estructuras enterradas. Trabajo Fin de Máster*. Instituto Universitario SIANI, 2010.
- [SDB85] R Sen, T G Davies, and P K Banerjee. Dynamic analysis of piles and piles groups embedded in homogeneous soils. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 13:53–65, 1985.
- [SI70] H B Seed and I M Idriss. *Soil Moduli and damping factors for dynamic response analysis*. Report No 70-1. EERC, 1970.
- [SLS72] B Schabel, J Lysmer, and H B Seed. *SHAKE: A computer program for analysis of horizontally layered sites*. Rep. No. EERC/72-12, University of California, Berkeley, 1972.
- [SS66] A H Stroud and D Secrest. *Gaussian quadrature formulas*. Prentice–Hall, NY, 1966.
- [SSBH85] F J Sánchez-Sesma, M A Bravo, and I Herrera. Surface motion of topographical irregularities for incident p, sv and rayleigh waves. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 75:263–269, 1985.
- [Sto49] G G Stockes. On the dynamical theory of the diffraction. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 9:1–62., 1849.
- [SW04] M Saitoh and H Watanabe. Effects of flexibility on rocking impedance of deeply embedded foundation. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 130 (4):435–445, 2004.
- [TAR06a] M. I. Todorovska and Y. Al Rjoub. Effects of rainfall on soil–structure system frequency: Examples based on poroelasticity and a comparison with full-scale measurements. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 26(6–7):708–717, 2006.
- [TAR06b] M. I. Todorovska and Y. Al Rjoub. Plain strain soil–structure interaction model for a building supported by a circular foundation embedded in a poroelastic half-space. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 26(6–7):694–707, 2006.

- [TC95a] H Tan and A K Chopra. Dam–foundation rock interaction effects in frequency–response functions of arch dams. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 24:1475–1489, 1995.
- [TC95b] H Tan and A K Chopra. Earthquake analysis of arch dam including dam–water–foundation rock interaction. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 24:1453–1474, 1995.
- [Tel87] J C Telles. A selfadaptative coordinate transformation for efficient evaluation of general boundary element integrals. *Int J Numer Meth Eng*, 24:937–959, 1987.
- [Ter23] K. Terzaghi. Die berechnung der durchlassigkeitsziffer des tones aus dem verlauf der hydrodynamischen spannungserscheinungen. *Sitz. Akad. Wiss., Vienna*, 132:125–138, 1923.
- [Ter25] K. Terzaghi. *Erdbaumechanik auf Bodenphysikalischer Grundlage*. Deuticke, Leipzig, 1925.
- [Tim21] S P Timoshenko. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *Philosophical Magazine*, 41(245):744–746, 1921.
- [Tim22] S P Timoshenko. On the transverse vibrations of bars of uniform cross–section. *Philosophical Magazine*, 43(253):125–131, 1922.
- [TM07] L H Thomazo and E Mesquita. On strategies to incorporate rigid body conditions in an indirect version of the boundary element method. In *Proc of Congresso de Métodos Numéricos em Engenharia (CMNE)/Congresso Ibero Latino-Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia, (CILAMCE), 06/2007*, volume 1, pages 1–21, Porto, Portugal, 06 2007.
- [Tri73] M D Trifunac. Scattering of plane SH–waves by a semi–cylindrical canyon. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1:267–281, 1973.
- [TT92] M I Todorovska and M D Trifunac. The system damping, the system frequency and the system response peak amplitudes during in–plane building–soil interaction. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 21:127–144, 1992.
- [VAG09] V Varun, D Assimaki, and G Gazetas. A simplified model for lateral response of large diameter caisson foundations: Linear elastic formulation. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 29(2):268–291, 2009.
- [VAS<sup>+</sup>13] J Vega, J J Aznárez, A Santana, E Alarcón, L A Padrón, J J Pérez, and O Maeso. On soil–structure interaction in large non–slender partially buried structures. *Bulletin of Earthquake Engineering*, 11(5):1403–1421, 2013.
- [Ver69] A Verruijt. Elastic storage of aquifers. In *En: Flow through porous media*, pages 331–376, 1969.
- [VM74] A S Veletsos and J W Meek. Dynamic behaviour of building–foundation systems. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 3:121–138, 1974.
- [VMAA07] J Vega, O Maeso, J J Aznárez, and E Alarcón. Aplicación del MEC a un problema de interacción suelo–estructura. In *Avances en Mecánica de Medios Continuos. Serie Ingeniería*, Universidad de Valladolid, 2007.

- [VMAO03] F Vinciprova, O Maeso, J J Aznárez, and G Oliveto. Interacction of BEM analysis and experimental testing on pile–soil systems. In *Problems in Structural Identification and Diagnostics: General Aspects and Applications*, 2003.
- [VV73] A S Veletsos and B Verbic. Vibration of viscoelastic foundations. *J. Earthquake Engrg. Struct. Dynamics*, 2(1):87–102, 1973.
- [VW71] A S Veletsos and Y T Wei. Lateral and rocking vibrations of footings. *J. Soil Mechanic and Foundations Division, ASCE*, 97(9):1227–1248, 1971.
- [WC10] J T Wang and A K Chopra. Linear analysis of concrete arch dams including dam-water-foundation rock interaction considering spatially varying ground motions. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 39:731–750, 2010.
- [Wol85] J P Wolf. *Dynamic Soil-Structure Interaction*. Prentice Hall: Englewood Cliffs, NJ, 1985.
- [Won82] H L Wong. Effect of surface topography on the diffraction of p, sv, and rayleigh waves. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 72:1167–1183, 1982.
- [WS68] L T Wheeler and E Sternberg. Some theorems in classical elastodynamics. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 31:51–90, 1968.
- [XLW10] B Xu, J F Lu, and J H Wang. Dynamic response of a pile embedded in a layered poroelastic half-space to harmonic lateral load. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 34(5):493–515, 2010.
- [ZAPM13] J M Zarzalejos, J J Aznárez, L A Padrón, and O Maeso. Influences of type of wave and angle of incidence on seismic bending moments in pile foundations. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 43(1):41–59, 2013.
- [ZC91] L P Zhang and A K Chopra. Impedance functions for three-dimensional foundations supported on an infinitely long canyon of uniform cross-section in a homogeneous half-space. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 20(11):1011–1027, 1991.
- [Zer09] A Zerva. Spatial variation of seismic ground motions. modeling and engineering applications. CRC Press. 2009.
- [ZR99] X Zeng and R K N D Rajapakse. Dynamic axial load transfer from elastic pile to poroelastic medium. *Journal of Engineering Mechanics*, 125:1048–1055, 1999.
- [ZZ88] C Zhang and C Zhao. Effects of canyon topography and geological conditions on strong ground motion. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 16:81–97, 1988.