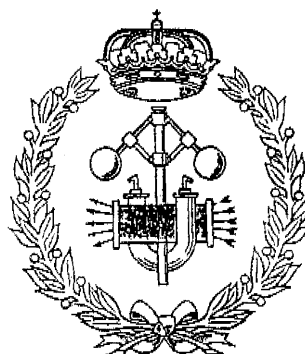
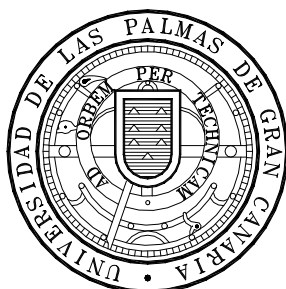


UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR
DE INGENIEROS INDUSTRIALES



PROYECTO FIN DE CARRERA

INFLUENCIA DE LAS CARACTERÍSTICAS DE LA EXCITACIÓN
(TIPO DE ONDA Y ÁNGULO DE INCIDENCIA) EN LA
RESPUESTA SÍSMICA DE UNA ESTRUCTURA

AUTOR: BORJA GUERRA RIVERO

TUTORES: ORLANDO MAESO FORTUNY
JUAN JOSÉ AZNÁREZ GONZÁLEZ

JULIO, 2009



Índice general

1	Introducción	5
1.1	Antecedentes.....	5
1.2	Objetivos del proyecto.....	6
1.3	Factores que influyen en la respuesta sísmica de una estructura.....	8
1.3.1	Factores que influyen sobre los desplazamientos de campo libre.....	9
1.3.2	El carácter espacial de la excitación.....	9
1.3.3	Fenómenos de interacción dinámica.....	10
1.4	Metodología utilizada.....	11
1.5	Descripción de los contenidos.....	14
2	Ecuaciones de la Elastodinámica	15
2.1	Introducción	15
2.2	Propagación de ondas en problemas escalares y elásticos.....	16
2.2.1	Ecuaciones básicas de la Elastodinámica Lineal.....	16
2.2.2	Propagación de ondas en medios viscoelásticos.....	19
2.2.3	Ondas de presión en fluidos.....	23
2.3	Ecuaciones de gobierno en el dominio de la frecuencia.....	25
2.4	Formulación integral del problema.....	27
2.4.1	Formulación integral para el problema viscoelástico. Solución fundamental armónica.....	27

2.4.2	Formulación integral para el problema escalar. Solución fundamental armónica.	35
3	El Método de los Elementos de Contorno.....	39
3.1	Introducción.	39
3.2	Aplicación del Método de Elementos de Contorno (MEC) en un medio viscoelástico.	39
3.3	Aplicación del Método de Elementos de Contorno (MEC) en un medio escalar.	43
3.4	Acoplamiento entre regiones.	46
3.4.1	Interfase viscoelástico-viscoelástico.	47
3.4.2	Interfase escalar-escalar.	48
3.4.3	Interfase viscoelástico-escalar.	48
3.5	Aspectos relacionados con la aplicación del MEC.	53
3.5.1	Tipos de elementos de contorno.....	53
3.5.2	Evaluación de las integrales en el contorno. Singularidades.	55
3.6	Duplicación de nodos en los bordes angulosos. Problema de esquina.	58
3.7	Solución al problema de un semiespacio de geometría arbitraria acoplado a una estructura y excitado con ondas (Sh, Sv, P ó Rayleigh).	61
4	Ecuaciones de propagación de las ondas sísmicas	64
4.1	Introducción.	64
4.2	Onda SH.....	64
4.2.1	Campo de desplazamientos	65

4.2.2	Campo de deformaciones	66
4.2.3	Campo de Tensiones	67
4.3	Onda P.....	69
4.3.1	Campo de Desplazamientos	70
4.3.2	Campo de deformaciones	71
4.3.3	Campo de Tensiones	74
4.4	Onda SV.....	80
4.4.1	Campo de Desplazamientos	81
4.4.2	Campo de deformaciones	84
4.4.3	Campo de tensiones	87
4.4.4	Cálculo de las Amplitudes	90
4.4.5	La onda SV y el ángulo crítico.....	96
4.5	Onda Rayleigh	102
4.5.1	Cálculo de las amplitudes	109
4.5.2	Campo de deformaciones.....	116
4.5.3	Campo de Tensiones	117
4.6	Coordenadas generales	120
4.6.1	Expresiones generales	131
5	Resultados	137
5.1	Introducción.	137
5.2	Estructura cilíndrica semienterrada en el semiespacio.	138

5.2.1	Discretización utilizada.....	139
5.3	Planteamiento del primer problema.	142
5.3.1	Onda SH.....	145
5.3.2	Onda P.....	153
5.3.3	Onda SV.....	160
5.4	Planteamiento del segundo problema.	168
5.4.1	Presa de Morrow Point.....	169
5.4.2	Influencia del ángulo de incidencia sobre la respuesta de la presa. 172	
6	Conclusiones y desarrollos futuros	179
6.1.1	Revisión y conclusiones.....	179
6.1.2	Desarrollos futuros.....	181
7	Bibliografía.....	182

1 Introducción

1.1 Antecedentes.

Existen multitud de problemas de análisis estructural en los que las acciones son variables en el tiempo de forma que, tanto los efectos inerciales como el análisis propiamente dicho, han de ser considerados desde una perspectiva dinámica. Entre ellos se encuentran aquellos en los que la estructura es sometida a una sollicitación sísmica.

El caso de excitaciones sísmicas y la respuesta sísmica de estructuras es un hecho que destaca por su importancia dentro del campo de la ingeniería.

En lo que nos concierne al caso de las excitaciones sísmicas, éstas constituyen un campo notable de investigación dentro de la dinámica de estructuras debido, en gran parte, al efecto devastador que dicho fenómeno puede llegar a producir sobre la misma. Son muchos los aspectos del problema, desde la propia definición de la excitación sísmica hasta el comportamiento acoplado de la estructura con el suelo de cimentación, los cuales han sido objeto de aportaciones científicas en numerosas publicaciones dedicadas al tema.

No obstante, aún existen gran cantidad de aspectos desconocidos o no entendidos en su totalidad. Entre algunos de estos aspectos destacamos el factor más determinante del problema, la excitación sísmica, la cual es la gran desconocida. Aspectos tales como el carácter aleatorio de la excitación y la incertidumbre sobre aspectos del emplazamiento, complican en gran medida el estudio de este tipo de problemas.

El análisis sísmico de estructuras es un tema capital en la división de Mecánica de Medios Continuos y Estructuras, perteneciente al instituto universitario SIANI, al cual me he incorporado para poder llevar a cabo la realización del presente proyecto.

En lo referido a esta división, existe un grupo de investigadores y colaboradores que trabajan, desde hace años, en modelos para el análisis sísmico de estructuras (más concretamente para el caso de presas bóveda). Es por ello que, todo lo realizado en este

proyecto fin de carrera, debe entenderse como un punto y seguido en el trabajo realizado por dicho personal de investigación. En última instancia, reseñar que el software necesario para poder llevar a cabo los cálculos que han hecho posible este proyecto, ha sido desarrollado por el propio grupo de investigación.

A través de esta línea de trabajo se pretende dar un paso más en el conocimiento de la influencia de la excitación en la respuesta sísmica de la estructura, más concretamente en estructuras de contención de aguas. Las nuevas líneas de investigación iniciadas y que, algunas de ellas han sido desarrolladas en este proyecto, ofrecen diversas vías con posibilidad de admitir un profundo desarrollo en un futuro no muy lejano.

Se trata, por tanto, de un proyecto en el cual trataremos de poner de manifiesto determinados factores que pudieran ser importantes en las características de la excitación sísmica, así como la influencia de éstos en la respuesta sísmica de la estructura. Dichos factores serán tratados con una gran profundidad de análisis.

1.2 Objetivos del proyecto.

La realización del presente proyecto tiene como principal objetivo determinar la influencia de determinadas características de la excitación en la respuesta sísmica de una estructura. Más concretamente, dicho estudio se centrará en el tipo de onda propagada así como el ángulo con el que dicha onda incide en el terreno.

Para ello, se definirá un primer problema que se corresponde con el análisis sísmico de una estructura cilíndrica, de unas determinadas dimensiones, la cual se encuentra parcialmente enterrada en el terreno (semiespacio). Este primer problema será utilizado como un ejemplo de comprobación, a fin de certificar que la inclusión del nuevo ángulo de incidencia en la formulación referente a la propagación de las ondas sísmicas ha sido correcta.

Posteriormente abordaremos un segundo problema, el cual consistirá en una estructura de contención de aguas. Será en este segundo problema, donde nos

centraremos en algunos de los factores que determinan, en mayor o menor medida, la respuesta sísmica de una estructura.

A modo de concretar, el análisis se centrará en la obtención de la respuesta dinámica de la estructura provocada por un tren de ondas que se propaga por el suelo, centrándonos en aspectos tales como el ángulo de incidencia de la onda, así como el tipo de onda que se esté sometiendo al análisis en ese instante.

Se trata, por tanto, de un trabajo de gran complejidad que nos permitirá obtener conclusiones claras en relación a los objetivos que se persiguen. Es por ello que trataremos de presentar este proyecto de la manera más clara y precisa posible, con el fin de elaborar un material que pueda ser utilizado por personal de investigación cualificado.

Existen, no obstante, otros objetivos relacionados con la formación del ingeniero propiamente dicho. Y es que aparte de la formación en materia de investigación, no se debe dejar de lado la formación relacionada con la dinámica de estructuras. A continuación, detallamos los objetivos a tener en cuenta:

1. Estudio de las bases de la Elastodinámica lineal, dando vital importancia a la comprensión de los fenómenos de propagación de ondas elásticas y su correspondiente formulación matemática.
 2. Estudio de los diferentes modelos de excitación sísmica vinculados a la propagación de ondas elásticas a través del terreno. Comprensión de la naturaleza propagatoria del sismo, cuestión de gran importancia en el caso de estructuras de gran tamaño.
 3. Estudio de las bases de los métodos numéricos que han servido para el desarrollo de software aplicable al análisis de propagación de ondas en medios elásticos y al análisis sísmico de estructuras. Éste ha sido desarrollado por los integrantes de la división de Mecánica de los Medios Continuos y Estructuras, la cual se encuentra adscrita al IUSIANI (Instituto Universitario de Sistemas Inteligentes y Aplicaciones Numéricas en la Ingeniería). En el momento actual, dicho software permite la simulación de un tren de ondas plana con un ángulo variable,
-

aunque con una importante limitación; y es que, la dirección de propagación del campo incidente está contenida en un plano perpendicular al plano de simetría de la estructura. Se pretende con este proyecto final de carrera, superar esta limitación y poder abordar situaciones más reales. Por ello, la tarea más importante a realizar en dicho proyecto será la formulación e implementación de un tren de ondas plana con incidencia general.

4. También, y ya ampliadas las capacidades del código, nos centraremos en su aplicación al estudio de la influencia del carácter de la excitación (tipo de onda y ángulo de incidencia) en la obtención de la respuesta sísmica más desfavorable de la estructura para un registro de campo libre del emplazamiento conocido a priori.
5. Finalmente, obtendremos una amplia gama de resultados que plasmaremos de un modo muy claro, con el fin de que éstos puedan ser utilizados como material didáctico o, incluso, como referencia para estudios de investigación futuros.

1.3 Factores que influyen en la respuesta sísmica de una estructura.

Resulta fundamental ubicar el factor de seguridad como uno de los aspectos que más se debe tener en cuenta en la vida profesional del ingeniero, puesto que gran parte de recursos, medios de producción y vidas humanas dependen de ello.

La conciencia tomada por técnicos cualificados en la materia ha conducido al desarrollo de costosas precauciones. Gracias a ello, el impacto de las catástrofes por fallo de la estructura ha sido relativamente pequeño. No obstante, el poco conocimiento que se tiene sobre el problema y la magnitud del impacto que pudiera ocasionar dicho problema, hacen necesario emprender nuevos estudios científicos y técnicos que contribuyan a acercarnos al conocimiento pleno del problema. Obtener de manera precisa la respuesta sísmica de una estructura ante la aleatoriedad que representa un terremoto es uno de los objetivos de muchos de los investigadores que trabajan en este campo.

En los últimos tiempos se han llevado a cabo grandes avances en el estudio de la respuesta sísmica de estructuras. Sin embargo, existen factores que, aún hoy en día, siguen siendo una incógnita. En la medida de lo posible, este proyecto tratará de realizar una pequeña aportación al conocimiento de algunos factores que todavía no se han estudiado en profundidad.

Como ya se ha comentado, existen multitud de aspectos que tienen gran influencia en la respuesta sísmica de una estructura. A continuación, realizaremos una clasificación en este sentido, si bien, estos fenómenos no son absolutamente independientes entre sí.

1.3.1 Factores que influyen sobre los desplazamientos de campo libre.

Los desplazamientos de campo libre en puntos de la superficie del terreno son los provocados por la acción de las ondas sísmicas sin tener en cuenta la presencia de la estructura. Si en el modelo estudiado los fenómenos de interacción pueden obviarse, el estudio dinámico de la estructura podrá realizarse utilizando como excitación sobre la cimentación las expresiones conocidas de este campo de desplazamientos.

Los desplazamientos de la superficie libre del terreno están influenciados, de un lado, por la composición de las ondas sísmicas y su ángulo de incidencia; y por el otro, por las características geológicas y topográficas del emplazamiento. La influencia de este efecto asociado al emplazamiento sobre las variaciones del campo de desplazamiento en la superficie libre ha sido puesta de manifiesto por multitud de estudios teóricos y experimentales.

1.3.2 El carácter espacial de la excitación.

Hace referencia este factor al carácter viajero de las ondas sísmicas y al tamaño de la estructura analizada.

Así, el análisis convencional de la respuesta sísmica de estructuras considera que el problema puede resolverse con una excitación idéntica que actúa en todos los puntos de la cimentación de la estructura. Esta hipótesis será admisible en el caso de suelos

infinitamente rígidos o que las dimensiones de la estructura sean inferiores a la longitud de onda característica del movimiento sísmico.

Sin embargo, para estructuras con unas dimensiones del orden de la longitud de la onda que se propaga, deberán tenerse en cuenta la variación del campo de desplazamientos entre diferentes puntos de la cimentación, no siendo válida la hipótesis de suelo infinitamente rígido. Para el caso de los problemas que llevaremos a la práctica, no realizaremos esta última consideración.

1.3.3 Fenómenos de interacción dinámica.

Son multitud los estudios que han confirmado la importancia de los fenómenos de interacción en la respuesta sísmica del sistema.

Así, ya en primera instancia los desplazamientos en la superficie del terreno provocados por las ondas sísmicas se verán alterados por la presencia de la estructura. Esta alteración del desplazamiento vendrá determinada, en gran medida, por la relación entre la rigidez de la estructura y la rigidez del terreno sobre el que dicha estructura se sustenta.

En el caso de considerar un suelo mucho más rígido que la estructura, podemos concluir que los desplazamientos en la base de la misma serán idénticos a los de campo libre. No ocurre así para casos en los que se trabaje con suelos más flexibles, ya que en este caso la rigidez de la estructura influye también en los desplazamientos de la interfase entre los dos medios. Por otra parte, la consideración del terreno como un medio flexible acoplado con la estructura modifica las frecuencias propias en la respuesta de la estructura, así como provoca un aumento de la energía disipada.

Con la inclusión del agua en el modelo se incrementan los fenómenos de interacción entre los distintos medios. La respuesta sísmica del modelo vendrá determinada por la interacción conjunta entre estos medios, presentándose diferencias significativas con respecto a modelos que no tienen en cuenta esta interacción, los cuales no están analizando de forma completa el problema real.

1.4 Metodología utilizada.

A modo informativo, existen un número de problemas planteados en ingeniería, de los cuales es posible obtener la solución analítica obteniendo la resolución de un sistema de ecuaciones planteado a partir de las ecuaciones de gobierno; sin embargo, debemos de decir que el número de problemas que obedecen a este planteamiento es bastante menor que el número de problemas que se plantean con frecuencia en el mundo de la ingeniería.

El problema que aquí planteamos no se encuentra dentro del reducido grupo de los que tienen solución analítica.

En épocas pasadas, la posibilidad de afrontar un problema a través de técnicas numéricas resultaba una utopía. No obstante, gracias a la evolución tecnológica que han experimentado las máquinas de cálculo, dichos métodos numéricos se consideran actualmente imprescindibles por la multitud de ventajas que aportan, como puede ser el obtener una solución aproximada del problema con una precisión y un costo computacional razonable.

Por lo que respecta al método, existe un amplio número de ellos que pueden ser utilizados como base del estudio del problema que se haya planteado. En nuestro caso, se empleará el Método Directo, el cual basa su funcionamiento en el análisis conjunto de todos los medios implicados en el problema.

En lo que se refiere a la solución del problema, ésta se puede obtener tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia. En el dominio del tiempo, todas las variables tendrán dependencia temporal, pudiéndose seguir una estrategia de resolución paso a paso; en lo referido al análisis en el dominio de la frecuencia, será éste el que emplearemos para obtener la respuesta sísmica de los problemas que se planteen. Las variables para este tipo de análisis serán de tipo armónico. En el dominio de la frecuencia, podremos obtener una simplificación importante de las ecuaciones que gobiernan el comportamiento elastodinámico de los medios implicados en el análisis. A modo de explicación, básicamente el procedimiento consiste en la obtención de la función de transferencia del sistema, mediante la resolución del sistema de ecuaciones

surgido a partir de la aplicación de un método numérico sobre la formulación integral en el contorno de las ecuaciones de gobierno del problema. Haciendo uso de estas funciones de transferencia y de la Transformada de Fourier, podremos obtener la solución temporal aproximada del modelo frente a una excitación sísmica determinada. Dicho procedimiento, será explicado con gran profundidad en capítulos posteriores.

Pero no todo son ventajas en lo que a la utilización de la formulación en el dominio de la frecuencia se refiere, puesto que el enfoque del análisis desde dicho dominio no permite tener en cuenta posibles no linealidades. Además, la obtención de una respuesta temporal correcta requiere que se aplique una gama de frecuencias bastante alta en el análisis.

Abordando un aspecto tan importante como es el método de cálculo utilizado, existen diversas técnicas numéricas empleadas para la obtención de soluciones numéricas de problemas de dinámica de estructuras. Éstas pueden dividirse en dos grandes grupos, técnicas de dominio o técnicas de contorno. Los métodos más importantes de estos dos grupos son: el Método de Elementos Finito (MEF) y el Método de Elementos de Contorno (MEC). Cada uno presenta ventajas e inconvenientes que analizaremos a continuación; no obstante, el MEC resulta más adecuado cuando se pretende realizar el análisis sísmico de una estructura.

Por lo que respecta al MEC, éste se aplica sobre la formulación integral en el contorno de las ecuaciones de gobierno del problema. Dicha formulación relaciona las variables primarias del problema (desplazamientos y/o presiones) y sus derivadas (tensiones y/o derivada de la presión) a través de un problema de referencia (solución fundamental). El tratamiento numérico de las ecuaciones exige la discretización de los diferentes contornos en elementos. Dentro de cada elemento, la geometría del problema y el valor que toman las variables se aproxima por medio de unas funciones de aproximación convenientemente escogidas, a partir del valor en los nodos del elemento.

Con todo esto y un conjunto de soluciones fundamentales independientes, la igualdad integral en el contorno de partida podrá transformarse en un sistema de ecuaciones algebraicas que permitirá la obtención de una solución aproximada del problema.

A continuación realizaremos una breve comparación entre el MEC y el MEF, la cual nos permitirá comprender el por qué de la utilización del MEC para abordar problemas de análisis sísmico.

Por un lado, en el MEC se discretiza sólo el contorno de los diferentes medios implicados en el problema, provocando que el sistema de ecuaciones resultante sea menor. A su vez, el proceso de elaboración de las discretizaciones resulta más sencillo. No obstante, el tiempo de computación para obtener la solución usando el MEC no debe ser necesariamente menor que el que se necesita cuando el método usado es el MEF. Esto puede ser debido a que, por las características del MEC, en la matriz del sistema de ecuaciones a resolver la cantidad de ceros sea pequeña, dando lugar a tiempos de computación elevados. Por lo que respecta al MEF, los términos no nulos de la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones suelen estar agrupados en torno a la diagonal principal, lo que hace que el tiempo de computación pueda ser menor.

Otro aspecto a tener en cuenta es el de que, cuando las propiedades de los medios son no lineales, existe una dificultad añadida. Para tratar de solucionar este inconveniente, se deben incluir integrales de dominio en la formulación integral, lo que puede acabar con las ventajas del MEC.

Sin embargo, existe una ventaja fundamental que convierte al MEC en el método indicado para la resolución de los problemas que se plantean en este proyecto frente al MEF. En relación a este último, el MEC permite contemplar de forma muy natural dominios infinitos o semi-infinitos. Y es aquí donde las técnicas numéricas como el MEF se encuentran con la dificultad de cuantificar la porción de dominio a discretizar. Es más, se han encontrado con el inconveniente de definir contornos artificiales que, en problemas dinámicos, provocan reflexiones ficticias de las ondas, provocando una modificación en la solución del problema y haciendo que ésta sea menos fiable. Se han realizado numerosos intentos con el fin de aminorar este efecto, consiguiéndolo sólo en parte mediante la ayuda de algunas técnicas.

El Método de Elementos de Contorno, por el contrario, sólo requiere que se discretice cierta cantidad de suelo cercana a la estructura para representar adecuadamente el carácter no acotado del mismo; de este modo, lograremos que no se aporten nuevos contornos que traten de cerrar el dominio y que pudieran alterar la respuesta del modelo. Por ello, y a modo de conclusión, cuando la importancia de la estructura requiere gran exactitud en la obtención de los resultados, el MEC es el método numérico adecuado.

1.5 Descripción de los contenidos.

Tras un primer capítulo en el cual realizaremos una primera aproximación del proyecto, en el capítulo II se revisarán las ecuaciones que gobiernan el comportamiento dinámico de los tres medios implicados en el modelo. Estas ecuaciones se consideran una extensión de la Elasticidad lineal, involucrando la variable tiempo en el problema. También se revisarán dichas ecuaciones en el dominio de la frecuencia para los diferentes medios implicados en el modelo de estudio. Finalmente se afrontará la formulación integral en el contorno tanto para medios viscoelásticos como para medios escalares.

En el capítulo III abordaremos la aplicación del Método de los Elementos de Contorno sobre la formulación integral expuesta en el capítulo II, llegando a plantearse el sistema de ecuaciones que deberá ser resuelto para obtener una solución aproximada al problema. En lo que se refiere a la parte final del capítulo, abordaremos algunos aspectos interesantes del MEC, como el tipo de elemento utilizado para la discretización, el acoplamiento entre los diferentes medios, el problema de esquina o la aplicación de las condiciones de contorno entre otros.

Por lo que respecta al capítulo IV, se introducirán las ecuaciones que gobiernan la propagación de las ondas sísmicas (Sh, Sv, P y Rayleigh) a través del medio, teniéndose en cuenta que el tren de ondas pueda incidir desde cualquier ángulo de incidencia sobre la estructura sometida a estudio (hasta ahora se había tenido en cuenta que las ondas se encontraban contenidas en un plano determinado, sobre el cual se tenían en cuenta diferentes valores del ángulo de incidencia (θ)).

Finalmente, en el capítulo V se llevarán a cabo los primeros estudios de los problemas a analizar. Un primer problema será el compuesto por una estructura cilíndrica semienterrada en el semiespacio, cuyo propósito final será el de comprobar que la inclusión del nuevo ángulo de incidencia (φ) en las ecuaciones de propagación ha sido correcta; y un segundo problema en el que afrontaremos el estudio de una estructura de contención de aguas (presa), analizando los diferentes factores que puedan influir en la respuesta de la estructura ante la acción de una sollicitación sísmica.

Será en el último apartado de este capítulo V, donde haremos balance de todos los resultados obtenidos con el fin de extraer el mayor número de conclusiones posibles de una manera clara y concisa. Así mismo, se marcarán las líneas de futuros desarrollos que puedan iniciarse a partir del trabajo de investigación realizado.

2 Ecuaciones de la Elastodinámica

2.1 Introducción

A lo largo del presente capítulo afrontaremos el desarrollo de los conceptos teóricos, los cuales nos permitirán obtener una solución aproximada del problema que se desea analizar. Del mismo modo, estos conceptos teóricos servirán como base de programación en la estructura interna del software utilizado como herramienta de trabajo.

En lo que a la primera parte de dicho capítulo se refiere, desarrollaremos las ecuaciones básicas de gobierno de los diferentes medios que intervienen en el problema, caracterizando dichas ecuaciones tanto para el dominio del tiempo como para el dominio de la frecuencia respectivamente. Como dato anecdótico, decir que estas ecuaciones representan una extensión de la Elastoestática lineal.

Por lo que respecta a la segunda parte del capítulo, se afrontará el desarrollo de la formulación integral en el contorno para los diferentes medios que intervienen en el problema.

2.2 Propagación de ondas en problemas escalares y elásticos.

Para poder entender de una manera precisa todo lo que este proyecto engloba, deberemos comenzar explicando las ecuaciones que gobiernan el comportamiento dinámico de los medios implicados en el análisis; es decir, medios elásticos y escalares. Por ello, iniciaremos el estudio realizando un breve recorrido por las ecuaciones básicas de la Elastodinámica Lineal, para posteriormente continuar con las ecuaciones de propagación de ondas en cada uno de los medios mencionados anteriormente.

2.2.1 Ecuaciones básicas de la Elastodinámica Lineal.

Comenzaremos introduciendo las ecuaciones que definen el comportamiento en régimen dinámico de un sólido. Éstas se conocen con el nombre de *ecuaciones de equilibrio interno* a nivel diferencial, que escritas en notación de índices quedará como:

$$\sigma_{ij} + X_i = \rho \cdot \ddot{u}_i \quad (2.1)$$

Siendo:

- σ_{ij} las componentes del tensor de tensiones ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$).
- X_i fuerzas de volumen.
- ρ densidad del sólido.

En segundo lugar analizaremos el tensor de pequeñas deformaciones, encargado de relacionar las deformaciones con las componentes del desplazamiento en un punto del sólido considerado. Dichas ecuaciones escritas en notación de índices quedarán como:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \cdot (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.2)$$

En la expresión anterior denotaremos u como al vector desplazamiento en cada punto del sólido Ω . Este vector tendrá tres componentes, cada una de ellas según los ejes del sistema cartesiano fijo, respecto al cual definimos la posición del sólido. Por otro lado, x será el vector de posición en cada punto del sólido respecto al sistema cartesiano fijo. Dicho vector también constará de 3 componentes.

Finalmente, tenemos la ley de comportamiento del material encargada de relacionar las componentes del tensor de tensiones con las componentes del tensor deformaciones. Para el caso que nos atañe; es decir, para materiales homogéneos, isótropos y con comportamiento elástico, la ecuación en notación de índices quedará expuesta de la siguiente manera:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \cdot \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \cdot \sigma_{kk} \cdot \delta_{ij} \quad (2.3)$$

Donde:

- ν coeficiente de Poisson.
- E módulo de elasticidad del material.
- δ_{ij} delta de Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ para $i = j$; $\delta_{ij} = 0$ para $i \neq j$).

No obstante, esta ecuación puede ser escrita de forma inversa como sigue:

$$\sigma_{ij} = \lambda \cdot e \cdot \delta_{ij} + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_{ij} \quad (2.4)$$

Siendo:

- Módulo de rigidez transversal μ :

$$\mu = \frac{E}{2(1-\nu)} \quad (2.5)$$

- Constante de Lamé λ :

$$\lambda = \frac{2 \cdot \mu \cdot \nu}{1-2\nu} \quad (2.6)$$

- Dilatación volumétrica e :

$$e = \varepsilon_{kk} \quad (2.7)$$

En algunos casos puede resultar interesante la utilización del módulo de rigidez volumétrica o módulo de compresibilidad (k) como una de las constantes características del medio. Dicha constante representa la relación entre la presión y el cambio unitario

de volumen provocado por ella misma. Establecemos ahora una relación entre esta constante y las anteriormente expuestas a través de la siguiente expresión:

$$k = \lambda + \frac{2}{3} \cdot \mu = \frac{E}{3 \cdot (1-2\nu)} \quad (2.8)$$

Desarrollando la ley de comportamiento en cualquiera de las dos versiones expuestas anteriormente, se obtendrá un total de 6 ecuaciones debido a la simetría del tensor de tensiones y del tensor de deformaciones.

Si ahora consideramos todas las ecuaciones expuestas para un problema tridimensional, el resultado será la obtención de un sistema de 15 ecuaciones: seis de ellas referidas al tensor de deformaciones, tres ecuaciones de equilibrio dinámico y finalmente seis ecuaciones referidas a la ley de comportamiento. A su vez, dispondremos de 15 incógnitas: tres componentes del vector desplazamiento, seis componentes del vector de tensiones y otras seis componentes referidas al tensor de deformaciones, todas ellas con dependencia espacial y temporal. Considerando una sollicitación genérica variable en el tiempo, el resultado ya sea en desplazamientos, tensiones o deformaciones serán ondas que se desplazan en el interior del dominio estudiado.

Debido a lo complicado que resultaría el manejo de las 15 ecuaciones de manera conjunta, se procederá a la condensación del mismo obteniendo como resultado un sistema de 3 ecuaciones. Éstas son conocidas como las ecuaciones de Navier, las cuales dependen de las componentes del vector desplazamiento. Así, tenemos que:

$$\mu \cdot \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{X} = \rho \cdot \ddot{\mathbf{u}} \quad (2.9)$$

Esta expresión ha de satisfacerse en todos los puntos del dominio en estudio para cada instante de tiempo. La integración de (2.9) así como la obtención del campo de desplazamiento en el dominio Ω , requiere la imposición de restricciones en el contorno Γ de Ω en forma de tensiones y desplazamientos conocidos; además, se deberán establecer condiciones iniciales en $t = 0$ para las tres componentes del desplazamiento y la velocidad en cada punto del medio. Una vez conocido el campo de

desplazamientos, tanto el tensor de deformaciones $\varepsilon_{ij}(x, t)$ como el tensor de tensiones $\sigma_{ij}(x, t)$ son inmediatos mediante las relaciones matemáticas mostradas hasta ahora.

En los próximos capítulos nos adentraremos con más profundidad en la caracterización de estas ecuaciones para cada uno de los medios que intervienen en el problema.

2.2.2 Propagación de ondas en medios viscoelásticos.

A continuación estudiaremos que características deben de tener los fenómenos de propagación de ondas en un medio viscoelástico, homogéneo e isótropo. Se parte de las ecuaciones de equilibrio dinámico en desplazamientos (ecuaciones de Navier) y del problema que representa su integración teniendo en cuenta que las variables fundamentales (componentes del desplazamiento) se presentan acopladas. Debemos acometer el desacoplamiento del sistema de ecuaciones. En este sentido, los procedimientos que permiten llevar a cabo dicho objetivo parten de los trabajos de Poisson, si bien es Stokes (1849) el primero que presenta una formulación en términos de la dilatación volumétrica y el vector de rotación que permiten desacoplar las ecuaciones de un modo sencillo:

$$e = \varepsilon_{kk} = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (2.10)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} \quad (2.11)$$

En función de estas dos variables, podemos expresar la laplaciana del vector desplazamiento como:

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla e - \nabla \times \boldsymbol{\omega} \quad (2.12)$$

Introduciendo esta ecuación en (2.9), obtendremos que:

$$\mu \cdot \nabla \times \boldsymbol{\omega} + (\lambda + 2 \cdot \mu) \nabla e = \rho \cdot \ddot{\mathbf{u}} \quad (2.13)$$

Aplicando ahora el operador divergencia y el rotacional sobre (2.13) y, teniendo en cuenta que $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\omega}) = 0$ y $\nabla \times (\nabla e) = 0$ además de ser nula la divergencia del vector rotación, podemos obtener las siguientes expresiones:

$$\nabla^2 e = \frac{1}{c_p^2} \cdot \ddot{e} \quad (2.14)$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{c_s^2} \cdot \ddot{\boldsymbol{\omega}} \quad (2.15)$$

Donde:

$$c_p^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$$

$$c_s^2 = \frac{\mu}{\rho}$$

Tanto (2.14) como (2.15) representan la versión desacoplada de las ecuaciones de Navier. Se tratan de ecuaciones de onda, la primera escalar y la segunda vectorial (c_p y c_s tienen dimensiones de velocidad).

De este modo, la primera de las expresiones se asocia a cambios de volumen, propagándose con velocidad c_p , mientras que la segunda expresión se asocia con distorsiones en la forma, propagándose ésta con velocidad c_s . Para el caso de un medio homogéneo e isótropo infinito, ambas componentes coexisten y se propagan de manera independiente siendo $c_p > c_s$, motivo por el cual se denomina a las ondas irrotacionales *ondas primarias* (ondas P) y a las equivolumiales *ondas secundarias* (ondas S), puesto que las primeras alcanzan la estación en menor tiempo desde el epicentro del sismo.

Utilizando las velocidades de propagación como características del medio, la ecuación (2.13) puede escribirse como:

$$-c_s^2 \nabla \times \boldsymbol{\omega} + c_p^2 \nabla e = \ddot{\mathbf{u}} \quad (2.16)$$

A partir de esta expresión, estudiaremos las características del movimiento de los puntos del sólido bajo el efecto de las ondas, suponiendo un problema de propagación plana armónica de carácter genérico con velocidad c .

El campo de desplazamientos en notación compleja y con amplitud unitaria, puede expresarse como sigue:

$$\mathbf{u} = e^{i(\omega \cdot t - k \cdot \mathbf{s} \cdot \mathbf{x})} \cdot \mathbf{d} \quad (2.17)$$

Siendo:

- ω frecuencia angular.
- \mathbf{s} vector unitario que determina la dirección de propagación.
- k número de onda $\left(\frac{\omega}{c}\right)$.
- \mathbf{x} vector de posición en cualquier punto del sólido respecto al sistema cartesiano de referencia.
- i unidad imaginaria.
- \mathbf{d} vector unitario en la dirección del movimiento.

De este modo, si sustituimos (2.17), cada uno de los términos de (2.16) serán:

$$\nabla \times \omega = -k^2 \cdot \mathbf{s} \times (\mathbf{s} \times \mathbf{d}) \cdot e^{i(\omega \cdot t - k \cdot \mathbf{s} \cdot \mathbf{x})} \quad (2.18)$$

$$\nabla e = -k^2 \cdot (\mathbf{s} \cdot \mathbf{d}) \cdot \mathbf{s} \cdot e^{i(\omega \cdot t - k \cdot \mathbf{s} \cdot \mathbf{x})} \quad (2.19)$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = -\omega^2 \cdot e^{i(\omega \cdot t - k \cdot \mathbf{s} \cdot \mathbf{x})} \cdot \mathbf{d} \quad (2.20)$$

Sustituyendo cada uno de los términos en la ecuación de gobierno, tenemos que:

$$-c_s^2 \cdot (-k^2 \cdot \mathbf{s} \times (\mathbf{s} \times \mathbf{d}) \cdot e^{i(\omega \cdot t - k \cdot \mathbf{s} \cdot \mathbf{x})}) + c_p^2 \cdot (-k^2 \cdot (\mathbf{s} \cdot \mathbf{d}) \cdot \mathbf{s} \cdot e^{i(\omega \cdot t - k \cdot \mathbf{s} \cdot \mathbf{x})}) = -\omega^2 \cdot e^{i(\omega \cdot t - k \cdot \mathbf{s} \cdot \mathbf{x})} \cdot \mathbf{d} \quad (2.21)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\mathbf{s} \times (\mathbf{s} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{s} \cdot \mathbf{d}) \cdot \mathbf{s}$$

$$\frac{\omega^2}{k^2} = c^2$$

La expresión quedará de la siguiente forma:

$$(c_s^2 - c^2) \cdot \mathbf{d} + (c_p^2 - c_s^2) \cdot (\mathbf{s} \cdot \mathbf{d}) \cdot \mathbf{s} = 0 \quad (2.22)$$

Ahora trataremos de someter a estudio la ecuación de gobierno para los casos en los que la sollicitación sísmica sea una onda P o una onda S. Para el primer caso, tenemos que la velocidad será c_p por lo cual procederemos a sustituir en (2.22) el valor de la velocidad para una onda genérica por el de una onda P (c_p).

Para estas circunstancias, la ecuación solamente se verificará cuando $\mathbf{s} = \pm \mathbf{d}$; es decir, para el caso en el que la propagación de la onda y el movimiento tengan la misma dirección. Por ello, para el caso que nos atañe estaremos hablando de una onda longitudinal (onda P). La dirección de los vectores \mathbf{s} y \mathbf{d} se indica en la siguiente figura:

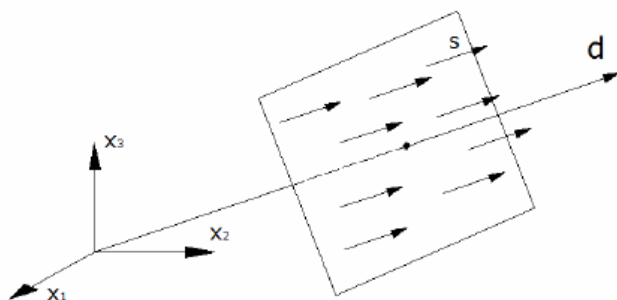


Figura 2.1. Desplazamiento y dirección de propagación. Ondas planas P

Para el segundo caso, se considera que la onda de carácter genérico es ahora una onda S. En tal caso, sustituiremos la velocidad de propagación genérica (c) por la velocidad de propagación de la onda S (c_s). Para estas circunstancias concretas, la ecuación de gobierno se cumple solo si $(\mathbf{s} \cdot \mathbf{d}) \cdot \mathbf{s} = 0$; esto requerirá que la dirección de propagación de la onda y la dirección del movimiento sean perpendiculares. Por ello, estaremos hablando de ondas transversales (ondas S). La dirección de ambos vectores (\mathbf{s} y \mathbf{d}) para una onda S queda representada a través de la siguiente figura:

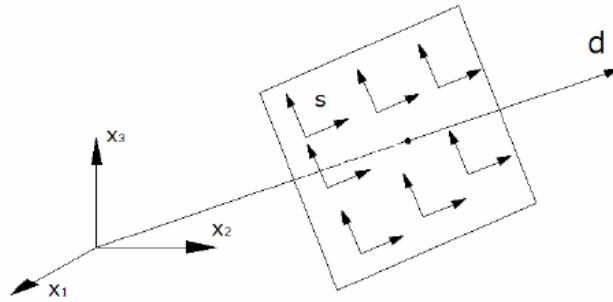


Figura 2.2. Desplazamiento y dirección de propagación. Ondas planas S

A lo largo de este apartado hemos tratado de manera muy esencial las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de las ondas sísmicas en un medio viscoelástico. Para tratar de un modo más profundo la teoría de la Elastodinámica, consultar Achenbach (1973) y Eringen-Suhubi (1975).

2.2.3 Ondas de presión en fluidos.

A lo largo de este capítulo introduciremos las ecuaciones que gobiernan el comportamiento dinámico de un medio fluido. Para ello, trataremos dicho medio (agua) como un fluido compresible, no viscoso (fluido perfecto), adoptando un comportamiento elástico y lineal que trabaja en un rango de pequeñas perturbaciones.

Un dato a tener en cuenta es el hecho de que todos los fluidos tienen viscosidad distinta de cero. No obstante, al variar ésta en amplios márgenes para diferentes fluidos podemos considerar que dicha viscosidad sea despreciada sin que se produzca pérdida de exactitud en los resultados. De este modo, en la parte fluida del problema sometido a estudio, los efectos inerciales serán predominantes sobre los viscosos. Además, no se tendrán en cuenta los efectos provocados por turbulencias. Un fluido perfecto (no viscoso) no es capaz de soportar tensiones tangenciales, lo que conlleva a que el tensor de tensiones se reduzca a su componente esférica.

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} \quad (2.23)$$

Donde puede observarse que el signo negativo indica una tensión de compresión para un valor positivo de la presión.

La ley de comportamiento para un fluido perfecto puede plantearse de la siguiente manera:

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -p = K_f \cdot \varepsilon \quad (2.24)$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \quad (2.25)$$

Donde:

- K_f módulo de compresibilidad del fluido, el cual representa la relación entre la presión y el cambio unitario de volumen provocado por ésta.
- ε dilatación volumétrica del fluido.

Recordemos que para medios viscoelásticos teníamos tres componentes del vector tensión para cada punto analizado. Para el caso que nos atañe (medio fluido), en cada punto tendremos un valor de la presión, de modo que conociendo el valor de la misma, será inmediata la obtención de las tres componentes del tensor de tensiones.

Por otro lado, considerando $U_i(\mathbf{x}, t)$ como el desplazamiento de un punto del fluido, la dilatación volumétrica vendrá dada por:

$$\varepsilon = \varepsilon_{kk} = U_{i,i} \quad (2.26)$$

Las tres ecuaciones de equilibrio interno que habíamos definido para un medio viscoelástico, se convertirán en una única ecuación para el caso de un medio fluido debido a que las componentes tangenciales del tensor de tensiones son nulas, así como las tres componentes normales idénticas. Por tanto, para un fluido perfecto podemos escribir la ecuación de equilibrio interno dinámico tal y como sigue:

$$\nabla p = \rho \cdot \ddot{\mathbf{u}} \quad (2.27)$$

La ecuación (2.27) nos será de gran utilidad a la hora de establecer las condiciones de contorno en las interfases entre dominio fluido y elástico (contornos de interfase suelo-estructura o agua-estructura). La ecuación anterior puede ser expresada en función de la dilatación volumétrica:

$$K_f \cdot \nabla \varepsilon = \rho \cdot \ddot{\mathbf{u}} \quad (2.28)$$

Aplicando los operadores divergencia y rotacional sobre la ecuación anterior, obtendremos la ecuación de onda que gobierna la propagación de una onda en el fluido:

$$\nabla^2 \varepsilon = \frac{1}{c^2} \ddot{\varepsilon} \quad (2.29)$$

$$\nabla \times \mathbf{U} = 0 \quad (2.30)$$

Puede verse como para el caso un fluido, trataremos una única ecuación de onda (escalar). Para el caso de medios viscoelásticos, obtuvimos dos ecuaciones de onda (una escalar y otra vectorial) en donde la ecuación vectorial era la encargada de gobernar la componente rotacional de la onda. Así, tenemos que esta componente no se propaga para el caso de un fluido perfecto, siendo únicamente la dilatación volumétrica la encargada de gobernar el movimiento del fluido. Por otro lado, definiremos la velocidad de la onda, la cual coincidirá con la velocidad de propagación de una onda longitudinal:

$$c^2 = \frac{K_f}{\rho} \quad (2.31)$$

Lo expuesto anteriormente nos lleva a concluir que las ondas transversales (ondas S) no se propagan a través del fluido.

En términos de la presión, definimos la ecuación de onda tal y como sigue:

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \ddot{p} \quad (2.32)$$

Ecuación que será utilizada en adelante para caracterizar el comportamiento dinámico de un fluido perfecto, lineal y elástico sometido a pequeñas perturbaciones.

2.3 Ecuaciones de gobierno en el dominio de la frecuencia.

Hasta ahora se han tratado las ecuaciones de gobierno para los diferentes medios que intervienen en el problema, considerando las variables con dependencia espacial y temporal.

No obstante, conviene tener en consideración el comportamiento dinámico de estos medios, debido a la simplificación matemática que sufren las ecuaciones de gobierno al ser expresadas en el dominio de la frecuencia. También este planteamiento conlleva a simplificaciones en los procedimientos (computacionales) para la obtención de soluciones al problema.

En cualquier caso, podremos plantear cualquier dependencia temporal de la variable como una superposición de armónicos de diferente frecuencia de acuerdo a los planteamientos de Fourier.

Comenzaremos estudiando el problema elastodinámico. Para ello, consideraremos el desplazamiento en un punto \mathbf{x} (con dependencia temporal y espacial) expresado en función de la frecuencia angular ω :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) \cdot e^{i\omega t} \quad (2.33)$$

Donde $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega)$ es un vector de componentes complejas en donde el módulo de las variables complejas en el dominio de la frecuencia representa el valor máximo que adopta esa variable en el dominio del tiempo, mientras que la relación entre las partes real e imaginaria representa el desfase.

Esta expresión llevada a las ecuaciones de Navier y considerando que las fuerzas de volumen también sean armónicas, nos conduce a la ecuación reducida de Navier. Ésta presenta mucha similitud con la ecuación original, pero con las variables dependiendo de la posición y la frecuencia. Así tenemos que:

$$\mu \cdot \nabla^2 \cdot \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla e + \mathbf{X} = -\rho \cdot \omega^2 \cdot \mathbf{u} \quad (2.34)$$

Llegados a este punto, puede tenerse en cuenta el carácter viscoelástico del medio (disipativo) el cual vendrá dado por:

$$\mu = Re[\mu] \cdot (1 + 2i\xi) \quad (2.35)$$

Donde ξ puede entenderse de la misma forma que el factor de amortiguamiento para sistemas de un grado de libertad.

Por otro lado, la variable fundamental para un fluido perfecto (la presión) puede expresarse en régimen armónico como:

$$p(\mathbf{x}, t) = p(\mathbf{x}, \omega) \cdot e^{i\omega t} \quad (2.36)$$

Expresión que permite escribir la ecuación reducida o ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 p + k^2 \cdot p = 0 \quad (2.37)$$

Donde:

- $k = \frac{\omega}{c}$ es el número de onda.

Utilizando como variable primaria la presión, la variable derivada está relacionada con el desplazamiento de las partículas del fluido (U_i) a través de (2.28). Así, en puntos del contorno y en la dirección marcada por la normal al mismo, tenemos que:

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = \rho \cdot \omega^2 \cdot U_n \quad (2.38)$$

Siendo U_n el desplazamiento normal al contorno de las partículas del fluido.

2.4 Formulación integral del problema.

El objetivo fundamental de este apartado será el de obtener la formulación integral en el contorno para los diferentes medios implicados. Posteriormente, dicha formulación nos será de utilidad para poder obtener, a través de la aplicación de un método numérico, una solución aproximada del problema en cuestión.

2.4.1 Formulación integral para el problema viscoelástico. Solución fundamental armónica.

Inicialmente, partiremos del teorema de reciprocidad Wheeler y Sternberg (1968) que constituye una extensión del teorema de reciprocidad de Betty para la elastoestática.

Plantaremos la formulación sobre el dominio Ω , delimitado por el contorno Γ . La densidad del medio se denotará mediante ρ y las velocidades de propagación de las ondas primarias y secundarias a través del mismo por c_p y c_s respectivamente.

Ahora se definirán dos estados elastodinámicos independientes aplicados sobre el dominio considerado. Estos dos estados deberán satisfacer las ecuaciones de gobierno del medio analizadas en el apartado anterior. Así, tenemos que:

Primer estado elastodinámico S , quedará definido por las siguientes variables:

- $\mathbf{u}(x, t)$ Vector desplazamiento con dependencia espacial y temporal.
- $\mathbf{t}(x, t)$ Vector tensión con dependencia espacial y temporal.
- $\mathbf{f}(x, t)$ Fuerzas de volumen con dependencia espacial y temporal.

Segundo estado elastodinámico S^* , quedará definido por las siguientes variables:

- $\mathbf{u}^*(x, t)$ Vector desplazamiento con dependencia espacial y temporal.
- $\mathbf{t}^*(x, t)$ Vector tensión con dependencia espacial y temporal.
- $\mathbf{f}^*(x, t)$ Fuerzas de volumen con dependencia espacial y temporal.

Estos dos estados elastodinámicos independientes aplicados sobre el mismo dominio Ω pueden relacionarse por medio de una formulación integral, el teorema de reciprocidad. Por ello, y para el caso de condiciones iniciales nulas, tenemos que:

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{t} * \mathbf{u}^*) d\Gamma + \rho \int_{\Omega} (\mathbf{f} * \mathbf{u}^*) d\Omega = \int_{\Gamma} (\mathbf{t}^* * \mathbf{u}) d\Gamma + \rho \int_{\Omega} (\mathbf{f}^* * \mathbf{u}) d\Omega \quad (2.39)$$

Donde el operador $*$ entre vectores representa la suma del producto de convolución de sus componentes.

El siguiente paso será desarrollar la formulación a partir del supuesto en el que las fuerzas de volumen y las condiciones de contorno sean armónicas en el tiempo, lo cual será considerado de vital importancia. Para ello, las variables fundamentales del problema serán expresadas en función de la frecuencia angular. Comenzando por las fuerzas de volumen, diremos que:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \omega) \cdot e^{i\omega t} \quad (2.40)$$

Donde:

- ω : frecuencia angular.
- i : unidad imaginaria.

Del mismo modo, pueden escribirse las fuerzas de volumen en función de la frecuencia angular para el segundo estado elastodinámico \mathbf{S}^* .

Para el desplazamiento, la expresión añade un nuevo término:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^T(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) \cdot e^{i\omega t} \quad (2.41)$$

Donde el primer término del segundo miembro representa la parte transitoria de la respuesta. Es usual considerar que ésta desaparece transcurrida un cierto tiempo debido a los mecanismos internos de disipación de energía que presentan todos los sistemas físicos, quedando únicamente la parte permanente de la respuesta. Al igual que sucede con las fuerzas de volumen, ésta puede ser escrita para los desplazamientos del segundo estado elastodinámico \mathbf{S}^* .

Finalmente, tenemos la expresión para la tensión en función de la frecuencia angular:

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{t}(\mathbf{x}, \omega) \cdot e^{i\omega t} \quad (2.42)$$

Expresión que también será aplicada al segundo estado elastodinámico \mathbf{S}^* .

Así pues resulta conveniente definir dos nuevos estados sobre el mismo dominio Ω , en los que las variables dependan de la posición y de la frecuencia angular. Por tanto, formularemos el problema en el dominio de la frecuencia. Llamaremos a estos dos nuevos estados elastodinámicos *estados reducidos*, especificando la notación para las variables fundamentales a continuación:

Primer estado elastodinámico reducido S_ω , el cual quedará definido por las siguientes variables:

- $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega)$ Vector desplazamiento con dependencia de la posición y de la frecuencia angular.
- $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \omega)$ Vector tensión con dependencia de la posición y de la frecuencia angular.
- $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \omega)$ Fuerzas de volumen con dependencia de la posición y de la frecuencia angular.

Segundo estado elastodinámico reducido S_ω^* , el cual quedará definido por las siguientes variables:

- $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, \omega)$ Vector desplazamiento con dependencia de la posición y de la frecuencia angular.
- $\mathbf{t}^*(\mathbf{x}, \omega)$ Vector tensión con dependencia de la posición y de la frecuencia angular.
- $\mathbf{f}^*(\mathbf{x}, \omega)$ Fuerzas de volumen con dependencia de la posición y de la frecuencia angular.

Aplicando el teorema de reciprocidad en el dominio de la frecuencia, obtendremos una expresión muy similar que para los estados iniciales con la salvedad de que se han eliminado los productos de convolución entre los vectores. Así, tenemos que:

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{u}^*) d\Gamma + \rho \int_{\Omega} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}^*) d\Omega = \int_{\Gamma} (\mathbf{t}^* \cdot \mathbf{u}) d\Gamma + \rho \int_{\Omega} (\mathbf{f}^* \cdot \mathbf{u}) d\Omega \quad (2.43)$$

El teorema de reciprocidad ha sido aplicado entre el estado elastodinámico que se pretende resolver y otro convenientemente escogido del cual se conoce la solución.

El siguiente paso será conocer la solución del estado elastodinámico en cuestión. Para ello, plantearemos un estado elastodinámico reducido determinado por una fuerza másica excitadora concentrada en un punto. Dicho estado elastodinámico se le conoce como el *estado elastodinámico de Stokes*, y la solución para dicho estado tanto en el campo de desplazamientos como en el de tensiones se conoce como *solución*

fundamental. La fuerza másica concentrada en el punto ξ responde a la siguiente expresión:

$$\mathbf{f}^*(\mathbf{x}, t) = \delta(\xi) \cdot e^{i\omega t} \mathbf{e} \quad (2.44)$$

Donde:

- $\delta(\xi)$ función impulso o delta de Dirac.
- \mathbf{e} vector unitario en la dirección de aplicación de la fuerza.

Sustituyendo la fuerza excitadora aplicada sobre el punto ξ en la expresión (2.43) se tiene que:

$$\mathbf{u}(\xi) = \int_{\Gamma} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{u}^*) d\Gamma - \int_{\Gamma} (\mathbf{t}^* \cdot \mathbf{u}) d\Gamma + \int_{\Omega} \rho (\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}^*) d\Omega \quad (2.45)$$

Donde:

- $\mathbf{u}(\xi)$ representa el desplazamiento en el punto donde se concentra la fuerza excitadora.
- \mathbf{u}^* representa el desplazamiento correspondiente al estado reducido de Stockes.
- \mathbf{t}^* representa la tensión correspondiente al estado reducido de Stockes.

\mathbf{u} y \mathbf{t} representan los campos de desplazamiento y tensión del primer estado elastodinámico, el cual se trata del problema que se pretende resolver a partir de la formulación planteada.

A partir de ahora prescindiremos del último término de la ecuación anterior por considerar nulas las fuerzas de volumen del primer estado reducido. Esto conlleva a que la expresión quede planteada en el contorno Γ del dominio Ω .

Acometeremos ahora la deducción de las expresiones del campo de desplazamiento y tensiones que dan solución al problema reducido de Stockes; las expresiones para la solución fundamental. Éstas tendrán que cumplir las ecuaciones de gobierno del medio sobre el que se aplique el estado reducido (en este caso viscoelástico).

Haciendo un poco de memoria, fue Stockes (1849) el primero en deducir la solución fundamental para problemas en el dominio del tiempo; posteriormente, fueron Cruse y Rizzo (1968) quienes obtuvieron la solución para el estado reducido a partir de la solución obtenida por Doyle (1966). No obstante, en este proyecto nos centraremos en las expresiones de la solución al campo de desplazamiento y tensión del estado reducido, obviando el proceso de deducción de dichas expresiones.

Así, comenzaremos con la solución fundamental en desplazamientos. Partiendo de un punto que dista r del punto de aplicación de la carga ξ , el desplazamiento en la dirección k para una carga l vendrá dado por:

$$U_{lk} = \frac{1}{\alpha \cdot \pi \cdot \rho \cdot c_s^2} \quad (2.46)$$

Siendo:

- $\alpha = 4$ en problemas tridimensionales.

$$\Psi = \left(1 + \frac{1}{z_s^2} - \frac{1}{z_s}\right) \cdot \frac{e^{z_s}}{r} - \left(\frac{c_s}{c_p}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{z_p^2} - \frac{1}{z_p}\right) \cdot \frac{e^{z_p}}{r}$$

$$X = \left(1 + \frac{3}{z_s^2} - \frac{3}{z_s}\right) \cdot \frac{e^{z_s}}{r} - \left(\frac{c_s}{c_p}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{3}{z_p^2} - \frac{3}{z_p}\right) \cdot \frac{e^{z_p}}{r}$$

Donde:

$$Z_s = \frac{i \cdot \omega \cdot r}{c_s}$$

$$Z_p = -\frac{i \cdot \omega \cdot r}{c_p}$$

La componente k del vector tensión sobre una superficie cuya normal unitaria exterior es η viene dada por:

$$T_{lk} = \frac{1}{\alpha \pi} \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} - \frac{\chi}{r} \right) \cdot \left(\delta_{kl} \frac{\partial r}{\partial \eta} + r_{,k} \cdot \eta_l \right) - \frac{2}{r} \chi \left(\eta_k \cdot r_{,l} - 2 \cdot r_{,k} \cdot r_{,l} \frac{\partial r}{\partial \eta} \right) - 2 \frac{\partial \chi}{\partial r} \cdot r_{,k} \cdot r_{,l} \frac{\partial r}{\partial \eta} + c_p^2 c_s^2 - 2 \cdot \partial \Psi \partial r - \partial \chi \partial r - \alpha 2 r_{,k} \cdot r_{,l} \cdot \eta_k \right] \quad (2.47)$$

Ahora plantearemos la formulación integral obtenida en (2.45) en función de la notación de índices utilizada para la solución fundamental. Esto puede resultar más esclarecedor a la hora de pensar en las direcciones tanto de aplicación de la fuerza como del resto de variables del problema. Por tanto, la expresión quedará:

$$C_{kl}(\xi) \cdot u_l(\xi) = \int_{\Gamma} (U_{lk} \cdot t_k - T_{lk} \cdot u_k) d\Gamma \quad (2.48)$$

Siendo:

- $u_l(\xi)$ desplazamiento del estado de solución desconocida, en el punto de aplicación de la carga del estado reducido de Stokes, según la dirección de aplicación de esta fuerza.
- U_{lk} solución fundamental en desplazamiento.
- T_{lk} solución fundamental en tensiones.
- $C_{kl}(\xi)$ coeficiente que tendrá un valor según el punto en el que se sitúe la carga en el estado reducido de Stokes:
- $C_{kl}(\xi) = 0$, si el punto de aplicación de la carga es un punto no contenido en el dominio sobre el que se estudian los estados elastodinámicos.
- $C_{kl}(\xi) = \delta_{kl}$, si el punto de aplicación de la carga es un punto contenido en el dominio sobre el que se estudian los estados elastodinámicos.

No obstante, para poder obtener una formulación del problema en el contorno, la carga del problema reducido de Stokes debe aplicarse en puntos pertenecientes al mismo. Situándonos en dicho caso, y más concretamente en las integrales de contorno y en el punto de aplicación de la carga, los integrandos no quedarán correctamente definidos puesto que la solución fundamental presenta términos en $\frac{1}{r^2}$ y $\frac{1}{r}$. Cuando el punto sobre el que se integra coincide con el punto de aplicación de la carga, la distancia entre ellos es nula presentándose una singularidad.

Para poder solventar dicha peculiaridad, recurriremos a un proceso de paso al límite. Dicho procedimiento consiste en sustituir el contorno Γ por la unión de dos contornos: $\Gamma - \Gamma_\varepsilon$ y Γ_ε , siendo éste una porción de esfera de radio $\varepsilon \rightarrow 0$ (ver figura).

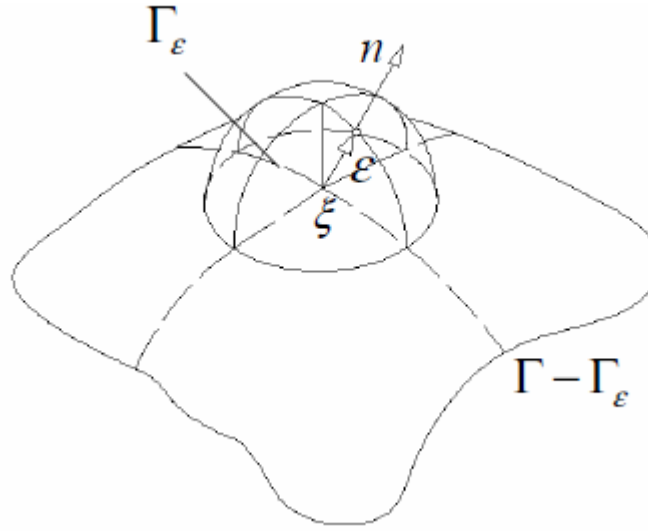


Figura 2.3. Igualdad integral en el contorno

Tomando límites en las integrales a lo largo de Γ_ε , se tiene que:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} U_{lk} \cdot t_k d\Gamma_\varepsilon = 0 \quad (2.49)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} T_{lk} \cdot u_k d\Gamma_\varepsilon = d_{lk}(\xi) \cdot u_k(\xi) \quad (2.50)$$

Donde d_{lk} es una constante cuyo valor depende de la geometría del contorno en el punto de aplicación de la carga ξ (Domínguez 1989).

Por tanto, y una vez resuelto el tema de la singularidad en el contorno, podemos concluir que la expresión de la formulación integral para puntos del contorno responde a:

$$C_{kl}(\xi) \cdot u_l(\xi) + \int_{\Gamma} T_{lk} \cdot u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{lk} \cdot t_k d\Gamma \quad (2.51)$$

Donde:

$$C_{kl}(\xi) = 1 + d_{lk}$$

Las integrales deben entenderse aplicadas a todo el contorno excepto al punto de aplicación de la carga (en el sentido del valor principal de Cauchy).

La expresión obtenida en (2.51), junto con las condiciones de contorno de un estado elastodinámico reducido concreto, conforma la formulación cerrada en el contorno, la cual se utiliza para obtener los desplazamientos y tensiones desconocidos en el contorno Γ del dominio Ω analizado.

Por otro lado, se presenta el problema de que el obtener una solución analítica para casos generales resulta imposible. Es por ello por lo que se recurre al planteamiento numérico de la expresión integral, basándose en la aplicación del Método de los Elementos de Contorno, el cual estudiaremos en próximos apartados.

2.4.2 *Formulación integral para el problema escalar. Solución fundamental armónica.*

El objetivo principal de este apartado será el de obtener una formulación integral en el contorno para problemas escalares. En este caso se estudiará el dominio Ω de un medio escalar, delimitado por el contorno Γ .

Al igual que ocurriese para el caso del medio viscoelástico, vamos a considerar dos estados dinámicos independientes aplicados sobre el dominio sometido a estudio. Para este caso, las variables fundamentales de cada estado serán la presión y su derivada. Conviene recordar la ecuación de onda de un medio escalar obtenida en apartados anteriores:

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \ddot{p}$$

Debemos de recordar que en medios escalares solamente se propagan las ondas longitudinales o principales (ondas P), lo que conlleva a que c sea la velocidad de propagación de este tipo de ondas a través del medio.

Un estado dinámico vendrá determinado por sus variables fundamentales. La presión en función de la frecuencia angular de un estado cualquiera puede escribirse como:

$$p(x, t) = p(x, \omega) \cdot e^{i\omega t} \quad (2.52)$$

Expresando la ecuación de onda de un medio escalar en el dominio de la frecuencia tenemos que:

$$\nabla^2 p + \frac{\omega^2}{c^2} \cdot p = 0 \quad (2.53)$$

A continuación consideraremos dos estados dinámicos reducidos en los que las variables tendrán dependencia espacial y frecuencial, a partir de dos estados elastodinámicos con variables dependientes de la posición y el tiempo. Seguidamente, pasamos a definir ambos estados reducidos:

Primer estado dinámico reducido S_{ω}^e , definido a través de las siguientes variables:

- $p(x, \omega)$ presión con dependencia de la posición y de la frecuencia angular.
- $\frac{\partial p}{\partial \eta}(x, \omega)$ gradiente de presión con dependencia de la posición y de la frecuencia angular.

Segundo estado dinámico reducido S_{ω}^e , definido a través de las siguientes variables:

- $p(x, \omega)$ presión con dependencia de la posición y de la frecuencia angular.
- $\frac{\partial p}{\partial \eta}(x, \omega)$ gradiente de presión con dependencia de la posición y de la frecuencia angular.

Para poder relacionar estos dos estados reducidos y obtener una formulación integral en el contorno, partiremos del segundo teorema de Green, el cual establece que:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 p \cdot p^* - p \cdot (\nabla^2 p)^*) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(p^* \cdot \frac{\partial p}{\partial \eta} - p \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial \eta} \right)^* \right) d\Gamma \quad (2.54)$$

El segundo estado se corresponde a una fuerza de excitación concentrada en un punto i del dominio, de modo que la presión y su gradiente se corresponderán con la solución fundamental y verificarán la ecuación de gobierno.

De manera análoga al caso del medio viscoelástico, nos limitaremos a exponer la solución fundamental para un medio escalar.

Así, la presión en un punto que dista r del punto de aplicación de la fuerza vendrá dado por:

$$p^* = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e^{\frac{i\omega r}{c}}}{r} \quad (2.55)$$

El flujo de presión será inmediato, derivando respecto a la normal al contorno:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \eta}\right)^* = \frac{1}{4\pi} \cdot \left(-\frac{i\omega}{c} - \frac{1}{r^2}\right) \cdot e^{\frac{i\omega r}{c}} \cdot \frac{\partial r}{\partial \eta} \quad (2.56)$$

Por otro lado, expresamos la ecuación de gobierno en el dominio de la frecuencia aplicada al estado reducido de Stockes, la cual se escribe como:

$$(\nabla p)^* + \frac{\omega^2}{c^2} \cdot p^* + \delta^i = 0 \quad (2.57)$$

Introduciendo esta expresión en (2.54), tenemos que:

$$\int_{\Omega} \left(\nabla^2 p \cdot p^* + p \cdot \frac{\omega^2}{c^2} \cdot p^* + p \cdot \delta^i \right) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(p^* \cdot \frac{\partial p}{\partial \eta} - p \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial \eta} \right)^* \right) d\Gamma \quad (2.58)$$

Reagrupando términos en el primer miembro:

$$\int_{\Omega} \left(p^* \cdot \left(\nabla^2 p + p \cdot \frac{\omega^2}{c^2} \right) + p \cdot \delta^i \right) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(p^* \cdot \frac{\partial p}{\partial \eta} - p \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial \eta} \right)^* \right) d\Gamma \quad (2.59)$$

Donde puede verse que el término entre paréntesis de la 1ª integral se corresponde con la ecuación de gobierno en el dominio de la frecuencia (2.53), la cual es igual a cero. Por tanto, se tiene que:

$$p^i + \int_{\Gamma} \left(p \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial \eta} \right)^* \right) d\Gamma = \int_{\Gamma} \left(p^* \cdot \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) d\Gamma \quad (2.60)$$

Por todos es sabido el hecho de que para que una formulación en el contorno sea viable es necesario que los puntos de aplicación de la carga pertenezcan a dicho contorno. En este caso, y al igual que sucediera para los medios viscoelásticos, se

presenta un problema de singularidad en los integrandos de las integrales extendidas al contorno (cuando el punto donde se integra coincide con el punto en el que se concentra la carga).

Debemos extraer dicha singularidad. Para ello, procederemos de la misma forma que para los casos anteriores; es decir, mediante un proceso de paso al límite se tiene que:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_e} \left(p^* \cdot \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) d\Gamma_e = 0 \quad (2.61)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_e} \left(p \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial \eta} \right)^* \right) d\Gamma_e = d_{lk}(\xi) \cdot u_k(\xi) \quad (2.62)$$

A través de dicho procedimiento podemos rescribir la expresión integral en el contorno de la siguiente manera:

$$c^i \cdot p^i + \int_{\Gamma} \left(p \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial \eta} \right)^* \right) d\Gamma = \int_{\Gamma} \left(p^* \cdot \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) d\Gamma \quad (2.63)$$

En cuya expresión, las integrales se entenderán en el sentido del valor principal de Cauchy.

Como puede verse, se trata de una expresión análoga a la obtenida para un medio viscoelástico. Sobre dichas expresiones aplicaremos el Método de los Elementos de Contorno, lo cual nos llevará a un sistema de ecuaciones algebraicas cuya resolución nos facilitará la solución aproximada al problema.

A modo de resumen, se ha obtenido la formulación integral en el contorno tanto para el problema viscoelástico como para el problema escalar. No obstante, la formulación obtenida no será aplicable desde el punto de vista de tratar de obtener una solución analítica del problema; por tanto, será necesaria la utilización de un método numérico que nos permita obtener una solución aproximada del problema. La aplicación de dicho método numérico, así como los aspectos que conlleva serán abordados en el siguiente capítulo.

3 El Método de los Elementos de Contorno

3.1 Introducción.

A lo largo del anterior capítulo hemos deducido, entre otras cosas, la formulación integral en el contorno, observándose que dicha formulación no presenta una solución analítica de garantías. Es por ello, que en el presente capítulo se ha tratado de desarrollar una metodología que permita obtener una solución aproximada al problema. Dicha metodología constituye el *Método de los Elementos de Contorno*.

El objetivo de dicho procedimiento radica en llegar a un sistema de ecuaciones algebraicas en el que las incógnitas sean tensiones y desplazamientos en los puntos del contorno de la región que se desee estudiar.

A modo de resumir todo lo que vayamos a explicar en dicho capítulo, comenzaremos describiendo la aplicación del MEC en un medio viscoelástico, para después continuar con la formulación del método en un medio escalar. Finalmente, recordaremos algunas peculiaridades del método numérico en cuestión.

3.2 Aplicación del Método de Elementos de Contorno (MEC) en un medio viscoelástico.

La primera de las condiciones que exige la aplicación de este método numérico, radica en la discretización de los contornos de los diferentes medios que conforman el dominio en elementos. Dichos elementos, a su vez, estarán formados por una serie de nodos.

Por ello, consideremos el dominio Ω , delimitado por el contorno Γ discretizado en un número de elementos (NE). Se denominará al elemento genérico por Γ_j . Así, partiremos del siguiente gráfico inicial:

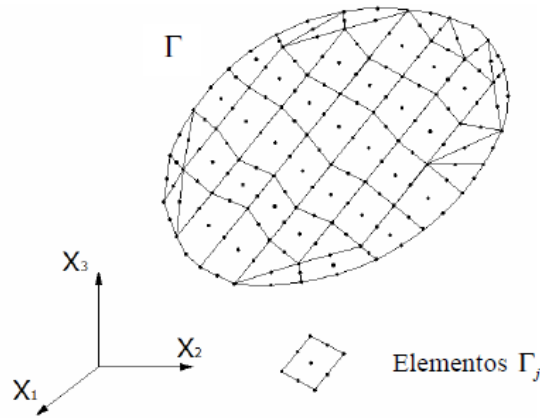


Figura 3.1. Dominio Γ discretizado en elementos Γ_j .

A modo de tratar de conocer el valor de las variables en cada elemento, recurriremos a una serie de funciones de interpolación encargadas de aproximar el valor de las variables en los nodos que forman parte del elemento.

Por lo que respecta a la geometría del contorno en el elemento, también ésta será aproximada a partir de la posición de los nodos que componen el elemento.

Así, tenemos que para un elemento genérico Γ_j , el desplazamiento en un punto perteneciente a dicho elemento viene dado por:

$$u = \Phi \cdot u^j \quad (3.1)$$

Donde:

- u vector que contiene las tres componentes del vector desplazamiento según los tres ejes cartesianos (X_1, X_2, X_3) en un punto cualquiera del elemento Γ_j .
- u^j vector que contiene las tres componentes del vector desplazamiento según los tres ejes cartesianos (X_1, X_2, X_3) para cada uno de los nodos que componen el elemento Γ_j . La dimensión de este vector será de tres veces el número de nodos que componen el elemento.
- Φ matriz que contiene las funciones de interpolación, encargadas de aproximar el valor de la variable de un punto cualquiera a partir del valor

de la propia variable en los nodos que definen el elemento. La matriz consta de tres filas, una por cada componente de la variable según los ejes coordenados, y un número de columnas que será tres veces el número de nodos que conforman el elemento Γ_j :

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & 0 & \phi_q & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & \dots & 0 & \phi_q \\ 0 & 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & 0 & \phi_q \end{pmatrix}$$

Siendo q el número de nodos del elemento Γ_j .

Del mismo modo se procede con el vector tensión, cuya expresión para un punto interior al elemento genérico viene dado por:

$$t = \Phi \cdot t^j \quad (3.2)$$

En cuyo caso los términos de la expresión tendrán una interpretación similar a los de la expresión deducida para el desplazamiento.

En último lugar, la posición de un punto interior al elemento genérico Γ_j se aproximará de la misma forma que el vector tensión y el vector desplazamiento:

$$x = \Phi \cdot x^j \quad (3.3)$$

A modo de recordatorio, vamos a introducir la formulación integral en el contorno para un medio viscoelástico deducida en el capítulo anterior. Así, si aplicamos una carga en un punto i del contorno en el estado reducido de Stockes, obtendremos la siguiente expresión:

$$c^i \cdot u^i + \int_{\Gamma} (t^* \cdot u) d\Gamma = \int_{\Gamma} (t \cdot u^*) d\Gamma \quad (3.4)$$

Aplicando esta expresión al contorno discretizado, las integrales en el contorno se transforman en sumatorios de integrales extendidas a cada elemento Γ_j . En lo que se refiere a los sumatorios, éstos recorrerán todos los elementos en los que se discretiza el contorno:

$$c^i \cdot u^i + \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} (t^* \cdot \Phi) d\Gamma_j \right\} \cdot u^j = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} (u^* \cdot \Phi) d\Gamma_j \right\} \cdot t^j \quad (3.5)$$

Donde las variables del problema en el interior de cada elemento Γ_j se han sustituido por su expresión aproximada a partir del valor en los nodos. La resolución de estas integrales se estudiará en apartados posteriores. Por ahora, nos bastará con asumir que la resolución de las mismas dará lugar a una matriz de coeficientes que multiplicará al valor de la variable en los nodos que forman parte del elemento, los cuales serán las incógnitas del problema. Resaltar que un mismo nodo podrá formar parte de varios elementos.

Si ahora desarrollásemos los sumatorios de la expresión y agrupamos los términos que multiplican a la tensión o al desplazamiento para un mismo nodo, podremos describir la ecuación anterior de la siguiente forma:

$$c^i \cdot u^i + \sum_{n=1}^{NN} \hat{H}^{in} \cdot u^n = \sum_{n=1}^{NN} \hat{G}^{in} \cdot t^n \quad (3.6)$$

Donde los términos de las matrices \hat{H}^{in} y \hat{G}^{in} pueden escribirse como:

$$\hat{H}^{in} = \sum_t \int_{\Gamma_t} T^* \cdot \phi_q d\Gamma_j \quad (3.7)$$

$$\hat{G}^{in} = \sum_t \int_{\Gamma_t} U^* \cdot \phi_q d\Gamma_j \quad (3.8)$$

Donde los sumatorios se extienden a los t elementos a los que el nodo n pertenezca. q es la numeración local del nodo en el elemento.

Como ha sucedido en ocasiones anteriores, lo que se desea es llegar a una expresión algebraica lo más compacta y simplificada posible; por ello, vamos a definir una nueva matriz H^{in} , tal que:

$$H^{in} = \hat{H}^{in} \text{ si } i \neq n \quad (3.9)$$

$$H^{in} = \hat{H}^{in} + c^i \text{ si } i = n \quad (3.10)$$

A partir de la nueva definición de H^{in} podemos agrupar el primer miembro de la ecuación en:

$$\sum_{n=1}^{NN} H^{in} \cdot u^n = \sum_{n=1}^{NN} G^{in} \cdot t^n \quad (3.11)$$

La expresión anterior, para el caso específico en el que el nodo pertenezca a una discretización cualquiera, dará lugar a tres ecuaciones algebraicas. Si esto se produce para los n nodos de la discretización del contorno, obtendremos un sistema de $3n$ ecuaciones algebraicas, el cual podrá escribirse como:

$$H \cdot u = G \cdot t \quad (3.12)$$

Será en este sistema de ecuaciones donde se introducirán las condiciones de contorno. La resolución del problema en el contorno, implicará la obtención de las matrices H y G , así como la resolución de un sistema de ecuaciones algebraicas, quedando el problema totalmente planteado.

3.3 Aplicación del Método de Elementos de Contorno (MEC) en un medio escalar.

Volvemos a partir de la situación anterior, considerando un dominio cualquiera Ω de un medio escalar, delimitado por el contorno Γ y discretizado éste en un total de NE. Llamaremos Γ_j a un elemento genérico. Finalmente, cada elemento estará formado por un determinado número de nodos que dependerá del tipo de elemento usado.

Para este tipo de problemas concretos, las variables fundamentales serán la presión y el flujo. Éstas se aproximarán mediante funciones de interpolación a partir del valor de la variable en los nodos de cada elemento. La presión en un punto del elemento Γ_j se aproximará como:

$$p = \Phi \cdot p^j \quad (3.13)$$

Donde:

- \mathbf{p}^j vector que contiene el valor de la variable en los nodos que forman parte del elemento Γ_j .
- Φ vector de funciones de aproximación o funciones de forma:

$$\Phi = [\phi_1, \phi_2 \dots \phi_q]$$

Siendo q el último nodo que forma parte del elemento Γ_j .

El flujo en un punto del contorno se aproxima de la forma:

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = \Phi \cdot \frac{\partial p}{\partial \eta} \Big|_j \quad (3.14)$$

Por lo que se refiere a la geometría del contorno, también ésta se aproximará mediante las funciones de forma. La posición de un punto del interior del elemento Γ_j en función de la posición de los nodos que conforman dicho elemento es:

$$\chi = \Phi \cdot \chi^j \quad (3.15)$$

Donde:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & 0 & \phi_q & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & \dots & 0 & \phi_q \\ 0 & 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & 0 & \phi_q \end{pmatrix}$$

Conviene ahora recordar la expresión de la formulación integral en el contorno para medios escalares deducida en capítulos anteriores:

$$c^i \cdot p^i + \int_{\Gamma} \left(p \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial \eta} \right)^* \right) d\Gamma = \int_{\Gamma} \left(p^* \cdot \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) d\Gamma \quad (3.16)$$

Donde i es un punto perteneciente al contorno sobre el cual se aplicará la carga. Al discretizar el contorno en elementos, las integrales se convierten en sumatorios a lo largo de todos los elementos extendidas a cada uno de ellos. Las variables en el interior del elemento se sustituyen por su valor aproximado, llegándose a:

$$c^i \cdot p^i + \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \left[\frac{\partial p}{\partial \eta} \right]^* \cdot \Phi \right\} d\Gamma_j p^j = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} [p^* \cdot \Phi] d\Gamma_j \right\} \frac{\partial p}{\partial \eta} \Big|_j^j \quad (3.17)$$

Se pueden agrupar los términos que multiplican a la variable correspondiente a un mismo nodo, teniéndose que:

$$c^i \cdot p^i + \sum_{n=1}^{NN} \hat{H}^{in} \cdot p^n = \sum_{n=1}^{NN} G^{in} \cdot \frac{\partial p}{\partial \eta} \Big|_n^n \quad (3.18)$$

Donde puede verse que los sumatorios se extienden a todos los nodos que forman parte del contorno discretizado. Por otro lado, los términos de las matrices \hat{H}^{in} y G^{in} pueden escribirse como:

$$\hat{H}^{in} = \sum_t \int_{\Gamma_j} \left[\frac{\partial p}{\partial \eta} \right]^* \cdot \phi_q d\Gamma_j \quad (3.19)$$

$$G^{in} = \sum_t \int_{\Gamma_j} p^* \cdot \phi_q d\Gamma_j \quad (3.20)$$

Como puede observarse, el proceso es idéntico al seguido para el caso de un medio viscoelástico. A continuación, definimos la matriz \hat{H}^{in} , tal que:

$$H^{in} = \hat{H}^{in} \text{ si } i \neq n$$

$$H^{in} = \hat{H}^{in} + c^i \text{ si } i = n$$

Particularizando (3.18) para cada uno de los nodos pertenecientes al contorno, de modo que se trate de hacer variar el nodo de aplicación de la carga a cada uno de los nodos del contorno, obtendremos un sistema de ecuaciones algebraicas igual al número de nodos. Este sistema puede escribirse como:

$$H \cdot p = G \cdot \frac{\partial p}{\partial \eta} \quad (3.21)$$

Ahora trataremos de expresar (3.21) en función del movimiento normal al contorno, teniéndose que:

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = \rho \cdot \omega^2 \cdot w$$

Siendo:

- w el movimiento normal al contorno.
- ω la frecuencia angular.
- ρ la densidad del medio escalar considerado.

Esto implicará que definamos una nueva matriz $G^w = G \cdot \rho \cdot \omega^2$, por lo que la ecuación (3.21) quedará de la siguiente manera:

$$H \cdot p = G^w \cdot w \quad (3.22)$$

La aplicación de las condiciones de contorno para cada nodo, las cuales podrán ser el valor de la presión en dicho punto o del desplazamiento normal en el mismo, nos conducirá a un sistema de N ecuaciones con N incógnitas.

3.4 Acoplamiento entre regiones.

Tras haber obtenido la formulación del MEC tanto para medios viscoelásticos como para medios escalares, estudiaremos el modo de acoplamiento de ambas formulaciones en un contorno que sea interfase entre los dominios de los diferentes medios analizados, ya sea viscoelástico-viscoelástico, escalar-escalar o viscoelástico-escalar.

Para ello se tendrán en cuenta dos dominios Ω_1 y Ω_2 , así como tres contornos:

- Γ_1 que delimita al dominio Ω_1 .
 - Γ_2 que es el contorno de interfase entre ambos dominios.
 - Γ_3 que delimita al dominio Ω_2 .
-

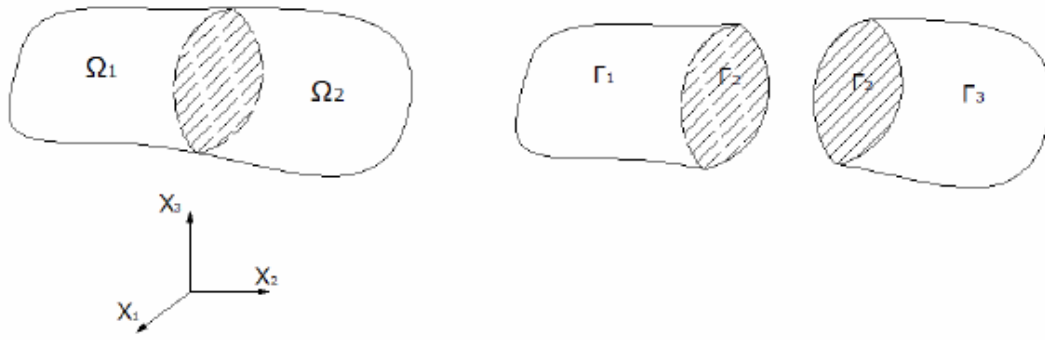


Figura 3.2. Contorno interfase entre dos dominios.

3.4.1 Interfase viscoelástico-viscoelástico.

Para llevar a cabo dicho estudio, hemos de considerar un ejemplo que nos sirva de aplicación. En este caso, recurriremos a un contorno de interfase entre una estructura de contención de aguas (presa) y el suelo sobre el que se sitúa dicha estructura.

Desarrollando el sistema de ecuaciones correspondiente a cada dominio, se puede escribir para cada uno que:

$$H_1^1 \cdot u_1^1 + H_2^1 \cdot u_2^1 = G_1^1 \cdot t_1^1 + G_2^1 \cdot t_2^1 \quad (3.23)$$

$$H_2^2 \cdot u_2^2 + H_3^2 \cdot u_3^2 = G_2^2 \cdot t_2^2 + G_3^2 \cdot t_3^2 \quad (3.24)$$

Expresiones donde los subíndices hacen referencia al contorno y los superíndices al dominio.

Cabe reseñar que entre ambos dominios deben cumplirse las ecuaciones de compatibilidad y equilibrio en el contorno de interfase, que se expresan como:

Compatibilidad de los vectores desplazamiento:

$$u_2^1 = u_2^2 = u_2 \quad (3.25)$$

Equilibrio entre los vectores tensión:

$$t_2^1 = -t_2^2 = t_2 \quad (3.26)$$

Aplicando lo anterior, podemos escribir un sistema de ecuaciones global:

$$\begin{bmatrix} H_1^1 & H_2^1 & 0 \\ 0 & H_2^2 & H_3^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2 \\ u_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1^1 & G_2^1 & 0 \\ 0 & G_2^2 & G_3^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_1^1 \\ t_2 \\ t_3^2 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

3.4.2 Interfase escalar-escalar.

Para este caso en concreto, Ω_1 y Ω_2 serán medios escalares. Desarrollando el sistema de ecuaciones correspondiente a cada dominio:

$$H_1^1 \cdot p_1^1 + H_2^1 \cdot p_2^1 = G_1^1 \cdot w_1^1 + G_2^1 \cdot w_1^1 + G_2^1 \cdot w_2^1 \quad (3.28)$$

$$H_2^2 \cdot p_2^2 + H_3^2 \cdot p_3^2 = G_2^2 \cdot w_2^2 + G_3^2 \cdot w_3^2 \quad (3.29)$$

Por lo que respecta a las ecuaciones de compatibilidad y equilibrio, éstas se expresarán como:

- Compatibilidad en desplazamientos:

$$w_2^1 = -w_2^2 = w_2 \quad (3.30)$$

Equilibrio de presiones:

$$p_2^1 = p_2^2 = p_2 \quad (3.31)$$

Quedando el sistema de ecuaciones global tal y como sigue:

$$\begin{bmatrix} H_1^1 & H_2^1 & 0 \\ 0 & H_2^2 & H_3^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1^1 \\ p_2 \\ p_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1^1 & G_2^1 & 0 \\ 0 & G_2^2 & G_3^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1^1 \\ w_2 \\ w_3^2 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

3.4.3 Interfase viscoelástico-escalar.

Este tipo de interfase es el que más dificultades presenta. A modo de clarificar un poco todo lo explicado, vamos a pensar en el caso de un contorno de interfase existente entre una presa y el agua embalsada.

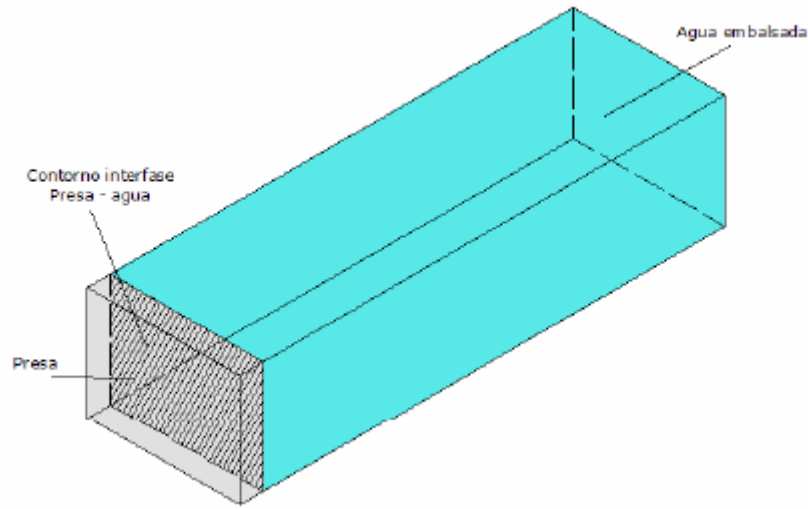


Figura 3.3. Contorno interfase entre estructura de contención y el agua embalsada.

La resolución de este caso presenta la particularidad de tener seis incógnitas por nodo $(u_x, u_y, u_z, t_x, t_y, t_z)$ pertenecientes al contorno del sólido (estructura de contención), y dos incógnitas por nodo (p, ω) como pertenecientes al medio escalar (agua embalsada). Aplicando el MEC tanto al medio viscoelástico como al medio escalar, dará como resultado el sistema de ecuaciones que se expone a continuación:

$$H_1^1 \cdot u_1^1 + H_2^1 \cdot u_2^1 = G_1^1 \cdot t_1^1 + G_2^1 \cdot t_2^1 \quad (3.33)$$

$$H_2^2 \cdot p_2^2 + H_3^2 \cdot p_3^2 = G_2^2 \cdot w_2^2 + G_3^2 \cdot w_3^2 \quad (3.34)$$

Donde Ω_1 se corresponde con el medio viscoelástico y Ω_2 se corresponde con el medio escalar.

Las ecuaciones de compatibilidad y equilibrio en el contorno de interfase presentan la dificultad añadida de relacionar las variables que definen a ambos medios. Por lo que respecta a la condición de compatibilidad de desplazamientos en la interfase, ésta se manifestará de modo que el movimiento normal deba ser igual tanto para el medio viscoelástico como para el medio escalar. Así, si η_x , η_y y η_z son los cosenos directores de la normal al contorno del líquido, tal condición se establece como:

$$w = u_x \cdot \eta_x + u_y \cdot \eta_y + u_z \cdot \eta_z \quad (3.35)$$

Por lo que respecta al equilibrio, éste se expresa en la interfase como la igualdad entre la tensión normal al contorno del sólido y la presión en el líquido, añadiéndose la ausencia de tensión tangencial en la interfase. Esto se traduce en:

$$t_x = p \cdot \eta_x \quad (3.36)$$

$$t_y = p \cdot \eta_y \quad (3.37)$$

$$t_z = p \cdot \eta_z \quad (3.38)$$

Mediante el uso de las expresiones que hacen referencia tanto al equilibrio como a la compatibilidad de desplazamientos, será viable expresar cuatro incógnitas en función de las otras cuatro, quedando p, u_x, u_y y u_z como las incógnitas de la interfase.

Ahora introduciremos estas expresiones tanto en (3.33) como en (3.34) con el fin de poder obtener un sistema de ecuaciones global para este tipo de interfase.

Comenzaremos por la expresión referida al dominio Ω_1 , introduciendo para cada nodo del contorno Γ_2 las expresiones referidas al equilibrio (3.36), (3.37) y (3.38), de modo que:

$$H_1^1 \cdot u_1^1 + H_2^1 \cdot u_2^1 = G_1^1 \cdot t_1^1 + G_2^1 \cdot \begin{bmatrix} p_1 \cdot \eta_x \\ p_1 \cdot \eta_y \\ p_1 \cdot \eta_z \\ \vdots \\ p_n \cdot \eta_x \\ p_n \cdot \eta_y \\ p_n \cdot \eta_z \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Siendo n el número de nodos del contorno interfase. Podemos, no obstante, reorganizar la expresión y definir una nueva matriz G_2^{12} , en la que cada término es la suma de los términos que multiplican al mismo valor de la presión por la componente del vector normal correspondiente:

$$G_2^{12}{}_{ij} = \sum_{k=1}^3 G_2^1{}_{i,3j-3+k} \cdot \eta_k \quad (3.40)$$

La nueva matriz tiene unas dimensiones de $3(n_1 + n_2) \times n_2$, siendo n_1 y n_2 el número de nodos de los contornos 1 y 2 respectivamente; por tanto, el sistema puede describirse como:

$$H_1^1 \cdot u_1^1 + H_2^1 \cdot u_2^1 = G_1^1 \cdot t_1^1 + G_2^{12} \cdot p_2^2 \quad (3.41)$$

Ahora nos centraremos en la expresión referida al dominio Ω_2 . Al igual que sucediera antes, sustituiremos para cada nodo del contorno Γ_2 , la expresión correspondiente a la compatibilidad en desplazamientos, obteniéndose el siguiente resultado:

$$H_2^2 \cdot p_2^2 + H_3^2 \cdot p_3^2 = G_2^2 \cdot \begin{bmatrix} u_{x1} \cdot \eta_x & u_{y1} \cdot \eta_y & u_{z1} \cdot \eta_z \\ \vdots & & \\ u_{xn} \cdot \eta_x & u_{yn} \cdot \eta_y & u_{zn} \cdot \eta_z \end{bmatrix} + G_3^2 \cdot w_3^2 \quad (3.42)$$

También podemos definir una nueva matriz G_2^{21} en la que el número de columnas será tres veces mayor a la matriz de la que proviene. Entendiendo un poco dicha matriz, las tres columnas de la primera fila se corresponden con el primer valor de la matriz primitiva multiplicado por cada uno de los cosenos directores de la normal. Lo mismo sucederá con el resto de elementos; por tanto, cada término de la nueva matriz podrá escribirse como:

$$G_2^{21}{}_{ij} = G_2^2{}_{ij} \cdot \eta_k \quad (3.43)$$

Por lo que respecta a la dimensión de la nueva matriz, ésta obedecerá a la siguiente expresión:

$$(n_2 + n_3) \times 3 \cdot n_2$$

El sistema de ecuaciones para el dominio del medio escalar, una vez introducida G_2^{21} , queda como:

$$H_2^2 \cdot p_2^2 + H_3^2 \cdot p_3^2 = G_2^{21} \cdot u_2 + G_3^2 \cdot w_3^2 \quad (3.44)$$

Finalmente partiremos de las expresiones deducidas para ambos medios (viscoelástico y escalar) durante este apartado para tratar de obtener el sistema de ecuaciones global, el cual quedará como:

$$\begin{matrix} 3(n_1 + n_2) \\ (n_1 + n_2) \end{matrix} \begin{bmatrix} \overbrace{\widetilde{H}_1^1}^{3n_1} & \overbrace{H_2^1}^{3n_2} & \overbrace{-G_2^{12}}^{n_2} & \overbrace{0}^{n_3} \\ 0 & -G_2^{21} & H_2^2 & H_3^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G_1^1] \cdot \{t_1\} \\ [G_3^2] \cdot \{t_2\} \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Donde quedan indicadas las dimensiones de las matrices, siendo n_1, n_2, n_3 el número de nodos de los contornos $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ respectivamente.

3.5 Aspectos relacionados con la aplicación del MEC.

3.5.1 Tipos de elementos de contorno.

A continuación trataremos de definir los tipos de elementos que van a ser usados en los modelos correspondientes a los problemas que se sometan a estudio. Únicamente dispondremos de dos tipos:

- Elementos cuadráticos cuadriláteros de nueve nodos.
- Elementos cuadráticos triangulares de seis nodos.

Dichos elementos serán representados a continuación. Por lo que respecta a la numeración de los nodos, ésta se realizará tal y como se indica en la figura, con la finalidad de que se defina la normal saliendo del plano del papel; resulta esto último ser un aspecto importante a la hora de definir los elementos con los que discretizar un contorno determinado.

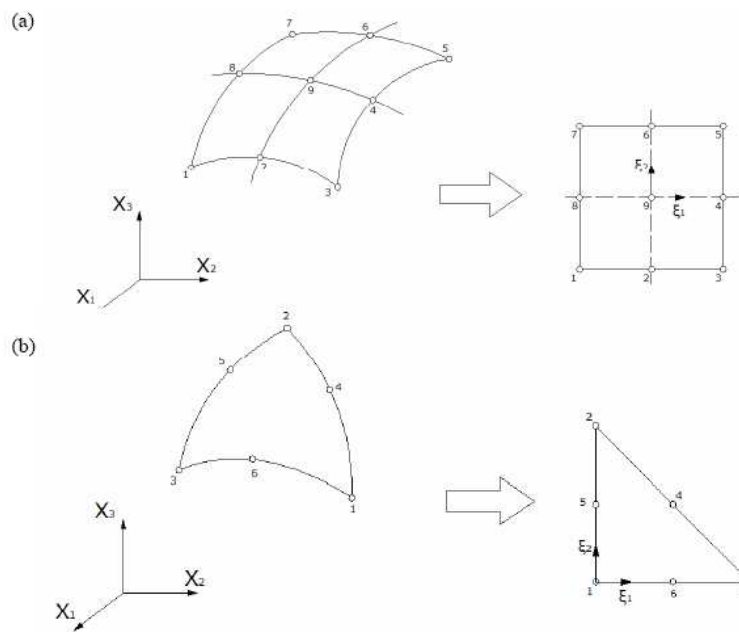


Figura 3.4.a Elemento cuadrático cuadrilátero en el dominio cartesiano 3-D y en el dominio transformado.

Figura 3.4.b Elemento cuadrático triangular en el dominio cartesiano 3-D y en el dominio transformado.

La geometría del elemento se aproxima por medio de unas funciones de interpolación, también llamadas *funciones de forma*, a partir de la posición de los nodos que forman parte del elemento. Las variables del problema en el interior del mismo, también se aproximarán mediante estas funciones de forma a partir del valor que toma la variable en los nodos del elemento. Ahora, mostraremos las funciones de forma para cada uno de los tipos de elemento utilizados en función de las coordenadas naturales ξ_1 y ξ_2 :

Para elementos cuadriláteros, las funciones de forma en función de ξ_1 ($-1 \leq \xi_1 \leq 1$ y $-1 \leq \xi_2 \leq 1$) son:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \frac{1}{4} \cdot \xi_1 \cdot (\xi_1 - 1) \cdot \xi_2 \cdot (\xi_2 - 1) & \phi_2 &= \frac{1}{2} \cdot (1 - \xi_1^2) \cdot \xi_2 \cdot (\xi_2 - 1) \\ \phi_3 &= \frac{1}{4} \cdot \xi_1 \cdot (\xi_1 + 1) \cdot \xi_2 \cdot (\xi_2 - 1) & \phi_4 &= \frac{1}{2} \cdot \xi_1 \cdot (\xi_1 + 1) \cdot (1 - \xi_2^2) \\ \phi_5 &= \frac{1}{4} \cdot \xi_1 \cdot (\xi_1 + 1) \cdot \xi_2 \cdot (\xi_2 + 1) & \phi_6 &= \frac{1}{2} \cdot (1 - \xi_1^2) \cdot \xi_2 \cdot (\xi_2 + 1) \\ \phi_7 &= \frac{1}{4} \cdot \xi_1 \cdot (\xi_1 - 1) \cdot \xi_2 \cdot (\xi_2 + 1) & \phi_8 &= \frac{1}{2} \cdot \xi_1 \cdot (\xi_1 - 1) \cdot (1 - \xi_2^2) \\ \phi_9 &= (1 - \xi_1^2) \cdot (1 - \xi_2^2)\end{aligned}\tag{3.46}$$

Para elementos triangulares, las funciones de forma en función de ξ_1 ($0 \leq \xi_1 \leq 1$ y $0 \leq \xi_2 \leq 1 - \xi_1$) son:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \xi_1 \cdot (2\xi_1 - 1) & \phi_2 &= \xi_2 \cdot (2\xi_2 - 1) \\ \phi_3 &= \xi_3 \cdot (2\xi_3 - 1) & \phi_4 &= 4 \cdot \xi_1 \cdot \xi_2 \\ \phi_5 &= 4 \cdot \xi_2 \cdot \xi_3 & \phi_6 &= 4 \cdot \xi_1 \cdot \xi_3\end{aligned}\tag{3.47}$$

Estas funciones de forma permiten aproximar de forma cuadrática la superficie del contorno en X_1, X_2, X_3 . De la misma manera, aproximan las variables del problema en puntos internos al elemento.

3.5.2 Evaluación de las integrales en el contorno. Singularidades.

Primeramente, recordar el hecho de que al aplicar el MEC sobre las ecuaciones integrales del contorno obteníamos una formulación expresada en sumatorios de integrales extendidas a los elementos de contorno. Dicho expresión particularizada para medios viscoelásticos, toma la siguiente forma:

$$c^i \cdot u^i + \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} [t^* \cdot \Phi] d\Gamma_j \right\} u^j = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} [u^* \cdot \Phi] d\Gamma_j \right\} t^j \quad (3.48)$$

Dando un paso más en la ecuación, podríamos describirla de la siguiente manera:

$$c^i \cdot u^i + \sum_{n=1}^{NN} \hat{H}^{in} \cdot u^n = \sum_{n=1}^{NN} G^{in} \cdot t^n \quad (3.49)$$

Donde los términos de las matrices son:

$$\hat{H}^{in} = \sum_t \int_{\Gamma_t} T^* \cdot \phi_q d\Gamma_j \quad (3.50)$$

$$G^{in} = \sum_t \int_{\Gamma_t} U^* \cdot \phi_q d\Gamma_j \quad (3.51)$$

Siendo t el número de elementos a los que el nodo n pertenece y q su posición local en el elemento; por otro lado, estas integrales son las que se deberán evaluar en cada uno de los elementos Γ_j en los que se ha discretizado el dominio.

Los términos de las matrices deducidas arriba se pueden obtener cuando el nodo n es diferente al nodo i de aplicación de la carga. Para ello, se evaluarán numéricamente las integrales usando una cuadratura gaussiana estándar sobre elementos rectangulares. Dichas cuadraturas vendrán expresadas en función de las coordenadas naturales ξ_1 ($-1 \leq \xi_1 \leq 1$) y ξ_2 ($-1 \leq \xi_2 \leq 1$), lo cual exige la transformación de las variables geométricas que aparecen en las integrales originales a las coordenadas naturales.

El diferencial $d\Gamma$ puede expresarse como:

$$d\Gamma = \left| \frac{\partial r}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial r}{\partial \xi_2} \right| \cdot \partial \xi_1 \cdot \partial \xi_2 = |J_A| \cdot \partial \xi_1 \cdot \partial \xi_2 \quad (3.52)$$

Siendo $|J_A|$ el jacobiano de la transformación:

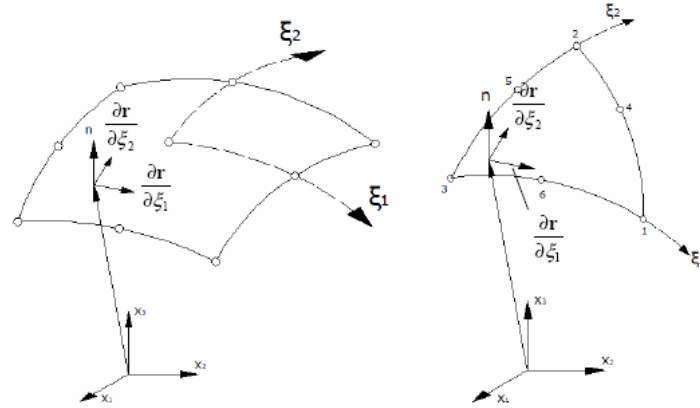


Figura 3.5. Transformación de coordenadas para integración numérica.

Según nos aproximamos a la geometría del contorno se tiene que:

$$\frac{\partial r}{\partial \xi_k} = \frac{\partial x}{\partial \xi_k} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_k} \cdot x^j \quad (3.53)$$

Por lo que el jacobiano viene dado por:

$$\left| \frac{\partial r}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial r}{\partial \xi_2} \right| = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{Bmatrix} \quad (3.54)$$

$$|J_A| = \sqrt{g_1^2 + g_2^2 + g_3^2} \quad (3.55)$$

Las componentes del vector normal en cada punto vienen dadas por:

$$n_k = \frac{g_k}{|J_A|} \quad (3.56)$$

Expresando la derivada de r respecto a la normal en el contorno:

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial r}{\partial x_k} \cdot n_k \quad (3.57)$$

Por tanto, las integrales a evaluar en función de las coordenadas naturales del elemento pueden escribirse de la siguiente manera:

$$\hat{H}^{in} = \int_{\xi_1} \int_{\xi_2} T^* \cdot \phi_q \cdot |J_A| \cdot d\xi_1 \cdot d\xi_2 \quad (3.58)$$

$$G^{in} = \int_{\xi_1} \int_{\xi_2} U^* \cdot \phi_q \cdot |J_A| \cdot d\xi_1 \cdot d\xi_2 \quad (3.59)$$

Cuando el punto de colocación i forma parte del elemento j sobre el que se integra, los núcleos T^* y U^* presenta singularidades de tipo $O\left(\frac{1}{r}\right)$ y $O\left(\frac{1}{r^2}\right)$ en los términos tratados anteriormente. Quiere decir esto que en los términos de las matrices \hat{H}^{in} y G^{in} para los que $i = n$, se tiene que:

$$\hat{H}^{in} = \sum_t \int_{\Gamma_t} T^* \cdot \phi_q d\Gamma_j \quad (3.60)$$

$$G^{in} = \sum_t \int_{\Gamma_t} U^* \cdot \phi_q d\Gamma_j \quad (3.61)$$

Para llevar a cabo el tratamiento de los términos débilmente singulares $O\left(\frac{1}{r}\right)$ se deberá seguir un procedimiento que consista en buscar un nuevo sistema de referencia donde el subintegrando sea regular. Para ello, el jacobiano entre este sistema de referencia y el sistema de coordenadas homogéneo ha de ser $O(r)$. Este procedimiento puede ser consultado para elementos cuadriláteros mediante Aznárez (2002) y para elementos triangulares mediante Domínguez (1993). Este tipo de estrategias fueron expuestas por primera vez por Lachat y Watson (1976), siendo revisadas posteriormente por Li *et al.* (1985), Telles (1987) y Cerrolaza y Alarcón (1989).

Por lo que respecta a los términos fuertemente singulares, existen procedimientos indirectos (no muy rigurosos) y directos para afrontar el problema, así como una amplia bibliografía al respecto. Por lo que respecta a los procedimientos indirectos, no existe un procedimiento general indirecto, puesto debe de estudiarse de forma independiente la estrategia a seguir para cada problema concreto.

El procedimiento directo a seguir para la evaluación de este tipo de términos, se fundamenta en el hecho de considerar que la singularidad es realmente ficticia, puesto

que dicha singularidad se desvanece con la contribución de los elementos adyacentes. Para tratar de realizar un estudio en profundidad del procedimiento, puede consultarse Aznárez (2002), Chirino *et al.* (2000) y Cruse (1969).

3.6 Duplicación de nodos en los bordes angulosos. Problema de esquina.

Hasta ahora se ha estudiado la formulación del MEC para problemas armónicos, evaluando las integrales en cada elemento. Una vez dado este paso y acopladas las diferentes regiones que forman parte del modelo, imponiendo las condiciones de contorno, se ha llegado a un sistema de ecuaciones algebraicas.

Un aspecto que añade un grado de complejidad al montaje de la matriz global del sistema, radica en la situación de unión de dos contornos con borde anguloso, como se muestra en la figura:

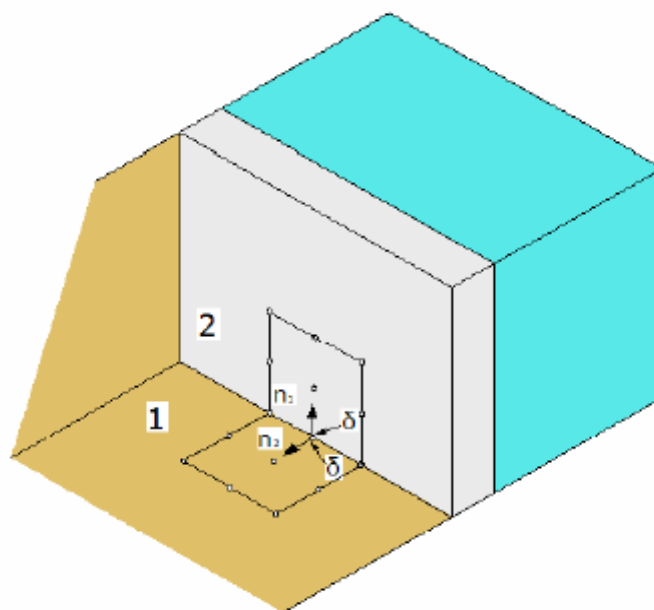


Figura 3.6. Borde anguloso en un problema de una estructura de contención de aguas plana situada en un cañón de sección rectangular.

Por lo que respecta a las variables derivadas (tensiones en un medio viscoelástico y flujo de presiones en un medio escalar), éstas presenta discontinuidad en

los nodos del borde, debido a que como un mismo nodo pertenece a elementos de contornos diferentes hará que las normales también lo sean.

Para poder llevar a cabo el montaje de la matriz global del problema, se deberá adoptar una estrategia de duplicación de los nodos en el borde de unión entre contornos, donde se ubica el problema. La primera consecuencia es que el número de grados de libertad del problema ha aumentado; no obstante, esto no constituye un problema importante en nuestro modelo puesto que el número de nodos utilizados en la discretización es elevado con respecto al número de nodos en los que se presenta el problema de borde anguloso. La duplicación de nodos en el borde se efectúa de acuerdo a la figura siguiente, prestando especial interés en el nodo central del borde del elemento sobre el que nos vamos a centrar:

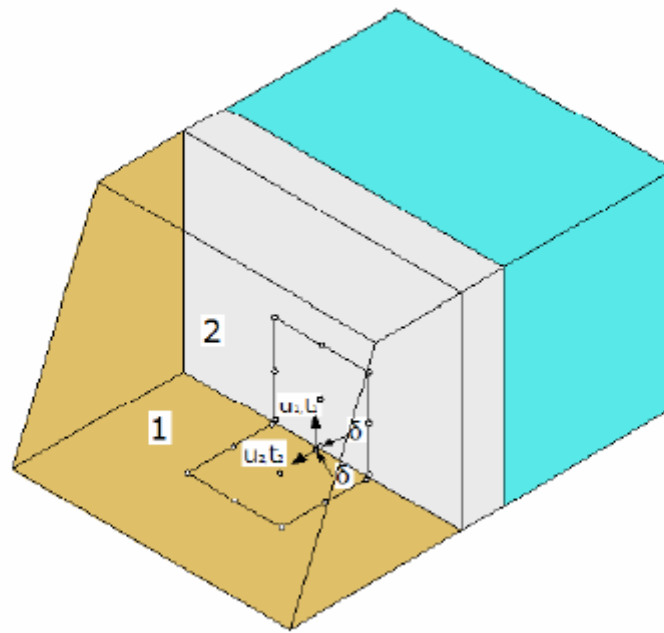


Figura 3.7. Duplicación de los nodos en los bordes angulosos. Se plantea el problema en una estructura de contención de aguas plana situada en un cañón de sección rectangular.

Primeramente llamaremos *nodo 1* al nodo duplicado perteneciente al elemento del contorno 1 y *nodo 2* al perteneciente al elemento del contorno 2. Al duplicar el nodo las incógnitas también se duplican; por tanto, para el caso de un medio viscoelástico tendremos las siguientes incógnitas: u_1 , u_2 , t_1 y t_2 . Si se desarrollan las

ecuaciones del MEC para los contornos implicados en la imagen y se evalúan las integrales numéricamente, llegaremos a un sistema de ecuaciones en el que las expresiones correspondientes a la carga concentrada en los nodos duplicados 1 y 2 puede expresarse de forma matricial como:

$$h_{11} \cdot u_1 + h_{12} \cdot u_2 - g_{11} \cdot t_1 - g_{12} \cdot t_2 + \dots = f_1 \quad (3.62)$$

$$h_{21} \cdot u_1 + h_{22} \cdot u_2 - g_{21} \cdot t_1 - g_{22} \cdot t_2 + \dots = f_2 \quad (3.63)$$

El siguiente paso será el de centrar el estudio de estas dos ecuaciones para las diversas situaciones que puedan darse a la hora de la imposición de las condiciones de contorno, viéndose afectados los nodos duplicados en cuestión.

Inicialmente se considerará que las condiciones de contorno vienen impuestas en términos de tensión en ambos contornos (t_1 y t_2). En dicho caso, el vector desplazamiento podrá determinarse sin mayor inconveniente a partir del sistema de ecuaciones planteado anteriormente.

Otra de las posibles situaciones que pudieran darse en lo que a imposición de condiciones de contorno se refiere, radica en el hecho de conocer el vector tensión para el nodo perteneciente al contorno 1 (t_1) y el vector desplazamiento correspondiente al contorno 2 (u_2) o viceversa; es decir, que se conozca el desplazamiento en el contorno 1 y la tensión en el contorno 2. En ambos casos, el valor de las incógnitas podrá obtenerse a través de la resolución del sistema de ecuaciones.

El problema se nos manifiesta cuando las condiciones de contorno vienen impuestas en términos de desplazamiento para ambos contornos (u_1 y u_2). En este caso concreto, la sustitución de las condiciones de contorno en el sistema de ecuaciones nos conducirá a dos expresiones idénticas, provocando que el sistema de ecuaciones a resolver sea singular. Esto se conoce con el nombre de *problema de esquina*. Dicho problema puede presentarse en cualquier esquina que forme parte de contornos interfase en algunos casos de interacción entre regiones de distinta naturaleza.

La técnica a emplear para solucionar este tipo de problema será la de la colocación no nodal, la cual consiste en la sustitución de una de las ecuaciones (o

ambas) ((3.62) y (3.63)) por otra en la que el punto de colocación se encuentre ligeramente desplazado. Así, el punto de colocación no coincide con ningún nodo de la discretización, provocando que los coeficientes del sistema sean ligeramente diferentes y el sistema de ecuaciones resultante no sea singular. Ver Aznárez (2002).

3.7 Solución al problema de un semiespacio de geometría arbitraria acoplado a una estructura y excitado con ondas (Sh, Sv, P ó Rayleigh).

Para poder llevar a cabo la solución a este problema, consideraremos el caso de un semiespacio acoplado a una estructura, tal y como se muestra en la siguiente figura:

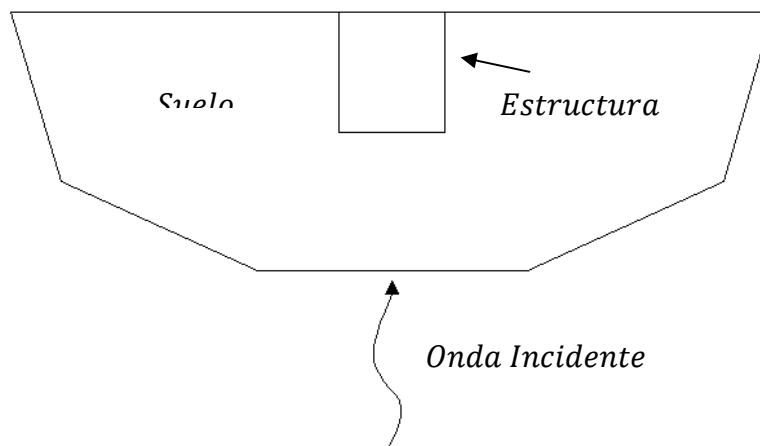


Figura 3.8. Semiespacio de geometría arbitraria acoplado a una estructura.

Seguidamente llamaremos u_1 y t_1 a los campos de desplazamientos y tensiones que son solución al problema del semiespacio de geometría variable acoplado a una estructura excitado por un campo incidente de ondas ($Sh, Sv, P, Rayleigh$). Dichas soluciones serán consideradas como la superposición de dos problemas:

u_s y t_s que se corresponden con los campos de desplazamiento y tensión que son solución al problema del semiespacio elástico plano (sin presencia de la estructura).

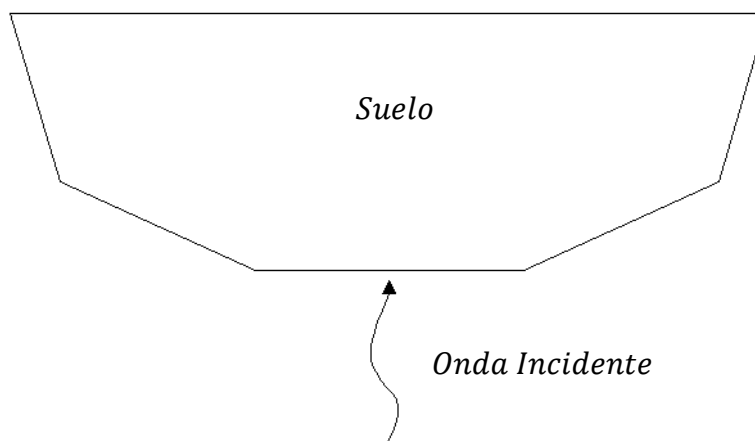


Figura 3.9. Problema correspondiente al semiespacio elástico plano.

u_d y t_d que se corresponden con los campos de desplazamiento y tensión producto de la distorsión provocada por las irregularidades de la superficie del semiespacio y el acoplamiento de la estructura al problema del semiespacio elástico plano.

Por tanto, la solución del campo de desplazamientos y tensiones en cada punto del dominio del problema objeto de estudio puede escribirse como:

$$\begin{aligned} u_t &= u_s + u_d \\ t_t &= t_s + t_d \end{aligned} \quad (3.64)$$

Planteando el teorema de reciprocidad sobre u_d y t_d para, posteriormente, aplicar el MEC a la formulación integral obtenida siguiendo los procedimientos descritos con anterioridad, nos conducirá a la siguiente expresión matricial:

$$H \cdot u_d = G \cdot t_d \quad (3.65)$$

Operando adecuadamente con las expresiones de u_t y t_t sobre la expresión matricial, podremos volver a describir dicha expresión en función de los campos de desplazamiento y tensión que son la solución al problema objeto de estudio. Así, se tiene que:

$$H \cdot (u_t - u_s) = G \cdot (t_t - t_s) \quad (3.66)$$

Reordenando los términos de dicha expresión:

$$H \cdot u_t - G \cdot t_t = H \cdot u_s - G \cdot t_s \quad (3.67)$$

El lado derecho de la ecuación es totalmente conocido. La resolución de este sistema de ecuaciones proporcionará la solución total a los campos de desplazamiento y tensión del problema de un semiespacio con geometría arbitraria y excitado mediante una onda sísmica.

4 Ecuaciones de propagación de las ondas sísmicas

4.1 Introducción.

A lo largo de este capítulo, trataremos de introducir las ecuaciones que gobiernan el fenómeno de la propagación para cada una de las ondas que componen un terremoto. Más concretamente, nos centraremos en la primera parte del capítulo en deducir dichas expresiones para el caso en el que el plano de propagación se encuentra situado perpendicularmente al plano de simetría de la estructura; la segunda parte del capítulo centrará el estudio en la deducción de dichas ecuaciones cuando el plano de propagación de las ondas tiene un carácter general; es decir, puede incidir sobre el plano de simetría de la estructura desde cualquier ángulo que se considere.

4.2 Onda SH

Partimos de un gráfico inicial, en el cual constataremos la incidencia y reflejo de una onda SH sobre una estructura de contención de aguas (presa). Así, tenemos que:

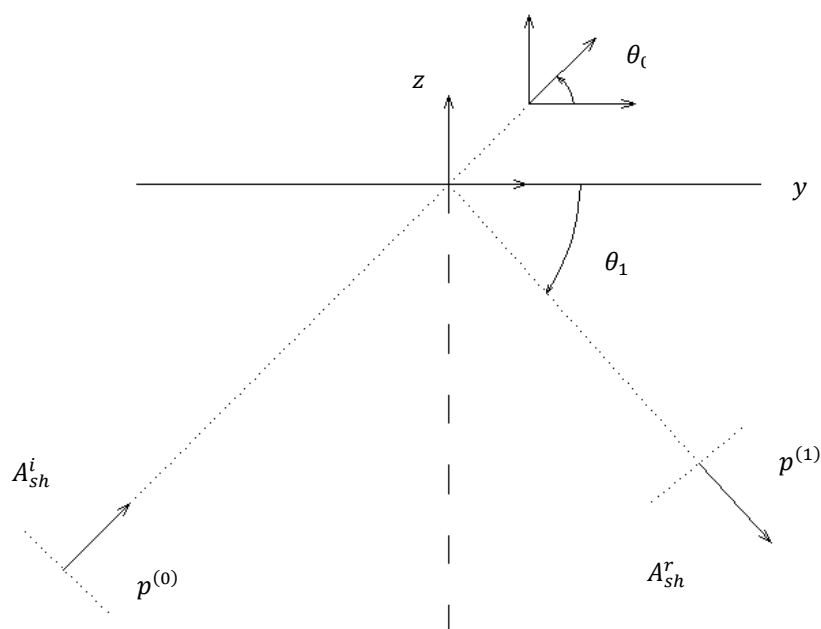


Figura 4.1. Gráfico explicativo para onda SH incidente

Una vez realizado el gráfico, introducimos las componentes de los vectores propagación (p) y dirección (d) de la onda SH incidente y reflejada respectivamente:

Para A_{sh}^i :

$$p^{(0)}: (0, p_2^{(0)}, p_3^{(0)}) \begin{cases} p_2^{(0)} = \cos \theta_0 \\ p_3^{(0)} = \sin \theta_0 \end{cases}$$

$$d^{(0)}: (d_1^{(0)}, 0, 0) \begin{cases} d_1^{(0)} = 1 \end{cases}$$

Para A_{sh}^r :

$$p^{(1)}: (0, p_2^{(1)}, p_3^{(1)}) \begin{cases} p_2^{(1)} = \cos \theta_1 \\ p_3^{(1)} = -\sin \theta_1 \end{cases}$$

$$d^{(1)}: (d_1^{(1)}, 0, 0) \begin{cases} d_1^{(1)} = 1 \end{cases}$$

4.2.1 Campo de desplazamientos

A continuación, deducimos las expresiones del campo de desplazamientos $u(u_1, u_2, u_3) = u(u, v, w)$, teniéndose que:

$$\begin{cases} u = d_1^{(0)} \cdot A_{sh}^i \cdot e^{-ik_s(p^{(0)} \cdot r)} + d_1^{(1)} \cdot A_{sh}^r \cdot e^{-ik_s(p^{(1)} \cdot r)} \\ v = 0 \\ w = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = A_{sh}^i \cdot e^{-ik_s(\cos \theta_0 y + \sin \theta_0 z)} + A_{sh}^r \cdot e^{-ik_s(\cos \theta_1 y - \sin \theta_1 z)} \\ v = 0 \\ w = 0 \end{cases}$$

Para poder satisfacer cualquier condición de contorno que sea conforme a lo largo del “eje y”, será necesario que todas las ondas tengan la misma variación en esa dirección, de modo que:

$$\cos \theta_0 = \cos \theta_1$$

Esto implicará que:

$$p_2^{(1)} = \cos \theta_0$$

$$p_3^{(1)} = -\sin \theta_0$$

Quedando la expresión final del campo de desplazamientos de la siguiente manera:

$$\begin{cases} u = A_{sh}^i \cdot e^{-ik_s(\cos \theta_0 y + \sin \theta_0 z)} + A_{sh}^r \cdot e^{-ik_s(\cos \theta_0 y - \sin \theta_0 z)} \\ v = 0 \\ w = 0 \end{cases}$$

4.2.2 Campo de deformaciones

Partiendo de la expresión que hace referencia al cálculo de las componentes del tensor de pequeñas deformaciones:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

Y así como al tensor propiamente dicho:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & 0 & 0 \\ \varepsilon_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El siguiente paso será obtener las expresiones para cada uno de los términos del tensor:

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) = \frac{1}{2}(u_{1,2})$$

$$u_{1,2} = -d_1^{(0)} \cdot p_2^{(0)} \cdot ik_s \cdot A_{sh}^i \cdot e^{-ik_s(p^{(0)} \cdot r)} - d_1^{(1)} \cdot p_2^{(1)} \cdot ik_s \cdot A_{sh}^r \cdot e^{-ik_s(p^{(1)} \cdot r)}$$

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \frac{1}{2}(u_{1,3} + u_{3,1}) = \frac{1}{2}(u_{1,3})$$

$$u_{1,3} = -d_1^{(0)} \cdot p_3^{(0)} \cdot ik_s \cdot A_{sh}^i \cdot e^{-ik_s(p^{(0)} \cdot r)} - d_1^{(1)} \cdot p_3^{(1)} \cdot ik_s \cdot A_{sh}^r \cdot e^{-ik_s(p^{(1)} \cdot r)}$$

Llevando a cabo las sustituciones pertinentes, obtenemos las expresiones finales:

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\cos \theta_0 \cdot ik_s \cdot A_{sh}^i \cdot e^{-ik_s(\cos \theta_0 y - \sin \theta_0 z)} \right. \\ \left. - \cos \theta_0 \cdot ik_s \cdot A_{sh}^r \cdot e^{-ik_s(\cos \theta_0 y - \sin \theta_0 z)} \right)$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\sin \theta_0 \cdot ik_s \cdot A_{sh}^i \cdot e^{-ik_s(\cos \theta_0 y - \sin \theta_0 z)} + \sin \theta_0 \cdot ik_s \cdot A_{sh}^r \right. \\ \left. \cdot e^{-ik_s(\cos \theta_0 y - \sin \theta_0 z)} \right)$$

4.2.3 Campo de Tensiones

Vamos a tratar de determinar el campo de tensiones partiendo de la expresión inicial de la ley de comportamiento de un material, la cual establece relación entre la tensión y la deformación para puntos pertenecientes a dicho material.

$$\sigma_{ij} = 2\mu \cdot \varepsilon_{ij} + \lambda \cdot \varepsilon_{kk} \cdot \delta_{ij}$$

Donde:

$$\begin{cases} \delta_{ij} = 1 & \text{si } i = j \\ \delta_{ij} & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Por lo que respecta al tensor de tensiones:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & 0 & 0 \\ \sigma_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Deducimos los términos del tensor de modo que:

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{23} = \sigma_{32} = 0$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = 2\mu \cdot \varepsilon_{12}$$

$$\sigma_{12} = \mu \cdot \left(-d_1^{(0)} \cdot p_2^{(0)} \cdot ik_s \cdot A_{sh}^i \cdot e^{-ik_s(p^{(0)} \cdot r)} - d_1^{(1)} \cdot p_2^{(1)} \cdot ik_s \cdot A_{sh}^r \cdot e^{-ik_s(p^{(1)} \cdot r)} \right)$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} = 2\mu \cdot \varepsilon_{13}$$

$$\sigma_{13} = \mu \cdot \left(-d_1^{(0)} \cdot p_3^{(0)} \cdot ik_s \cdot A_{sh}^i \cdot e^{-ik_s(p^{(0)} \cdot r)} - d_1^{(1)} \cdot p_3^{(1)} \cdot ik_s \cdot A_{sh}^r \cdot e^{-ik_s(p^{(1)} \cdot r)} \right)$$

Sustituyendo cada término por su valor:

$$\begin{aligned} \sigma_{12} = \mu \cdot \left(-\cos \theta_0 \cdot ik_s \cdot A_{sh}^i \cdot e^{-ik_s(\cos \theta_0 y - \sin \theta_0 z)} \right. \\ \left. - \cos \theta_0 \cdot ik_s \cdot A_{sh}^r \cdot e^{-ik_s(\cos \theta_0 y - \sin \theta_0 z)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{13} = \mu \cdot \left(-\sin \theta_0 \cdot ik_s \cdot A_{sh}^i \cdot e^{-ik_s(\cos \theta_0 y - \sin \theta_0 z)} + \sin \theta_0 \cdot ik_s \cdot A_{sh}^r \right. \\ \left. \cdot e^{-ik_s(\cos \theta_0 y - \sin \theta_0 z)} \right) \end{aligned}$$

A continuación, vamos a tratar de obtener el valor de las amplitudes. Para ello, debemos de considerar una serie de condiciones tales como:

El valor de la tensión a nivel superficial debe ser nulo. Esto es:

$$\forall \text{ punto } \begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ z = 0 \end{cases} \text{ se cumple } \rightarrow \{\sigma_{13} = 0$$

Lo que implica que:

$$\sigma_{13} = 2\mu \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot u_{1,3} \right) = \mu \cdot u_{1,3} = 0$$

$$\Leftrightarrow -1 \cdot \sin \theta_0 \cdot A_{sh}^i - 1 \cdot (-\sin \theta_0) \cdot A_{sh}^r = 0$$

Llegados a este punto, introduciremos una nueva condición, la cual será la de considerar como unitario el valor de la amplitud para la onda incidente; es decir, $A_{sh}^i = 1$. De este modo:

$$\Leftrightarrow -\sin \theta_0 + \sin \theta_0 \cdot A_{sh}^r = 0$$

$$\Leftrightarrow A_{sh}^r = 1$$

Una vez obtenidas las amplitudes, introduciremos los valores de éstas en sus correspondientes expresiones; esto nos llevará al último paso, el cual será el de obtener las expresiones finales del campo deformación y tensión respectivamente (componentes simétrica y antisimétrica).

4.3 Onda P

Inicialmente dispondremos de la siguiente figura, a modo de aclarar toda la nomenclatura utilizada e interpretar correctamente el sentido y dirección de los vectores implicados en el análisis.

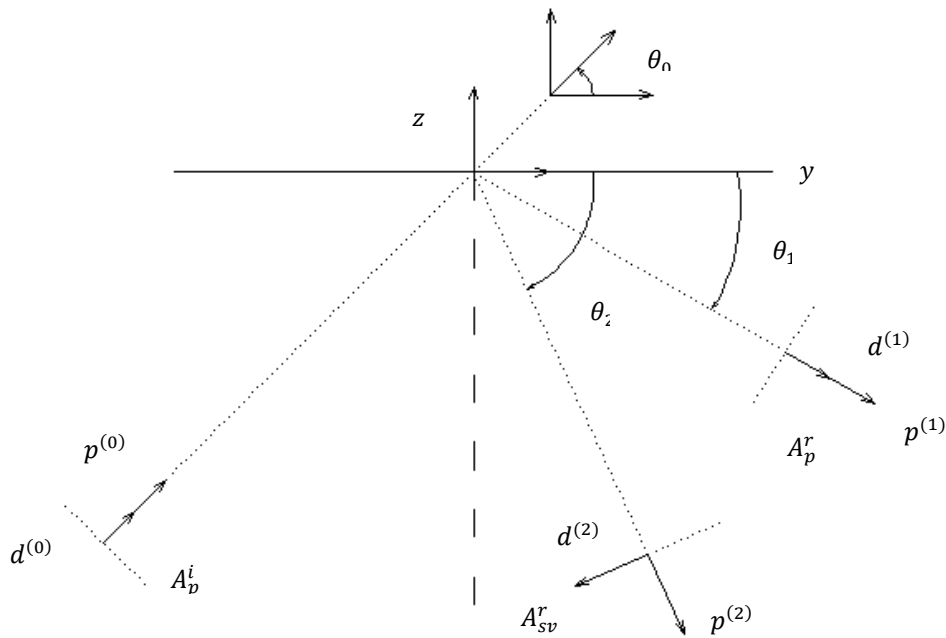


Figura 4.2. Gráfico explicativo para onda P incidente

Partimos de las expresiones del vector dirección (d) y propagación (p) respectivamente para cada una de las ondas que aparecen en el gráfico en función de los ejes de referencia (x, y, z). Así, tenemos que:

Para A_p^i :

$$d^{(0)}: (0, d_2^{(0)}, d_3^{(0)}) \begin{cases} d_2^{(0)} = \cos \theta_0 \\ d_3^{(0)} = \sin \theta_0 \end{cases}$$

$$p^{(0)}: (0, p_2^{(0)}, p_3^{(0)}) \begin{cases} p_2^{(0)} = \cos \theta_0 \\ p_3^{(0)} = \sin \theta_0 \end{cases}$$

Para A_p^r :

$$d^{(1)}: (0, d_2^{(1)}, d_3^{(1)}) \begin{cases} d_2^{(1)} = \cos \theta_1 \\ d_3^{(1)} = -\sin \theta_1 \end{cases}$$

$$p^{(1)}: (0, p_2^{(1)}, p_3^{(1)}) \begin{cases} p_2^{(1)} = \cos \theta_1 \\ p_3^{(1)} = -\sin \theta_1 \end{cases}$$

Para A_{sv}^r :

$$d^{(2)}: (0, d_2^{(2)}, d_3^{(2)}) \begin{cases} d_2^{(2)} = -\sin \theta_2 \\ d_3^{(2)} = -\cos \theta_2 \end{cases}$$

$$p^{(2)}: (0, p_2^{(2)}, p_3^{(2)}) \begin{cases} p_2^{(2)} = \cos \theta_2 \\ p_3^{(2)} = -\sin \theta_2 \end{cases}$$

4.3.1 Campo de Desplazamientos

El siguiente paso será deducir la ecuación que gobierna el campo de desplazamientos de la onda P. Así, deduciremos la ecuación para cada una de las componentes del vector desplazamiento $U: (u_1, u_2, u_3) = (u, v, w)$.

$$u = 0$$

$$v = d_2^{(0)} \cdot A_p^i \cdot e^{-ik_p(p^{(0)} \cdot r)} + d_2^{(1)} \cdot A_p^r \cdot e^{-ik_p(p^{(1)} \cdot r)} + d_2^{(2)} \cdot A_{sv}^r \cdot e^{-ik_s(p^{(2)} \cdot r)}$$

$$w = d_3^{(0)} \cdot A_p^i \cdot e^{-ik_p(p^{(0)} \cdot r)} + d_3^{(1)} \cdot A_p^i \cdot e^{-ik_p(p^{(1)} \cdot r)} + d_3^{(2)} \cdot A_{sv}^r \cdot e^{-ik_s(p^{(2)} \cdot r)}$$

Una vez deducidas las expresiones del campo de desplazamiento, hemos de introducir una serie de condicionantes a modo de tratar de simplificar las expresiones anteriores; la primera de ellas, será la de considerar que para que la condición de contorno sea constante a lo largo del *eje* y es necesario que:

$$k_p \cdot p_2^{(0)} = k_p \cdot p_2^{(1)} = k_s \cdot p_2^{(2)}$$

$$\underbrace{\frac{\cos \theta_0}{c_p} = \frac{\cos \theta_1}{c_p} = \frac{\cos \theta_2}{c_s}}_{\theta_0 = \theta_1} \rightarrow \frac{\cos \theta_0}{c_p} = \frac{\cos \theta_2}{c_s} \rightarrow \cos \theta_2 = \underbrace{\frac{c_s}{c_p}}_k \cdot \cos \theta_0$$

Esto implicará que:

$$p_2^{(1)} = \cos \theta_0 \quad d_2^{(1)} = \cos \theta_0$$

$$p_3^{(1)} = -\sin \theta_0 \quad d_3^{(1)} = -\sin \theta_0$$

Finalmente:

$$p_2^{(2)} = \cos \theta_2 = k \cdot \cos \theta_0$$

$$p_3^{(2)} = -\sin \theta_2 = -\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \theta_0}$$

$$d_2^{(2)} = -\sin \theta_2 = -\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \theta_0}$$

$$d_3^{(2)} = -\cos \theta_2 = -k \cdot \cos \theta_0$$

4.3.2 Campo de deformaciones

A continuación, deduciremos el campo de deformaciones a partir de la expresión del tensor de pequeñas deformaciones. Así, tenemos que:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

Dicha expresión relaciona las deformaciones con las componentes del desplazamiento en el punto sometido a análisis. Ahora trataremos de deducir cada uno de los términos del tensor de deformaciones.

Partiendo de la siguiente matriz:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ 0 & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

Donde:

Al no existir componente del desplazamiento en el eje X, podemos concluir lo siguiente:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{21} = \varepsilon_{31} = 0$$

Quedando el resto de los términos de la matriz tal y como sigue:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22} = & -d_2^{(0)} \cdot p_2^{(0)} \cdot ik_p \cdot A_p^i \cdot e^{-ik_p(p^{(0)} \cdot r)} - d_2^{(1)} \cdot p_2^{(1)} \cdot ik_p \cdot A_p^r \cdot e^{-ik_p(p^{(1)} \cdot r)} - d_2^{(2)} \\ & \cdot p_2^{(2)} \cdot ik_s \cdot A_{sv}^r \cdot e^{-ik_s(p^{(2)} \cdot r)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{33} = & -d_3^{(0)} \cdot p_3^{(0)} \cdot ik_p \cdot A_p^i \cdot e^{-ik_p(p^{(0)} \cdot r)} - d_3^{(1)} \cdot p_3^{(1)} \cdot ik_p \cdot A_p^r \cdot e^{-ik_p(p^{(1)} \cdot r)} - d_3^{(2)} \\ & \cdot p_3^{(2)} \cdot ik_s \cdot A_{sv}^r \cdot e^{-ik_s(p^{(2)} \cdot r)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{23} = 2\varepsilon_{32} = & -\left(d_2^{(0)} \cdot p_3^{(0)} + d_3^{(0)} \cdot p_2^{(0)}\right) \cdot ik_p \cdot A_p^i \cdot e^{-ik_p(p^{(0)} \cdot r)} \\ & -\left(d_2^{(1)} \cdot p_3^{(1)} + d_3^{(1)} \cdot p_2^{(1)}\right) \cdot ik_p \cdot A_p^r \cdot e^{-ik_p(p^{(1)} \cdot r)} \\ & -\left(d_2^{(2)} \cdot p_3^{(2)} + d_3^{(2)} \cdot p_2^{(2)}\right) \cdot ik_s \cdot A_{sv}^r \cdot e^{-ik_s(p^{(2)} \cdot r)} \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{kk} = & -\left(d_2^{(0)} \cdot p_2^{(0)} + d_3^{(0)} \cdot p_3^{(0)}\right) \cdot ik_p \cdot A_p^i \cdot e^{-ik_p(p^{(0)} \cdot r)} - \left(d_2^{(1)} \cdot p_2^{(1)} + d_3^{(1)} \cdot p_3^{(1)}\right) \\ & \cdot ik_p \cdot A_p^r \cdot e^{-ik_p(p^{(1)} \cdot r)} - \left(d_2^{(2)} \cdot p_2^{(2)} + d_3^{(2)} \cdot p_3^{(2)}\right) \cdot ik_s \cdot A_{sv}^r \\ & \cdot e^{-ik_s(p^{(2)} \cdot r)}\end{aligned}$$

Sustituyendo cada uno de los términos por su valor correspondiente, tenemos que:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{22} = & -\cos^2 \theta_0 \cdot ik_p \cdot A_p^i \cdot e^{-ik_p(\cos \theta_0 y + \sin \theta_0 z)} - \cos^2 \theta_0 \cdot ik_p \cdot A_p^r \\ & \cdot e^{-ik_p(\cos \theta_0 y - \sin \theta_0 z)} - \left(-\sqrt{1 - K^2 \cos^2 \theta_0}\right) \cdot (K \cos \theta_0) \cdot ik_s \cdot A_{sv}^r \\ & \cdot e^{-ik_s\left((K \cos \theta_0)y - \left(\sqrt{1 - K^2 \cos^2 \theta_0}\right)z\right)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{33} = & -\sin^2 \theta_0 \cdot ik_p \cdot A_p^i \cdot e^{-ik_p(\cos \theta_0 y + \sin \theta_0 z)} \\ & - \sin^2 \theta_0 \cdot ik_p \cdot A_p^r \cdot e^{-ik_p(\cos \theta_0 y - \sin \theta_0 z)} - (K \cos \theta_0) \\ & \cdot \left(\sqrt{1 - K^2 \cos^2 \theta_0}\right) \cdot ik_s \cdot A_{sv}^r \cdot e^{-ik_s\left((K \cos \theta_0)y - \left(\sqrt{1 - K^2 \cos^2 \theta_0}\right)z\right)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2\varepsilon_{23} = 2\varepsilon_{32} = & -(\cos \theta_0 \cdot \sin \theta_0 + \sin \theta_0 \cdot \cos \theta_0) \cdot ik_p \cdot A_p^i \cdot e^{-ik_p(\cos \theta_0 y - \sin \theta_0 z)} \\ & - (-\cos \theta_0 \cdot \sin \theta_0 - \sin \theta_0 \cdot \cos \theta_0) \cdot ik_p \cdot A_p^r \cdot e^{-ik_p(\cos \theta_0 y + \sin \theta_0 z)} \\ & - \left((1 - K^2 \cos^2 \theta_0) - (K^2 \cos^2 \theta_0)\right) \cdot ik_s \cdot A_{sv}^r \\ & \cdot e^{-ik_s\left((K \cos \theta_0)y - \left(\sqrt{1 - K^2 \cos^2 \theta_0}\right)z\right)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{kk} = & -(\cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0) \cdot ik_p \cdot A_p^i \cdot e^{-ik_p(\cos \theta_0 y + \sin \theta_0 z)} - (\cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0) \cdot ik_p \\
& \cdot A_p^r \cdot e^{-ik_p(\cos \theta_0 y - \sin \theta_0 z)} \\
& - \left(\left(-\sqrt{1 - K^2 \cos^2 \theta_0} \right) \cdot (K \cdot \cos \theta_0) + (K \cdot \cos \theta_0) \right) \\
& \cdot \left(\sqrt{1 - K^2 \cos^2 \theta_0} \right) \cdot ik_s \cdot A_{sv}^r \cdot e^{-ik_s \left((K \cos \theta_0) y - \left(\sqrt{1 - K^2 \cos^2 \theta_0} \right) z \right)}
\end{aligned}$$

4.3.3 Campo de Tensiones

Una vez determinado el campo de deformaciones, el siguiente paso será deducir el campo de tensiones. Para ello, partiremos de la expresión inicial:

$$\sigma_{ij} = 2\mu \cdot \varepsilon_{ij} + \lambda \cdot \varepsilon_{kk} \cdot \delta_{ij}$$

Siendo:

$$\begin{cases} \delta_{ij} = 1 & \text{si } i = j \\ \delta_{ij} = 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Dicha expresión es la denominada ley de comportamiento de un material, la cual relaciona la tensión y la deformación en el punto sometido a estudio; por tanto, se genera un tensor de tensiones que tiene la siguiente disposición:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ 0 & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

Al igual que sucediera en el campo de deformaciones, hay términos en la matriz que se consideran nulas al no existir componente u del desplazamiento. Por ello:

$$\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{21} = \sigma_{31} = 0$$

A continuación obtendremos el resto de términos de la matriz. Así, tenemos que:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} = & -\lambda \cdot \left[\left(d_2^{(0)} \cdot p_2^{(0)} + d_3^{(0)} \cdot p_3^{(0)} \right) \cdot ik_p \cdot A_p^i \cdot e^{-ik_p(p^{(0)}.r)} \right. \\ & + \left(d_2^{(1)} \cdot p_2^{(1)} + d_3^{(1)} \cdot p_3^{(1)} \right) \cdot ik_p \cdot A_p^r \cdot e^{-ik_p(p^{(1)}.r)} \\ & \left. + \left(d_2^{(2)} \cdot p_2^{(2)} + d_3^{(2)} \cdot p_3^{(2)} \right) \cdot ik_s \cdot A_{sv}^r \cdot e^{-ik_s(p^{(2)}.r)} \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{22} = & -\left[\lambda \cdot \left(d_3^{(0)} \cdot p_3^{(0)} \right) + (\lambda + 2\mu) \cdot \left(d_2^{(0)} \cdot p_2^{(0)} \right) \right] \cdot ik_p \cdot A_p^i \cdot e^{-ik_p(p^{(0)}.r)} \\ & - \left[\lambda \cdot \left(d_3^{(1)} \cdot p_3^{(1)} \right) + (\lambda + 2\mu) \cdot \left(d_2^{(1)} \cdot p_2^{(1)} \right) \right] \cdot ik_p \cdot A_p^r \cdot e^{-ik_p(p^{(1)}.r)} \\ & - \left[\lambda \cdot \left(d_3^{(2)} \cdot p_3^{(2)} \right) + (\lambda + 2\mu) \cdot \left(d_2^{(2)} \cdot p_2^{(2)} \right) \right] \cdot ik_s \cdot A_{sv}^r \cdot e^{-ik_s(p^{(2)}.r)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{33} = & -\left[\lambda \cdot \left(d_2^{(0)} \cdot p_2^{(0)} \right) + (\lambda + 2\mu) \cdot \left(d_3^{(0)} \cdot p_3^{(0)} \right) \right] \cdot ik_p \cdot A_p^i \cdot e^{-ik_p(p^{(0)}.r)} \\ & - \left[\lambda \cdot \left(d_2^{(1)} \cdot p_2^{(1)} \right) + (\lambda + 2\mu) \cdot \left(d_3^{(1)} \cdot p_3^{(1)} \right) \right] \cdot ik_p \cdot A_p^r \cdot e^{-ik_p(p^{(1)}.r)} \\ & - \left[\lambda \cdot \left(d_2^{(2)} \cdot p_2^{(2)} \right) + (\lambda + 2\mu) \cdot \left(d_3^{(2)} \cdot p_3^{(2)} \right) \right] \cdot ik_s \cdot A_{sv}^r \cdot e^{-ik_s(p^{(2)}.r)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{23} = 2\mu \cdot \varepsilon_{23} = & -\mu \cdot \left(d_2^{(0)} \cdot p_3^{(0)} + d_3^{(0)} \cdot p_2^{(0)} \right) \cdot ik_p \cdot A_p^i \cdot e^{-ik_p(p^{(0)}.r)} - \mu \\ & \cdot \left(d_2^{(1)} \cdot p_3^{(1)} + d_3^{(1)} \cdot p_2^{(1)} \right) \cdot ik_p \cdot A_p^r \cdot e^{-ik_p(p^{(1)}.r)} - \mu \\ & \cdot \left(d_2^{(2)} \cdot p_3^{(2)} + d_3^{(2)} \cdot p_2^{(2)} \right) \cdot ik_s \cdot A_{sv}^r \cdot e^{-ik_s(p^{(2)}.r)}\end{aligned}$$

Sustituyendo cada término por su valor:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} = -\lambda \cdot & \left[-(\cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0) \cdot ik_p \cdot A_p^i \cdot e^{-ik_p(\cos \theta_0 y + \sin \theta_0 z)} \right. \\ & - (\cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0) \cdot ik_p \cdot A_p^r \cdot e^{-ik_p(\cos \theta_0 y - \sin \theta_0 z)} \\ & - \left(\left(-\sqrt{1 - K^2 \cos^2 \theta_0} \right) \cdot (K \cdot \cos \theta_0) + (K \cdot \cos \theta_0) \right. \\ & \left. \left. \cdot \left(\sqrt{1 - K^2 \cos^2 \theta_0} \right) \right) \cdot ik_s \cdot A_{sv}^r \cdot e^{-ik_s \left((K \cos \theta_0) y - \left(\sqrt{1 - K^2 \cos^2 \theta_0} \right) z \right)} \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{22} = -[\lambda \cdot \sin^2 \theta_0 + (\lambda + 2\mu) \cdot \cos^2 \theta_0] \cdot ik_p \cdot A_p^i \cdot e^{-ik_p(\cos \theta_0 y + \sin \theta_0 z)} \\ - [\lambda \cdot \sin^2 \theta_0 + (\lambda + 2\mu) \cdot \cos^2 \theta_0] \cdot ik_p \cdot A_p^r \cdot e^{-ik_p(\cos \theta_0 y - \sin \theta_0 z)} \\ - \left[\lambda \cdot (K \cos \theta_0) \left(\sqrt{1 - K^2 \cos^2 \theta_0} \right) - (\lambda + 2\mu) \right. \\ \left. \cdot \left(\sqrt{1 - K^2 \cos^2 \theta_0} \right) (K \cos \theta_0) \right] \cdot ik_s \cdot A_{sv}^r \\ \cdot e^{-ik_s \left((K \cos \theta_0) y - \left(\sqrt{1 - K^2 \cos^2 \theta_0} \right) z \right)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{33} = -[\lambda \cdot \cos^2 \theta_0 + (\lambda + 2\mu) \cdot \sin^2 \theta_0] \cdot ik_p \cdot A_p^i \cdot e^{-ik_p(\cos \theta_0 y + \sin \theta_0 z)} \\ - [\lambda \cdot \cos^2 \theta_0 + (\lambda + 2\mu) \cdot \sin^2 \theta_0] \cdot ik_p \cdot A_p^r \cdot e^{-ik_p(\cos \theta_0 y - \sin \theta_0 z)} \\ - \left[\lambda \cdot (K \cos \theta_0) \left(-\sqrt{1 - K^2 \cos^2 \theta_0} \right) + (\lambda + 2\mu) \right. \\ \left. \cdot (K \cos \theta_0) \left(\sqrt{1 - K^2 \cos^2 \theta_0} \right) \right] \cdot ik_s \cdot A_{sv}^r \\ \cdot e^{-ik_s \left((K \cos \theta_0) y - \left(\sqrt{1 - K^2 \cos^2 \theta_0} \right) z \right)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{23} = \sigma_{32} = & -\mu(\cos \theta_0 \cdot \sin \theta_0 + \sin \theta_0 \cdot \cos \theta_0) \cdot ik_p \cdot A_p^i \cdot e^{-ik_p(\cos \theta_0 y + \sin \theta_0 z)} \\
& - \mu(-\cos \theta_0 \cdot \sin \theta_0 - \sin \theta_0 \cdot \cos \theta_0) \cdot ik_p \cdot A_p^r \cdot e^{-ik_p(\cos \theta_0 y - \sin \theta_0 z)} \\
& - \mu((1 - K^2 \cos^2 \theta_0) - (K^2 \cos^2 \theta_0)) \cdot ik_s \cdot A_{sv}^r \\
& \cdot e^{-ik_s((K \cos \theta_0)y - (\sqrt{1-K^2 \cos^2 \theta_0})z)}
\end{aligned}$$

Ahora se tratará de obtener el valor de las amplitudes A_p^r y A_{sv}^r . Para ello, imponemos condiciones de contorno, las cuales establecen que:

$$\forall \text{ punto } \begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ z = 0 \end{cases} \text{ se cumple } \rightarrow \begin{cases} \sigma_{23} = 0 \\ \sigma_{33} = 0 \end{cases}$$

Así como que la amplitud de la onda incidente P tendrá valor unitario; esto es:

$$A_p^i = 1$$

Así, tenemos que:

Establecemos σ_{33} y σ_{23} en función de θ_0 y θ_2 y, así, poder operar con mayor facilidad:

$$\begin{aligned}
\sigma_{33} = 0 = & -[\lambda \cdot \cos^2 \theta_0 + (\lambda + 2\mu) \cdot \sin^2 \theta_0] \cdot ik_p \cdot e^{-ik_p(\cos \theta_0 y)} \\
& - [\lambda \cdot \cos^2 \theta_0 + (\lambda + 2\mu) \cdot \sin^2 \theta_0] \cdot ik_p \cdot A_p^r \cdot e^{-ik_p(\cos \theta_0 y)} \\
& - [\lambda \cdot (-\sin \theta_2 \cdot \cos \theta_2) + (\lambda + 2\mu) \cdot (\cos \theta_2 \cdot \sin \theta_2)] \cdot ik_s \cdot A_{sv}^r \\
& \cdot e^{-ik_s((\cos \theta_2)y)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad 0 = & -((\lambda + 2\mu) \cdot \sin^2 \theta_0) \cdot ik_p - ((\lambda + 2\mu) \cdot \sin^2 \theta_0) \cdot ik_p \cdot A_p^r \\
& - (-\lambda \cdot (\sin \theta_2 \cdot \cos \theta_2) + (\lambda + 2\mu) \cdot (\sin \theta_2 \cdot \cos \theta_2)) \cdot ik_s \cdot A_{sv}^r
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 0 = -((\lambda + 2\mu) \cdot \sin^2 \theta_0) - ((\lambda + 2\mu) \cdot \sin^2 \theta_0) \cdot A_p^r - 2\mu \cdot (\sin \theta_2 \cdot \cos \theta_2) \cdot \frac{1}{K} \cdot A_{sv}^r$$

$$\Leftrightarrow 0 = -\left(\frac{\lambda}{2\mu} + \sin^2 \theta_0\right) - \left(\frac{\lambda}{2\mu} + \sin^2 \theta_0\right) \cdot A_p^r - \frac{1}{2} \cdot \sin 2\theta_2 \cdot \frac{1}{K} \cdot A_{sv}^r$$

$$\Leftrightarrow 0 = -\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{K^2} - 1 + \sin^2 \theta_0\right) - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{K^2} - 1 + \sin^2 \theta_0\right) \cdot A_p^r - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{K} \cdot \sin 2\theta_2\right) \cdot A_{sv}^r$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{K} - \cos^2 \theta_0\right) \cdot A_p^r + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{K} \cdot \sin 2\theta_2\right) \cdot A_{sv}^r = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{K^2} + \cos^2 \theta_0 \quad (1)$$

Por otro lado, haremos lo mismo con σ_{23} :

$$\begin{aligned} \sigma_{23} = 0 = & -\mu \cdot (\cos \theta_0 \cdot \sin \theta_0 + \sin \theta_0 \cdot \cos \theta_0) \cdot ik_p \cdot e^{-ik_p(\cos \theta_0 y)} - \mu \\ & \cdot (-\cos \theta_0 \cdot \sin \theta_0 - \sin \theta_0 \cdot \cos \theta_0) \cdot ik_p \cdot A_p^r \cdot e^{-ik_p(\cos \theta_0 y)} - \mu \\ & \cdot (\sin^2 \theta_2 - \cos^2 \theta_2) \cdot ik_s \cdot A_{sv}^r \cdot e^{-ik_s((\cos \theta_2)y)} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sin 2\theta_0 \cdot A_p^r - (\sin^2 \theta_2 - \cos^2 \theta_2) \cdot \frac{1}{K} \cdot A_{sv}^r = \sin 2\theta_0$$

$$\Leftrightarrow \sin 2\theta_0 \cdot A_p^r + \cos 2\theta_2 \cdot \frac{1}{K} \cdot A_{sv}^r = \sin 2\theta_0 \quad (2)$$

Por tanto, en términos de θ_0 y θ_2 (véase Achenbach (1973)), quedaría:

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{K^2} - \cos^2 \theta_0\right) \cdot A_p^r + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{K} \cdot \sin 2\theta_2\right) \cdot A_{sv}^r = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{K^2} + \cos^2 \theta_0$$

$$\sin 2\theta_0 \cdot A_p^r + \left(\frac{1}{K} \cdot \cos 2\theta_2\right) \cdot A_{sv}^r = \sin 2\theta_0$$

Generándose un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (A_p^r y A_{sv}^r). Mediante la aplicación del programa MATLAB, se consigue llegar a la solución del sistema de ecuaciones, la cual será:

$$A_p^r = \frac{K^2 \cdot \sin 2\theta_0 \cdot \sin 2\theta_2 + \cos 2\theta_2 - 2K^2 \cdot \cos 2\theta_2 \cdot \cos^2 \theta_0}{K^2 \cdot \sin 2\theta_0 \cdot \sin 2\theta_2 - \cos 2\theta_2 + 2K^2 \cdot \cos 2\theta_2 \cdot \cos^2 \theta_0}$$

$$A_{sv}^r = \frac{4K \cdot \sin \theta_0 \cdot \cos \theta_0 \cdot (-1 + 2K^2 \cos^2 \theta_0)}{2K^2 \cdot \cos 2\theta_2 \cdot \cos^2 \theta_0 - \cos 2\theta_2 + K^2 \cdot \sin 2\theta_2 \cdot \sin 2\theta_0}$$

Sometemos ambas expresiones a simplificaciones:

Para A_p^r :

$$1 - 2K^2 \cos^2 \theta_0 = 1 - 2 \cos^2 \theta_2 = 1 - \cos^2 \theta_2 - \cos^2 \theta_2$$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos^2 \theta_2 - \cos^2 \theta_2 = \sin^2 \theta_2 - \cos^2 \theta_2 = -\cos 2\theta_2$$

Para A_{sv}^r :

$$4K \cdot \sin \theta_0 \cdot \cos \theta_0 = 2K \cdot \sin 2\theta_0$$

$$2 \cos \theta_2 - 1 = \cos 2\theta_2$$

Por tanto, las expresiones finales son:

$$A_p^r = \frac{K^2 \cdot \sin 2\theta_0 \cdot \sin 2\theta_2 - \cos^2 2\theta_2}{K^2 \cdot \sin 2\theta_0 \cdot \sin 2\theta_2 + \cos^2 2\theta_2}$$

$$A_{sv}^r = \frac{2K \cdot \sin 2\theta_0 \cdot \cos 2\theta_2}{K^2 \cdot \sin 2\theta_0 \cdot \sin 2\theta_2 + \cos^2 2\theta_2}$$

Introduciendo los valores de A_p^r y A_{sv}^r en las expresiones deducidas anteriormente, obtenemos las expresiones finales para el campo de desplazamiento, deformación y tensión respectivamente (componente simétrica y antisimétrica).

4.4 Onda SV

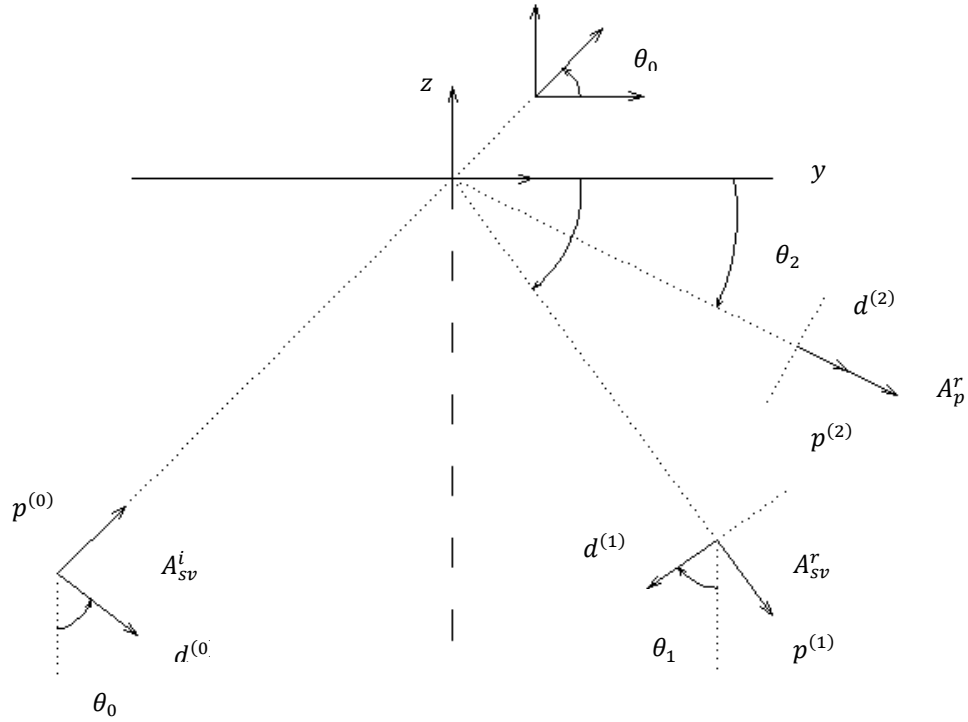


Figura 4.3. Gráfico explicativo para onda SV incidente

Un primer paso a realizar será el de incorporar las expresiones tanto del vector dirección (d), como del vector propagación (p) para cada uno de los tipos de onda que se manifiestan en este caso. Así, tenemos que:

Para A_{sv}^i :

$$p^{(0)}: (0, p_2^{(0)}, p_3^{(0)}) \begin{cases} p_2^{(0)} = \cos \theta_0 \\ p_3^{(0)} = \sin \theta_0 \end{cases}$$

$$d^{(0)}: (0, d_2^{(0)}, d_3^{(0)}) \begin{cases} d_2^{(0)} = \sin \theta_0 \\ d_3^{(0)} = -\cos \theta_0 \end{cases}$$

Para A_{sv}^r :

$$p^{(1)}: (0, p_2^{(1)}, p_3^{(1)}) \begin{cases} p_2^{(1)} = \cos \theta_1 \\ p_3^{(1)} = -\sin \theta_1 \end{cases}$$

$$d^{(1)}: (0, d_2^{(1)}, d_3^{(1)}) \begin{cases} d_2^{(1)} = -\sin \theta_1 \\ d_3^{(1)} = -\cos \theta_1 \end{cases}$$

Para A_p^r :

$$p^{(2)}: (0, p_2^{(2)}, p_3^{(2)}) \begin{cases} p_2^{(2)} = \cos \theta_2 \\ p_3^{(2)} = -\sin \theta_2 \end{cases}$$

$$d^{(2)}: (0, d_2^{(2)}, d_3^{(2)}) \begin{cases} d_2^{(2)} = \cos \theta_2 \\ d_3^{(2)} = -\sin \theta_2 \end{cases}$$

4.4.1 Campo de Desplazamientos

Seguidamente pasamos a deducir el campo de desplazamientos. Considerando la expresión inicial del vector desplazamiento $U(u_1, u_2, u_3) = (u, v, w)$, es importante resaltar el hecho de la no existencia de la componente u_1 (u) para este tipo de ondas. Así, se tiene que:

$$\begin{cases} u = 0 \\ v = d_2^{(0)} \cdot A_{sv}^i \cdot e^{-ik_s(p^{(0)} \cdot r)} + d_2^{(1)} \cdot A_{sv}^r \cdot e^{-ik_s(p^{(1)} \cdot r)} + d_2^{(2)} \cdot A_p^r \cdot e^{-ik_p(p^{(2)} \cdot r)} \\ w = d_3^{(0)} \cdot A_{sv}^i \cdot e^{-ik_s(p^{(0)} \cdot r)} + d_3^{(1)} \cdot A_{sv}^r \cdot e^{-ik_s(p^{(1)} \cdot r)} + d_3^{(2)} \cdot A_p^r \cdot e^{-ik_p(p^{(2)} \cdot r)} \end{cases}$$

Sustituyendo adecuadamente cada término, llegaremos a unas expresiones tales como:

$$u = 0$$

$$v = \sin \theta_0 \cdot A_{sv}^i \cdot e^{-ik_s(\cos \theta_0 y + \sin \theta_0 z)} - \sin \theta_1 \cdot A_{sv}^r \cdot e^{-ik_s(\cos \theta_1 y - \sin \theta_1 z)} + \cos \theta_2 \cdot A_p^r \cdot e^{-ik_p(\cos \theta_2 y - \sin \theta_2 z)}$$

$$w = -\cos \theta_0 \cdot A_{sv}^i \cdot e^{-ik_s(\cos \theta_0 y + \sin \theta_0 z)} - \cos \theta_1 \cdot A_{sv}^r \cdot e^{-ik_s(\cos \theta_1 y - \sin \theta_1 z)} - \sin \theta_2 \cdot A_p^r \cdot e^{-ik_p(\cos \theta_2 y - \sin \theta_2 z)}$$

Siendo:

$$\begin{cases} p^{(0)} \cdot r = p_2^{(0)} \cdot y + p_3^{(0)} \cdot z = \cos \theta_0 \cdot y + \sin \theta_0 \cdot z \\ p^{(1)} \cdot r = p_2^{(1)} \cdot y + p_3^{(1)} \cdot z = \cos \theta_1 \cdot y - \sin \theta_1 \cdot z \\ p^{(2)} \cdot r = p_2^{(2)} \cdot y + p_3^{(2)} \cdot z = \cos \theta_2 \cdot y - \sin \theta_2 \cdot z \end{cases}$$

Para satisfacer cualquier condición de contorno conforme a lo largo del *eje y*, es necesario que todas las ondas (incidentes y reflejadas) tengan la misma variación en esa dirección.

Así, para que esto suceda la componente y del producto $p \cdot r$ deben igualarse, de modo que:

$$k_s \cdot p_2^{(0)} = k_s \cdot p_2^{(1)} = k_p \cdot p_2^{(2)}$$

$$\underbrace{\frac{\cos \theta_0}{c_s} = \frac{\cos \theta_1}{c_s}}_{\theta_1 = \theta_0} = \frac{\cos \theta_2}{c_p} \quad (1)$$

El hecho de que $\theta_1 = \theta_0$ conlleva a las siguientes modificaciones en algunas componentes del vector propagación y vector dirección respectivamente.

$$\begin{aligned} p_2^{(1)} &= p_2^{(0)} & p_3^{(1)} &= -p_3^{(0)} \\ d_2^{(1)} &= -d_2^{(0)} & d_3^{(1)} &= d_3^{(0)} \end{aligned}$$

Por otro lado, continuando con lo expuesto en (1):

$$\frac{\cos \theta_0}{c_s} = \frac{\cos \theta_2}{c_p}$$

$$\cos \theta_2 = \frac{c_p}{c_s} \cdot \cos \theta_0$$

$$\frac{c_p}{c_s} = \left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \right]^{1/2} = \frac{1}{K} > 1$$

Ahora se procederá a estudiar diferentes situaciones que pudieran darse para este caso concreto; por ejemplo, una de ellas será la de considerar $\cos \theta_2 = 1$. Esto provocará que se genere una onda P incidente y rasante. Dicho caso propiciará que:

$$\cos \theta_0 = 1 \cdot \frac{c_s}{c_p} = K$$

Por tanto, la obtención del ángulo crítico deberá producirse mediante:

$$\cos \theta_{cr} = K$$

Donde dicha expresión dependerá del coeficiente de Poisson (ν). Así, dispondremos la siguiente tabla de valores en donde puede observarse el valor del ángulo crítico en función del coeficiente de Poisson:

ν (<i>coeficiente Poisson</i>)	K	θ_{cr} (<i>grados</i>)
0.2	0.612	52.240
0.3	0.535	57.690
0.4	0.408	65.910
0.5	0	90

En el caso de que $\theta_0 < \theta_{cr}$, implicará que:

$$\cos \theta_1 > 1$$

Así como:

$$\sin \theta_0 = \sqrt{1 - \cos^2 \theta_0}$$

Esto implica que el problema sea resuelto mediante la utilización de razones trigonométricas de carácter complejo, no considerándose como válidas las ecuaciones deducidas a lo largo de este apartado. Así, las expresiones del campo de desplazamiento deducidas con anterioridad serán válidas para aquellos ángulos de la onda incidente que cumplan que:

$$\theta_0 > \theta_{cr}$$

Puesto que en dicho caso podremos tener en cuenta las siguientes consideraciones, las cuales hacen referencia a términos del vector de propagación y dirección:

$$p_2^{(2)} = \frac{1}{K} \cdot p_2^{(0)} = \frac{1}{K} \cos \theta_0 \quad d_2^{(2)} = p_2^{(2)}$$

$$p_3^{(2)} = -\sqrt{1 - \left(p_2^{(2)}\right)^2} = -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{K} \cos \theta_0\right)^2} \quad d_3^{(2)} = p_3^{(2)}$$

Existen algunas peculiaridades en las proximidades del ángulo crítico, pero éstas serán estudiadas más adelante.

4.4.2 Campo de deformaciones

Recurriendo a la expresión del tensor de pequeñas deformaciones deducido en capítulos anteriores, diremos que:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

Siendo esta expresión la encargada de relacionar las deformaciones con las componentes del campo de desplazamiento.

Ahora trataremos de obtener cada uno de los términos de la *matriz de deformaciones*, la cual obedece a la siguiente disposición:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ 0 & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

Efectivamente, serán nulos todos aquellos términos que tuvieran algún tipo de dependencia de la componente u (u_1) del vector desplazamiento; de este modo:

$$\varepsilon_{11} = u_{1,1} = 0$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) = 0$$

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{1,3} + \mathbf{u}_{3,1}) = \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22} = u_{2,2} = & -d_2^{(0)} \cdot p_2^{(0)} \cdot A_{sv}^i \cdot ik_s \cdot e^{-ik_s(p^{(0)} \cdot r)} - d_2^{(1)} \cdot p_2^{(1)} \cdot A_{sv}^r \cdot ik_s \cdot e^{-ik_s(p^{(1)} \cdot r)} \\ & - d_2^{(2)} \cdot p_2^{(2)} \cdot A_p^r \cdot ik_p \cdot e^{-ik_p(p^{(2)} \cdot r)} \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{2,3} + \mathbf{u}_{3,2})$$

$$\begin{aligned} u_{2,3} = & -d_2^{(0)} \cdot p_3^{(0)} \cdot A_{sv}^i \cdot ik_s \cdot e^{-ik_s(p^{(0)} \cdot r)} - d_2^{(1)} \cdot p_3^{(1)} \cdot A_{sv}^r \cdot ik_s \cdot e^{-ik_s(p^{(1)} \cdot r)} - d_2^{(2)} \\ & \cdot p_3^{(2)} \cdot A_p^r \cdot ik_p \cdot e^{-ik_p(p^{(2)} \cdot r)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{3,2} = & -d_3^{(0)} \cdot p_2^{(0)} \cdot A_{sv}^i \cdot ik_s \cdot e^{-ik_s(p^{(0)} \cdot r)} - d_3^{(1)} \cdot p_2^{(1)} \cdot A_{sv}^r \cdot ik_s \cdot e^{-ik_s(p^{(1)} \cdot r)} - d_3^{(2)} \\ & \cdot p_2^{(2)} \cdot A_p^r \cdot ik_p \cdot e^{-ik_p(p^{(2)} \cdot r)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{23} = 2\varepsilon_{32} = & -\left(d_2^{(0)} \cdot p_3^{(0)} + d_3^{(0)} \cdot p_2^{(0)}\right) \cdot A_{sv}^i \cdot ik_s \cdot e^{-ik_s(p^{(0)} \cdot r)} \\ & - \left(d_2^{(1)} \cdot p_3^{(1)} + d_3^{(1)} \cdot p_2^{(1)}\right) \cdot A_{sv}^r \cdot ik_s \cdot e^{-ik_s(p^{(1)} \cdot r)} \\ & - \left(d_2^{(2)} \cdot p_3^{(2)} + d_3^{(2)} \cdot p_2^{(2)}\right) \cdot A_p^r \cdot ik_p \cdot e^{-ik_p(p^{(2)} \cdot r)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{33} = u_{3,3} = & -d_3^{(0)} \cdot p_3^{(0)} \cdot A_{sv}^i \cdot ik_s \cdot e^{-ik_s(p^{(0)} \cdot r)} - d_3^{(1)} \cdot p_3^{(1)} \cdot A_{sv}^r \cdot ik_s \cdot e^{-ik_s(p^{(1)} \cdot r)} \\ & - d_3^{(2)} \cdot p_3^{(2)} \cdot A_p^r \cdot ik_p \cdot e^{-ik_p(p^{(2)} \cdot r)} \end{aligned}$$

Por lo que respecta a la dilatación volumétrica:

$$\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{kk} = & -\left(d_2^{(0)} \cdot p_2^{(0)} + d_3^{(0)} \cdot p_3^{(0)}\right) \cdot A_{sv}^i \cdot ik_s \cdot e^{-ik_s(p^{(0)} \cdot r)} - \left(d_2^{(1)} \cdot p_2^{(1)} + d_3^{(1)} \cdot p_3^{(1)}\right) \\ & \cdot A_{sv}^r \cdot ik_s \cdot e^{-ik_s(p^{(1)} \cdot r)} - \left(d_2^{(2)} \cdot p_2^{(2)} + d_3^{(2)} \cdot p_3^{(2)}\right) \cdot A_p^r \cdot ik_p \\ & \cdot e^{-ik_p(p^{(2)} \cdot r)}\end{aligned}$$

Ahora sustituiremos cada término por su expresión correspondiente:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{22} = & -\sin \theta_0 \cdot \cos \theta_0 \cdot A_{sv}^i \cdot ik_s \cdot e^{-ik_s(\cos \theta_0 y + \sin \theta_0 z)} + (\sin \theta_0) \\ & \cdot \cos \theta_0 \cdot A_{sv}^r \cdot ik_s \cdot e^{-ik_s(\cos \theta_0 y - \sin \theta_0 z)} \\ & - \frac{1}{K^2} \cos^2 \theta_0 \cdot A_p^r \cdot ik_p \cdot e^{-ik_p\left(\left(\frac{1}{K} \cos \theta_0\right)y - \left(\sqrt{1 - \left(\frac{1}{K^2} \cos^2 \theta_0\right)}\right)z\right)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2\varepsilon_{23} = 2\varepsilon_{32} = & -(\sin^2 \theta_0 - \cos^2 \theta_0) \cdot A_{sv}^i \cdot ik_s \cdot e^{-ik_s(\cos \theta_0 y + \sin \theta_0 z)} \\ & - (-\sin^2 \theta_0 + \cos^2 \theta_0) \cdot A_{sv}^r \cdot ik_s \cdot e^{-ik_s(\cos \theta_0 y - \sin \theta_0 z)} \\ & + \left(\left(\frac{1}{K} \cos \theta_0\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{K^2} \cos^2 \theta_0\right)\right) \cdot A_p^r \cdot ik_p \\ & \cdot e^{-ik_p\left(\left(\frac{1}{K} \cos \theta_0\right)y - \left(\sqrt{1 - \left(\frac{1}{K^2} \cos^2 \theta_0\right)}\right)z\right)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{33} = & \cos \theta_0 \cdot \sin \theta_0 \cdot A_{sv}^i \cdot ik_s \cdot e^{-ik_s(\cos \theta_0 y + \sin \theta_0 z)} - \cos \theta_0 \cdot \sin \theta_0 \cdot A_{sv}^r \cdot ik_s \\ & \cdot e^{-ik_s(\cos \theta_0 y - \sin \theta_0 z)} - \left(1 - \frac{1}{K^2} \cos^2 \theta_0\right) \cdot A_p^r \cdot ik_p \\ & \cdot e^{-ik_p\left(\left(\frac{1}{K} \cos \theta_0\right)y - \left(\sqrt{1 - \left(\frac{1}{K^2} \cos^2 \theta_0\right)}\right)z\right)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{kk} = & -(\sin \theta_0 \cdot \cos \theta_0 - \cos \theta_0 \cdot \sin \theta_0) \cdot A_{sv}^i \cdot ik_s \cdot e^{-ik_s(\cos \theta_0 y + \sin \theta_0 z)} \\
& - ((-\sin \theta_0) \cdot \cos \theta_0 + \cos \theta_0 \cdot \sin \theta_0) \cdot A_{sv}^r \cdot ik_s \cdot e^{-ik_s(\cos \theta_0 y - \sin \theta_0 z)} \\
& - \left(\left(\frac{1}{K} \cos \theta_0 \right)^2 + \left(1 - \frac{1}{K^2} \cos^2 \theta_0 \right) \right) \cdot A_p^r \cdot ik_p \\
& \cdot e^{-ik_p \left(\left(\frac{1}{K} \cos \theta_0 \right) y - \left(\sqrt{1 - \left(\frac{1}{K^2} \cos^2 \theta_0 \right)} \right) z \right)}
\end{aligned}$$

4.4.3 Campo de tensiones

Recurriendo a la expresión de la ley de comportamiento de un material, se tiene que:

$$\sigma_{ij} = 2\mu \cdot \varepsilon_{ij} + \lambda \cdot \varepsilon_{kk} \cdot \delta_{ij}$$

Siendo:

$$\begin{cases} \delta_{ij} = 1 & \text{si } i = j \\ \delta_{ij} = 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Al igual que ocurriera en el *campo de deformaciones*, partiremos de un tensor de tensiones tal y como se muestra a continuación:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ 0 & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

Donde el cálculo de cada uno de los términos de dicho tensor viene dado por:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} = \lambda \cdot \varepsilon_{kk} = & -\lambda \left(d_2^{(0)} \cdot p_2^{(0)} + d_3^{(0)} \cdot p_3^{(0)} \right) \cdot A_{sv}^i \cdot ik_s \cdot e^{-ik_s(p^{(0)} \cdot r)} \\
& - \lambda \left(d_2^{(1)} \cdot p_2^{(1)} + d_3^{(1)} \cdot p_3^{(1)} \right) \cdot A_{sv}^r \cdot ik_s \cdot e^{-ik_s(p^{(1)} \cdot r)} \\
& - \lambda \left(d_2^{(2)} \cdot p_2^{(2)} + d_3^{(2)} \cdot p_3^{(2)} \right) \cdot A_p^r \cdot ik_p \cdot e^{-ik_p(p^{(2)} \cdot r)}
\end{aligned}$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = 2\mu \cdot \varepsilon_{12} = 0$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} = 2\mu \cdot \varepsilon_{13} = 0$$

$$\sigma_{22} = \lambda \cdot \varepsilon_{kk} + 2\mu \cdot \varepsilon_{22}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22} = & -\left[\lambda \cdot d_3^{(0)} \cdot p_3^{(0)} + (\lambda + 2\mu) \cdot d_2^{(0)} \cdot p_2^{(0)}\right] \cdot A_{sv}^i \cdot ik_s \cdot e^{-ik_s(p^{(0)} \cdot r)} \\ & - \left[\lambda \cdot d_3^{(1)} \cdot p_3^{(1)} + (\lambda + 2\mu) \cdot d_2^{(1)} \cdot p_2^{(1)}\right] \cdot A_{sv}^r \cdot ik_s \cdot e^{-ik_s(p^{(1)} \cdot r)} \\ & - \left[\lambda \cdot d_3^{(2)} \cdot p_3^{(2)} + (\lambda + 2\mu) \cdot d_2^{(2)} \cdot p_2^{(2)}\right] \cdot A_p^r \cdot ik_p \cdot e^{-ik_p(p^{(2)} \cdot r)} \end{aligned}$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{32} = 2\mu \cdot \varepsilon_{23}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{23} = \sigma_{32} = & -\mu \cdot \left(d_2^{(0)} \cdot p_3^{(0)} + d_3^{(0)} \cdot p_2^{(0)}\right) \cdot A_{sv}^i \cdot ik_s \cdot e^{-ik_s(p^{(0)} \cdot r)} \\ & - \mu \left(d_2^{(1)} \cdot p_3^{(1)} + d_3^{(1)} \cdot p_2^{(1)}\right) \cdot A_{sv}^r \cdot ik_s \cdot e^{-ik_s(p^{(1)} \cdot r)} - \mu \\ & \cdot \left(d_2^{(2)} \cdot p_3^{(2)} + d_3^{(2)} \cdot p_2^{(2)}\right) \cdot A_p^r \cdot ik_p \cdot e^{-ik_p(p^{(2)} \cdot r)} \end{aligned}$$

$$\sigma_{33} = \lambda \cdot \varepsilon_{kk} + 2\mu \cdot \varepsilon_{33}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33} = & -\left[\lambda \cdot d_2^{(0)} \cdot p_2^{(0)} + (\lambda + 2\mu) \cdot d_3^{(0)} \cdot p_3^{(0)}\right] \cdot A_{sv}^i \cdot ik_s \cdot e^{-ik_s(p^{(0)} \cdot r)} \\ & - \left[\lambda \cdot d_2^{(1)} \cdot p_2^{(1)} + (\lambda + 2\mu) \cdot d_3^{(1)} \cdot p_3^{(1)}\right] \cdot A_{sv}^r \cdot ik_s \cdot e^{-ik_s(p^{(1)} \cdot r)} \\ & - \left[\lambda \cdot d_2^{(2)} \cdot p_2^{(2)} + (\lambda + \mu) \cdot d_3^{(2)} \cdot p_3^{(2)}\right] \cdot A_p^r \cdot ik_p \cdot e^{-ik_p(p^{(2)} \cdot r)} \end{aligned}$$

Procedemos, al igual que en el caso del *campo de deformaciones*, con las sustituciones de las componentes del vector propagación (p) y dirección (d) respectivamente por su expresión algebraica correspondiente, teniéndose que:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} = & -\lambda(\sin \theta_0 \cdot \cos \theta_0 - \cos \theta_0 \cdot \sin \theta_0) \cdot A_{sv}^i \cdot ik_s \cdot e^{-ik_s(\cos \theta_0 y + \sin \theta_0 z)} \\ & - \lambda((- \sin \theta_0) \cdot \cos \theta_0 + \cos \theta_0 \cdot \sin \theta_0) \cdot A_{sv}^r \cdot ik_s \\ & \cdot e^{-ik_s(\cos \theta_0 y - \sin \theta_0 z)} - \lambda \left(\frac{1}{K^2} \cdot \cos^2 \theta_0 + \left(1 - \frac{1}{K^2} \cdot \cos^2 \theta_0 \right) \right) \cdot A_p^r \cdot ik_p \\ & \cdot e^{-ik_p \left(\left(\frac{1}{K} \cos \theta_0 \right) y - \left(\sqrt{1 - \left(\frac{1}{K^2} \cos^2 \theta_0 \right)} \right) z \right)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{22} = & -[\lambda(-\cos \theta_0 \cdot \sin \theta_0) + (\lambda + 2\mu)(\sin \theta_0 \cdot \cos \theta_0)] \cdot A_{sv}^i \cdot ik_s \\ & \cdot e^{-ik_s(\cos \theta_0 y + \sin \theta_0 z)} \\ & - [\lambda(\cos \theta_0 \cdot \sin \theta_0) + (\lambda + 2\mu)(-\sin \theta_0 \cdot \cos \theta_0)] \cdot A_{sv}^r \cdot ik_s \\ & \cdot e^{-ik_s(\cos \theta_0 y - \sin \theta_0 z)} - \left[\lambda \left(1 - \frac{1}{K^2} \cos^2 \theta_0 \right) + (\lambda + 2\mu) \left(\frac{1}{K^2} \cos^2 \theta_0 \right) \right] \\ & \cdot A_p^r \cdot ik_p \cdot e^{-ik_p \left(\left(\frac{1}{K} \cos \theta_0 \right) y - \left(\sqrt{1 - \left(\frac{1}{K^2} \cos^2 \theta_0 \right)} \right) z \right)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{23} = \sigma_{32} = & -\mu(\sin^2 \theta_0 - \cos^2 \theta_0) \cdot A_{sv}^i \cdot ik_s \cdot e^{-ik_s(\cos \theta_0 y + \sin \theta_0 z)} \\ & - \mu(\sin^2 \theta_0 + \cos^2 \theta_0) \cdot A_{sv}^r \cdot ik_s \cdot e^{-ik_s(\cos \theta_0 y - \sin \theta_0 z)} \\ & - \mu \left(2 \left(\frac{1}{K} \cos \theta_0 \right) \left(-\sqrt{1 - \left(\frac{1}{K^2} \cos^2 \theta_0 \right)} \right) \right) \cdot A_p^r \cdot ik_p \\ & \cdot e^{-ik_p \left(\left(\frac{1}{K} \cos \theta_0 \right) y - \left(\sqrt{1 - \left(\frac{1}{K^2} \cos^2 \theta_0 \right)} \right) z \right)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{33} = & -[\lambda(\sin \theta_0 \cdot \cos \theta_0) - (\lambda + 2\mu)(\cos \theta_0 \cdot \sin \theta_0)] \cdot A_{sv}^i \cdot ik_s \\
& \cdot e^{-ik_s(\cos \theta_0 y + \sin \theta_0 z)} \\
& - [-\lambda(\sin \theta_0 \cdot \cos \theta_0) + (\lambda + 2\mu)(\cos \theta_0 \cdot \sin \theta_0)] \cdot A_{sv}^r \cdot ik_s \\
& \cdot e^{-ik_s(\cos \theta_0 y - \sin \theta_0 z)} - \left[\lambda \left(\frac{1}{K^2} \cos^2 \theta_0 \right) + (\lambda + 2\mu) \left(1 - \frac{1}{K^2} \cos^2 \theta_0 \right) \right] \\
& \cdot A_p^r \cdot ik_p \cdot e^{-ik_p \left(\left(\frac{1}{K} \cos \theta_0 \right) y - \left(\sqrt{1 - \left(\frac{1}{K^2} \cos^2 \theta_0 \right)} \right) z \right)}
\end{aligned}$$

4.4.4 Cálculo de las Amplitudes

El siguiente paso a llevar a cabo, consiste en determinar el valor de las amplitudes A_{sv}^i , A_{sv}^r y A_p^r respectivamente. Para ello, debemos considerar como nulas las tensiones en la superficie libre; esto es:

$$\forall \text{ punto } \begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ z = 0 \end{cases} \text{ se cumple } \rightarrow \begin{cases} \sigma_{23} = 0 \\ \sigma_{33} = 0 \end{cases}$$

Otras consideraciones a tener en cuenta serán:

$$A_{sv}^i = 1 \quad \frac{1}{K} = \frac{k_s}{k_p} \quad K = \frac{k_p}{k_s}$$

Por tanto, comenzaremos con $\sigma_{33} = 0$ para ($z = 0$):

$$\begin{aligned}
0 = & -[\lambda(\sin \theta_0 \cdot \cos \theta_0) - (\lambda + 2\mu)(\cos \theta_0 \cdot \sin \theta_0)] \cdot A_{sv}^i \cdot ik_s \cdot e^{-ik_s(\cos \theta_0 y)} \\
& - [-\lambda(\sin \theta_0 \cdot \cos \theta_0) + (\lambda + 2\mu)(\cos \theta_0 \cdot \sin \theta_0)] \cdot A_{sv}^r \cdot ik_s \\
& \cdot e^{-ik_s(\cos \theta_0 y)} - \left[\lambda \left(\frac{1}{K^2} \cos^2 \theta_0 \right) + (\lambda + 2\mu) \left(1 - \frac{1}{K^2} \cos^2 \theta_0 \right) \right] \cdot A_p^r \\
& \cdot ik_p \cdot e^{-ik_p \left(\left(\frac{1}{K} \cos \theta_0 \right) y \right)}
\end{aligned}$$

Tras una serie de simplificaciones llegamos a:

$$2\mu \cdot (\cos \theta_0 \cdot \sin \theta_0) \cdot ik_s - 2\mu \cdot (\cos \theta_0 \cdot \sin \theta_0) \cdot ik_s \cdot A_{sv}^r - [\lambda \cdot \cos^2 \theta_2 + (\lambda + 2\mu) \cdot \sin^2 \theta_2] \cdot ik_p \cdot A_p^r = 0$$

$$\Leftrightarrow \mu \cdot \sin 2\theta_0 - \mu \cdot \sin 2\theta_0 \cdot A_{sv}^r - (\lambda + 2\mu \sin^2 \theta_2) \cdot K \cdot A_p^r = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 2\theta_0 - \sin 2\theta_0 \cdot A_{sv}^r - \left(\frac{\lambda}{\mu} + 2 \sin^2 \theta_2\right) \cdot K \cdot A_p^r = 0 \quad (2^*)$$

Haciendo hincapié en (2^{*}):

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} + 2 - 2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} - 2 = \left(\frac{1}{K}\right)^2 - 2$$

Volviendo a (2^{*}):

$$\Leftrightarrow \sin 2\theta_0 - \sin 2\theta_0 \cdot A_{sv}^r - \left[\frac{1}{K^2} - 2 + 2 \sin^2 \theta_2\right] \cdot K \cdot A_p^r = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 2\theta_0 - \sin 2\theta_0 \cdot A_{sv}^r - \left[\frac{1}{K^2} - 2 + 2(1 - \sin^2 \theta_2)\right] \cdot K \cdot A_p^r = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 2\theta_0 - \sin 2\theta_0 \cdot A_{sv}^r - \frac{1}{K} \cdot (1 - 2K^2 \cdot \cos^2 \theta_2) \cdot A_p^r = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 2\theta_0 \cdot A_{sv}^r + \frac{1}{K} \cdot (1 - 2K^2 \cdot \cos^2 \theta_2) \cdot A_p^r = \sin 2\theta_0 \quad (3^*)$$

Pasamos ahora a operar con $\sigma_{23} = \sigma_{32} = 0$ para ($z = 0$):

$$\begin{aligned} 0 = & -\mu(\sin^2 \theta_0 - \cos^2 \theta_0) \cdot A_{sv}^i \cdot ik_s \cdot e^{-ik_s(\cos \theta_0 y)} - \mu(\sin^2 \theta_0 + \cos^2 \theta_0) \cdot A_{sv}^r \cdot ik_s \\ & \cdot e^{-ik_s(\cos \theta_0 y)} - \mu \left(2 \left(\frac{1}{K} \cos \theta_0 \right) \left(-\sqrt{1 - \left(\frac{1}{K^2} \cos^2 \theta_0 \right)} \right) \right) \cdot A_p^r \cdot ik_p \\ & \cdot e^{-ik_p \left(\left(\frac{1}{K} \cos \theta_0 \right) y \right)} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 0 = \mu \cdot (\sin^2 \theta_0 - \cos^2 \theta_0) \cdot ik_s - \mu \cdot (\sin^2 \theta_0 - \cos^2 \theta_0) \cdot ik_s \cdot A_{sv}^r - \mu \cdot (-\sin \theta_2 \cdot \cos \theta_2 - \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_2) \cdot ik_p \cdot A_p^r$$

$$\Leftrightarrow \cos 2\theta_0 \cdot A_{sv}^r + \sin 2\theta_2 \cdot K \cdot A_p^r = -\cos 2\theta_0 \quad (4^*)$$

Por tanto, hemos generado un sistema de dos ecuaciones ((3^{*}) y (4^{*})) a resolver; dicha resolución, se llevará a cabo utilizando el programa *MATLAB*. Así:

$$\begin{cases} \sin 2\theta_0 \cdot A_{sv}^r + \frac{1}{K} \cdot (1 - 2K^2 \cdot \cos^2 \theta_2) \cdot A_p^r = \sin 2\theta_0 \\ \cos 2\theta_0 \cdot A_{sv}^r + K \cdot \sin 2\theta_2 \cdot A_p^r = -\cos 2\theta_0 \end{cases}$$

$$A_{sv}^r = -\frac{-2K^2 \cdot \sin 2\theta_0 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_2 - \cos 2\theta_0 + 2 \cos 2\theta_0 \cdot K^2 \cdot \cos^2 \theta_2}{2K^2 \cdot \sin 2\theta_0 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_2 + 2 \cos 2\theta_0 \cdot K^2 \cdot \cos^2 \theta_2 - \cos 2\theta_0}$$

$$A_p^r = \frac{-2 \cos 2\theta_0 \cdot K \cdot \sin 2\theta_0}{2K^2 \cdot \sin 2\theta_0 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_2 + 2K^2 \cdot \cos 2\theta_0 \cdot \cos \theta_2 - \cos 2\theta_0}$$

Procedemos a realizar algunas simplificaciones:

En el denominador de A_p^r :

$$2K^2 \cdot \sin 2\theta_0 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_2 + 2K^2 \cdot \cos 2\theta_0 \cdot \cos \theta_2 - \cos 2\theta_0$$

$$\Leftrightarrow K^2 \cdot \sin 2\theta_0 \cdot \sin 2\theta_2 + \cos 2\theta_0 \cdot (-1 + 2K^2 \cos^2 \theta_2)$$

$$\Leftrightarrow K^2 \cdot \sin 2\theta_0 \cdot \sin 2\theta_2 + \cos^2 2\theta_0$$

En el numerador de A_{sv}^r :

$$2K^2 \cdot \sin 2\theta_0 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_2 + \cos 2\theta_0 - 2 \cos 2\theta_0 \cdot K^2 \cdot \cos^2 \theta_2$$

$$\Leftrightarrow K^2 \cdot \sin 2\theta_0 \cdot \sin 2\theta_2 + \cos 2\theta_0 \cdot (1 - 2K^2 \cdot \cos^2 \theta_2)$$

$$\Leftrightarrow K^2 \cdot \sin 2\theta_0 \cdot \sin 2\theta_2 - \cos^2 2\theta_0$$

En el numerador de A_p^r :

$$-2 \cos 2\theta_0 \cdot K \cdot \sin 2\theta_0$$

$$\Leftrightarrow -K \cdot \sin 4\theta_0$$

Finalmente, las expresiones finales de las amplitudes de las ondas reflejadas serán:

$$A_{sv}^r = \frac{K^2 \cdot \sin 2\theta_0 \cdot \sin 2\theta_2 - \cos^2 2\theta_0}{K^2 \cdot \sin 2\theta_0 \cdot \sin 2\theta_2 + \cos^2 2\theta_0} \quad (3.1)$$

$$A_p^r = -\frac{K \cdot \sin 4\theta_0}{K^2 \cdot \sin 2\theta_0 \cdot \sin 2\theta_2 + \cos^2 2\theta_0} \quad (4.1)$$

A continuación, representaremos mediante gráficas la evolución que experimentan estas amplitudes para un rango de valores de θ_0 comprendido entre 0° y 90° . Así, tenemos que:

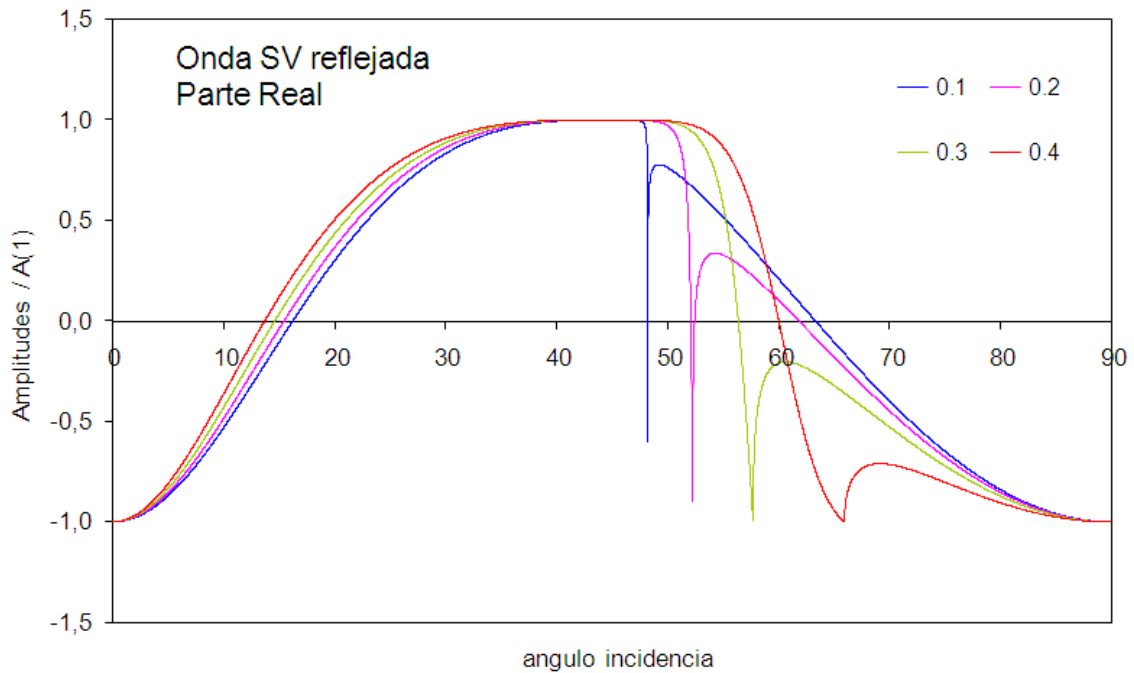


Figura 4.4. Onda SV reflejada. Parte real.

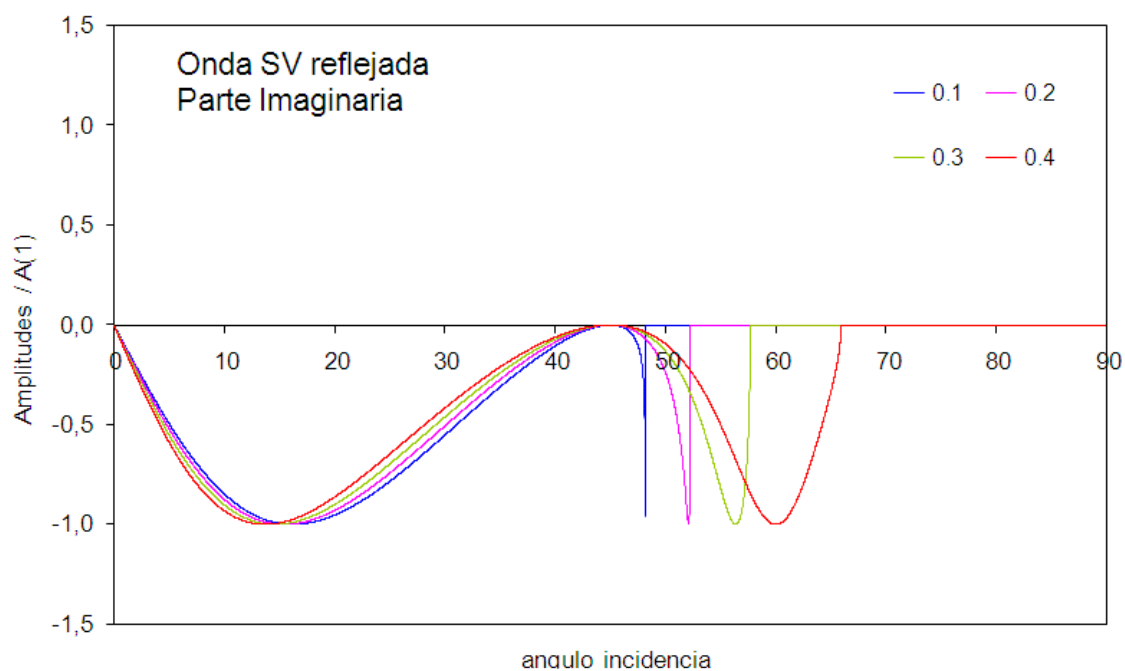


Figura 4.5. Onda SV reflejada. Parte imaginaria.

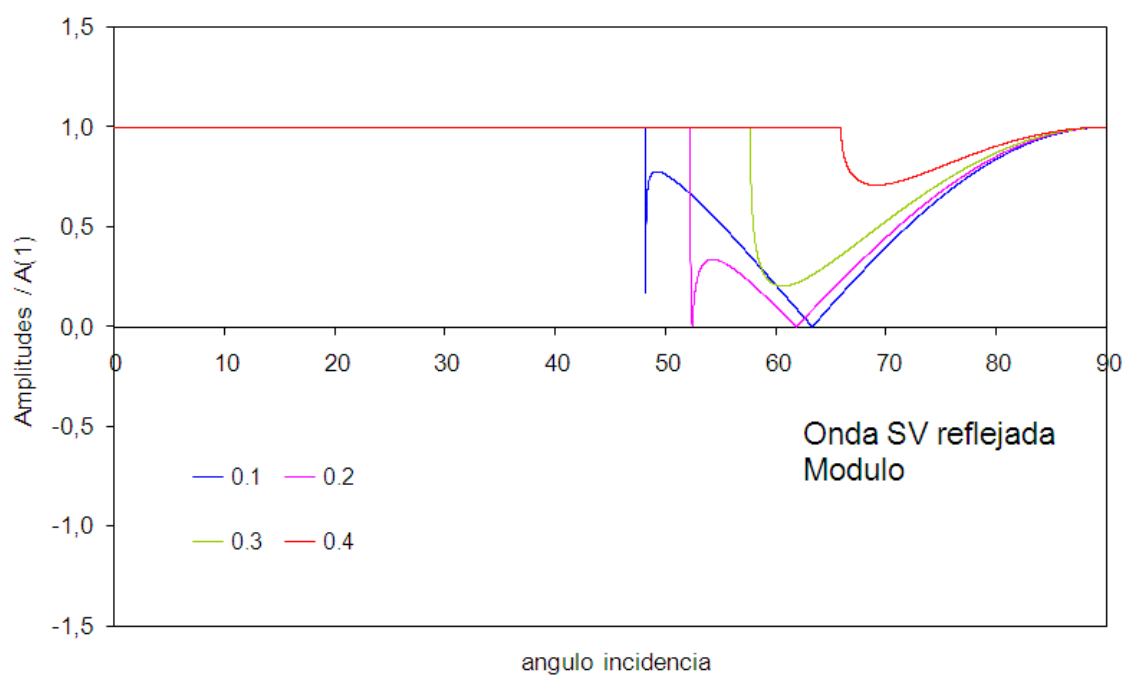


Figura 4.6. Onda SV reflejada. Módulo.

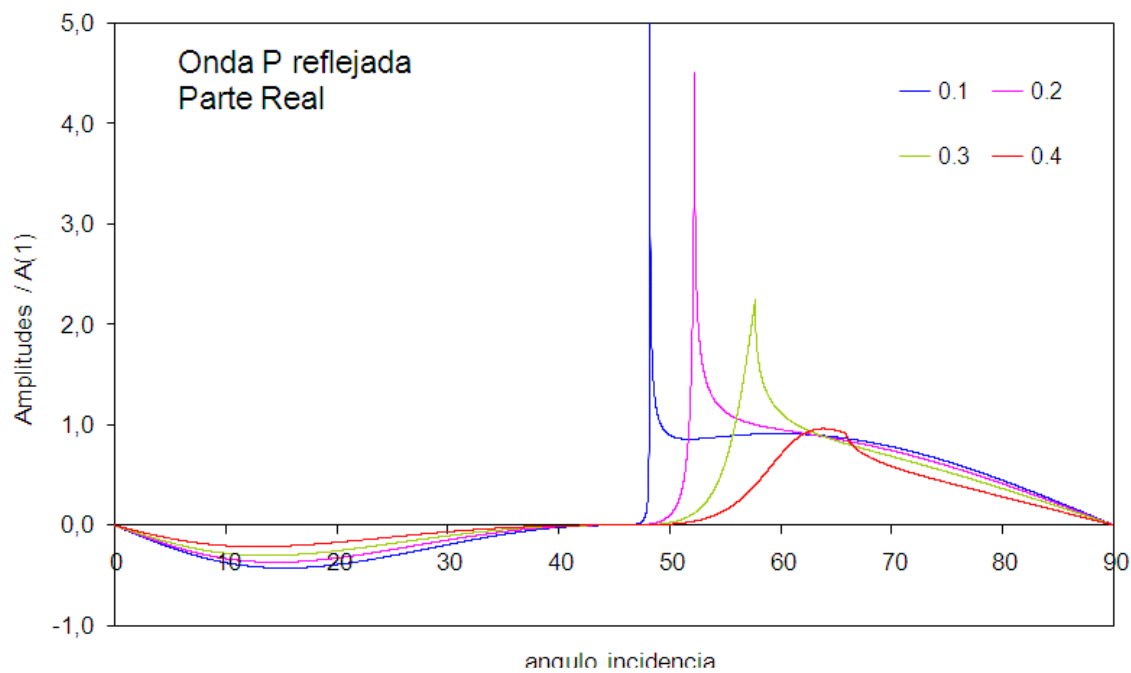


Figura 4.7. Onda P reflejada. Parte real.

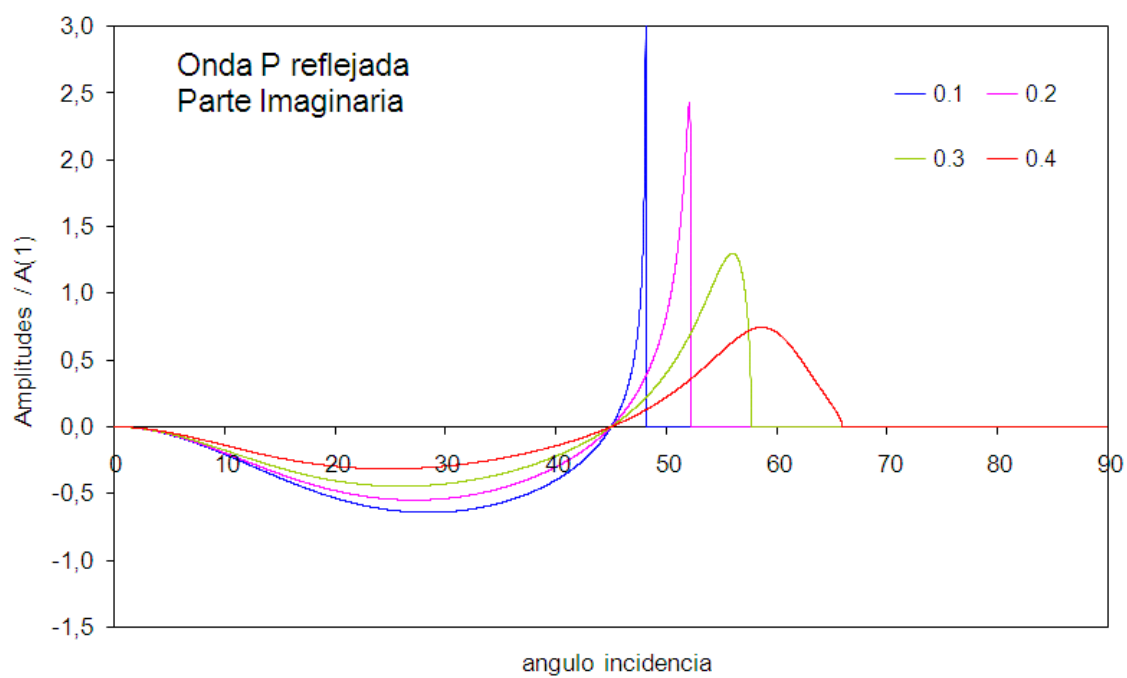


Figura 4.8. Onda P reflejada. Parte imaginaria.

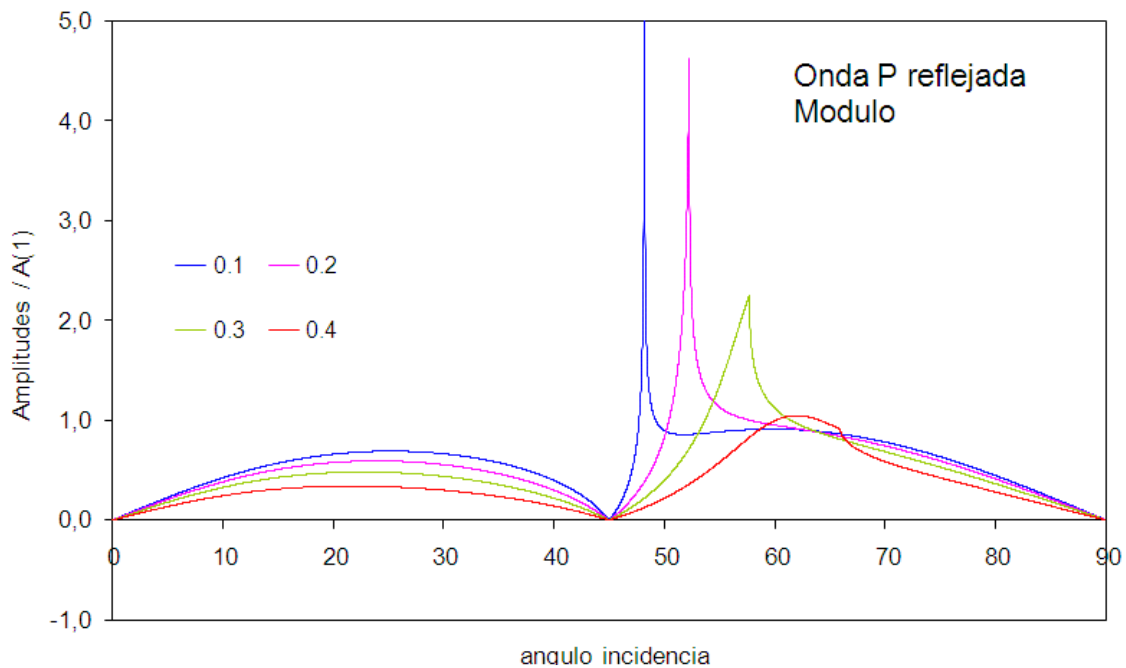


Figura 4.9. Onda P reflejada. Módulo.

Quedan aquí representadas, a través de estas 6 gráficas, diferentes valores de la amplitud para la incidencia de una onda SV variable. En dichas gráficas, se presentan la parte real, imaginaria y el módulo para cada onda reflejada. Los resultados han sido valorados en función del coeficiente de Poisson, cuyo rango de valores varía entre 0,1 – 0,4. En lo que se refiere al análisis de las gráficas, podemos observar las variaciones que se producen en el valor de la amplitud para valores del ángulo crítico (en función de cada coeficiente de Poisson), así como en las inmediaciones del mismo. También pueden observarse los cambios de modo tanto para la onda SV como para la onda P. decir que estos cambios de modo se producen sólo a partir de ciertos valores del coeficiente de Poisson. Se entiende bien el cambio de modo en la respuesta de la estructura visto el cambio en las amplitudes del campo incidente por encima y por debajo del ángulo crítico.

4.4.5 La onda SV y el ángulo crítico

Ahora se comentarán algunas “cositas” que hacen referencia a este tipo de onda (SV) y lo que ocurre en las proximidades de la singularidad del ángulo crítico. Así, diremos que:

En el caso de que la onda SV incidente provocara el reflejo de una onda SV y una onda P rasante, implicaría que:

$$\cos \theta_2 = 1$$

$$\sin \theta_2 = 0$$

Por tanto, esto conllevará que:

$$\cos \theta_2 = \frac{1}{K} \cdot \cos \theta_0$$

$$\Leftrightarrow \cos \theta_{cr} = K$$

Particularizando las expresiones (3.1) y (4.1) para este caso concreto (*onda P rasante*), ocurre que:

$$A_{sv}^r = -\frac{\cos^2 2\theta_0}{\cos^2 2\theta_0} = -1$$

$$A_p^r = -\frac{K \cdot \sin 4\theta_0}{\cos^2 2\theta_0}$$

Ahora se tendrán en cuenta las siguientes simplificaciones:

$$\cos 4\theta_0 = 4 \sin \theta_0 \cdot \cos \theta_0 \cdot (\cos^2 \theta_0 - \sin^2 \theta_0)$$

$$\cos^2 2\theta_0 = (\cos^2 \theta_0 - \sin^2 \theta_0)^2$$

Además, el hecho de que $\cos \theta_0 = K$ implicará que:

$$\sin \theta_0 = \sqrt{1 - K^2}$$

De modo que:

$$\sin 4\theta_0 = 4K \cdot (\sqrt{1 - K^2}) \cdot (2K^2 - 1)$$

$$\cos^2 2\theta_0 = (2K^2 - 1)^2$$

Por tanto, tras realizar las simplificaciones necesarias, las expresiones particularizadas tanto de (3.1) como (4.1) quedarán reducidas a:

$$A_{sv}^r = -1$$

$$A_p^r = -\frac{4K^2\sqrt{1-K^2} \cdot (2K^2 - 1)}{(2K^2 - 1)^2} = -\frac{4K^2\sqrt{1-K^2}}{2K^2 - 1}$$

Vamos a estudiar ahora el caso en el que $\theta_0 < \theta_{cr}$, lo cual nos obligaba a utilizar razones trigonométricas de carácter complejo; el hecho de que el ángulo de incidencia θ_0 sea menor que el ángulo crítico θ_{cr} implica que:

$$\cos \theta_0 > K$$

Lo que conlleva a que:

$$\cos \theta_2 = \frac{1}{K} \cdot \cos \theta_0 > 1 \quad (\text{singular})$$

$$\sin \theta_2 = \pm i \sqrt{\frac{1}{K^2} \cos^2 \theta_0 - 1} \quad (\text{imaginario puro})$$

Ahora introduciremos el valor de $\sin \theta_2$ y $\cos \theta_2$ en las expresiones obtenidas para A_{sv}^r y A_p^r anteriormente (expresiones (3.1) y (4.1)).

$$A_{sv}^r = \frac{K^2 \cdot \sin 2\theta_0 \cdot \sin 2\theta_2 - \cos^2 2\theta_0}{K^2 \cdot \sin 2\theta_0 \cdot \sin 2\theta_2 + \cos^2 2\theta_0}$$

$$A_{sv}^r = \frac{K^2 \cdot \sin 2\theta_0 \cdot 2 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_2 - \cos^2 2\theta_0}{K^2 \cdot \sin 2\theta_0 \cdot 2 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_2 + \cos^2 2\theta_0}$$

$$A_{sv}^r = \frac{\pm 2K^2 \cdot \sin 2\theta_0 \cdot \frac{1}{K} \cdot \cos \theta_0 \cdot \sqrt{\frac{1}{K^2} \cos^2 \theta_0 - 1} i - \cos^2 2\theta_0}{\pm 2K^2 \cdot \sin 2\theta_0 \cdot \frac{1}{K} \cdot \cos \theta_0 \cdot \sqrt{\frac{1}{K^2} \cos^2 \theta_0 - 1} i + \cos^2 2\theta_0}$$

Se trata de un cociente entre dos complejos conjugados, donde:

$$A_{sv}^r = -\frac{a + bi}{a - bi}$$

Donde:

$$a = \cos^2 2\theta_0$$

$$b = \pm 2K^2 \cdot \sin 2\theta_0 \cdot \frac{1}{K} \cdot \cos \theta_0 \cdot \sqrt{\frac{1}{K^2} \cos^2 \theta_0 - 1}$$

Operando:

$$A_{sv}^r = -\frac{(a + bi) \cdot (a + bi)}{(a - bi) \cdot (a + bi)} = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} - \frac{2ba}{a^2 + b^2} i$$

$$|A_{sv}^r| = \frac{(a^2 - b^2)^2 + 4b^2 a^2}{(a^2 + b^2)^2} = \frac{a^4 + 2b^2 a^2 + b^4}{(a^2 + b^2)^2} = \frac{(a^2 + b^2)^2}{(a^2 + b^2)^2} = 1$$

Lo que nos lleva a concluir que para $\theta_0 < \theta_{cr}$ se cumple que:

$$|A_{sv}^r| = 1$$

Por otro lado:

$$A_p^r = -\frac{K \cdot \sin 4\theta_0}{K^2 \cdot \sin 2\theta_0 \cdot 2 \sin \theta_2 \cos \theta_2 + \cos^2 2\theta_2}$$

$$A_p^r = -\frac{K \cdot \sin 4\theta_0}{\pm 2K^2 \cdot \sin 2\theta_0 \cdot \frac{1}{K} \cdot \cos \theta_0 \cdot \sqrt{\frac{1}{K^2} \cos^2 \theta_0} i + \cos^2 2\theta_0}$$

$$A_p^r = -\frac{K \cdot \sin 4\theta_0}{\pm 2 \cdot \sin 2\theta_0 \cdot \cos \theta_0 \cdot \sqrt{\cos^2 \theta_0 - K^2} i + \cos^2 2\theta_0}$$

Se trata de un número complejo, el cual no vamos a someter a más simplificaciones; por otro lado, podemos ver a qué tipo de ondas conducen estas expresiones. Para ello, recurriremos a las expresiones del campo de desplazamiento:

$$\begin{cases} u = 0 \\ v = d_2^{(0)} \cdot A_{sv}^i \cdot e^{-ik_s(p^{(0)} \cdot r)} + d_2^{(1)} \cdot A_{sv}^r \cdot e^{-ik_s(p^{(1)} \cdot r)} + d_2^{(2)} \cdot A_p^r \cdot e^{-ik_p(p^{(2)} \cdot r)} \\ w = d_3^{(0)} \cdot A_{sv}^i \cdot e^{-ik_s(p^{(0)} \cdot r)} + d_3^{(1)} \cdot A_{sv}^r \cdot e^{-ik_s(p^{(1)} \cdot r)} + d_3^{(2)} \cdot A_p^r \cdot e^{-ik_p(p^{(2)} \cdot r)} \end{cases}$$

Donde:

$$A_{sv}^i = 1$$

A_{sv}^r y A_p^r son números complejos.

$$\theta_0 < \theta_{cr}$$

Por otro lado:

$$\begin{cases} p^{(0)} \cdot r = p_2^{(0)} \cdot y + p_3^{(0)} \cdot z = \cos \theta_0 y + \sin \theta_0 z \\ p^{(1)} \cdot r = p_2^{(1)} \cdot y + p_3^{(1)} \cdot z = \cos \theta_0 y - \sin \theta_0 z \\ p^{(2)} \cdot r = p_2^{(2)} \cdot y + p_3^{(2)} \cdot z = \cos \theta_2 y - \sin \theta_2 z \end{cases}$$

Como puede verse, no hay ningún problema con $p^{(0)} \cdot r$ y $p^{(1)} \cdot r$; en cambio, existen inconvenientes con el término correspondiente a la onda P reflejada. Véase que:

$$\begin{Bmatrix} v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_2^{(2)} \\ d_3^{(2)} \end{Bmatrix} \cdot A_p^r \cdot e^{-ik_p(\cos \theta_2 y - \sin \theta_2 z)}$$

$$\begin{Bmatrix} v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \theta_2 \\ -\sin \theta_2 \end{Bmatrix} \cdot A_p^r \cdot e^{-ik_p(\cos \theta_2 y - \sin \theta_2 z)}$$

$$\begin{Bmatrix} v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{K} \cos \theta_0 \\ \pm i \cdot (-1) \cdot \sqrt{1/K^2 \cos^2 \theta_0 - 1} \end{Bmatrix} \cdot A_p^r \cdot e^{-ik_p \left(\left(\frac{1}{K} \cos \theta_0 \right) y - (\pm i) \left(\sqrt{\frac{1}{K^2} \cos^2 \theta_0 - 1} \right) z \right)}$$

Adoptaremos como solución el valor negativo de la parte imaginaria ($-i$) del número complejo; así, tenemos que:

$$\begin{Bmatrix} v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{K} \cos \theta_0 \\ i \sqrt{\frac{1}{K^2} \cos^2 \theta_0 - 1} \end{Bmatrix} \cdot A_p^r \cdot e^{-ik_p \left(\left(\frac{1}{K} \cos \theta_0 \right) y + i \left(\sqrt{\frac{1}{K^2} \cos^2 \theta_0 - 1} \right) z \right)}$$

$$\begin{Bmatrix} v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{K} \cos \theta_0 \\ i \sqrt{\frac{1}{K^2} \cos^2 \theta_0 - 1} \end{Bmatrix} \cdot A_p^r \cdot e^{k_p \left(\sqrt{\frac{1}{K^2} \cos^2 \theta_0 - 1} \right) z} \cdot e^{-ik_p \left(\frac{1}{K} \cos \theta_0 \right) y}$$

Considerando que $\frac{1}{K} = \frac{k_s}{k_p}$, tenemos que:

$$\begin{Bmatrix} v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{K} \cos \theta_0 \\ i \sqrt{\frac{1}{K^2} \cos^2 \theta_0 - 1} \end{Bmatrix} \cdot A_p^r \cdot e^{\xi z} \cdot e^{-i(k_s \cos \theta_0) y}$$

Siendo:

$$\xi = k_p \cdot \sqrt{\frac{1}{K^2} \cos^2 \theta_0 - 1} \in \mathbb{R}$$

Tras haber estado operando con las expresiones del campo de desplazamiento con el fin de averiguar el tipo de onda que le corresponde, se concluye que se trata de una onda que se propaga en dirección del “*eje y*” (rasante), con desplazamientos en dirección “*y*” y “*z*”, desfasados 90° y en amplitud compleja A_p^r que decrece con la profundidad según ξ .

Finalmente y a modo de sacar una conclusión sobre cómo tratar este tipo de casos, diremos que se deberá de considerar $p^{(i)}$ y $d^{(i)}$ siempre como complejos para casos en los que $\theta_0 < \theta_{cr}$. Dicho de otra forma:

$$p^{(2)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \cos \theta_2 \\ -\sin \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1/K \cdot \cos \theta_0 \\ i \sqrt{\frac{1}{K^2} \cos^2 \theta_0 - 1} \end{Bmatrix}$$

$$d^{(2)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \cos \theta_2 \\ -\sin \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1/K \cdot \cos \theta_0 \\ i \sqrt{\frac{1}{K^2} \cos^2 \theta_0 - 1} \end{Bmatrix}$$

Estas expresiones serán introducidas directamente en las ecuaciones del campo de desplazamiento y, posteriormente, de la tensión, obviando la posibilidad de deducir unas expresiones nuevas.

4.5 Onda Rayleigh

Partiendo del siguiente gráfico inicial:

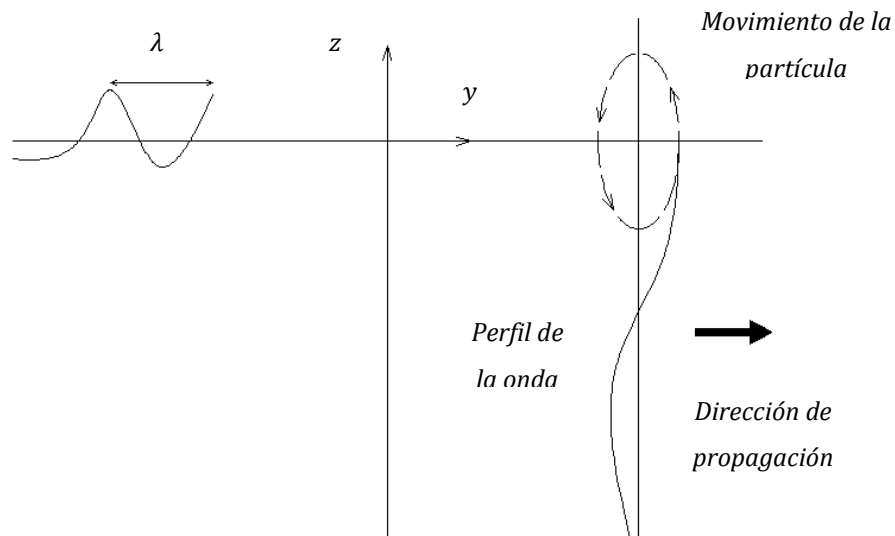


Figura 4.10. Onda de Rayleigh. Gráfico explicativo.

Inicialmente, realizaremos una serie de suposiciones en las expresiones del campo de desplazamientos en virtud de lo reflejado en el gráfico. Así, se tiene que:

$$\begin{cases} u = 0 \\ v = A \cdot e^{bz} \cdot e^{iK(Ct-y)} \\ w = B \cdot e^{bz} \cdot e^{iK(Ct-y)} \end{cases}$$

Ahora trataremos de comprobar que estas ecuaciones satisfacen las ecuaciones de gobierno de la Elastodinámica. Para ello, partiremos de la expresión de Navier:

$$G \cdot \nabla^2 u + (\lambda + G) \cdot \nabla(\nabla u) = \rho \cdot \ddot{u}$$

Particularizando para cada componente del campo de desplazamientos, obtenemos tres ecuaciones tales que:

$$G \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + (\lambda + G) \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) = \rho \cdot \ddot{u}$$

$$G \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + (\lambda + G) \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right) = \rho \cdot \ddot{v}$$

$$G \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + (\lambda + G) \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) = \rho \cdot \ddot{w}$$

Calculamos cada uno de los términos expuestos en las expresiones anteriores:

Todos aquellos términos relacionados con la componente u del campo de desplazamientos son nulos.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -K^2 \cdot A \cdot e^{bz} \cdot e^{iK(Ct-y)}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = b^2 \cdot A \cdot e^{bz} \cdot e^{iK(Ct-y)}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -K^2 \cdot B \cdot e^{bz} \cdot e^{iK(Ct-y)}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = b^2 \cdot B \cdot e^{bz} \cdot e^{iK(Ct-y)}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = -iK \cdot b \cdot B \cdot e^{bz} \cdot e^{iK(Ct-y)}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} = -b \cdot iK \cdot A \cdot e^{bz} \cdot e^{iK(Ct-y)}$$

Ahora sustituimos en la ecuación de Navier particularizada para cada componente del campo de desplazamientos:

$$\begin{aligned} G(-K^2 A \cdot e^{bz} \cdot e^{iK(Ct-y)} + b^2 A \cdot e^{bz} \cdot e^{iK(Ct-y)}) \\ + (\lambda + G)(-K^2 A \cdot e^{bz} \cdot e^{iK(Ct-y)} - iKb \cdot B \cdot e^{bz} \cdot e^{iK(Ct-y)}) \\ = -\rho\omega^2 A \cdot e^{bz} \cdot e^{iK(Ct-y)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(-K^2 B \cdot e^{bz} \cdot e^{iK(Ct-y)} + b^2 B \cdot e^{bz} \cdot e^{iK(Ct-y)}) \\ + (\lambda + G)(-iKb \cdot A \cdot e^{bz} \cdot e^{iK(Ct-y)} + b^2 B \cdot e^{bz} \cdot e^{iK(Ct-y)}) \\ = -\rho\omega^2 B \cdot e^{bz} \cdot e^{iK(Ct-y)} \end{aligned}$$

Tratando de simplificar las expresiones, se tiene que:

$$G(-K^2 A + b^2 A) + (\lambda + G)(-K^2 A - iKb \cdot B) = -\rho\omega^2 A$$

$$G(-K^2 B + b^2 B) + (\lambda + G)(-iKb \cdot A + b^2 B) = -\rho\omega^2 B$$

Sacamos factor común A y B:

$$(-K^2 G + b^2 G - K^2(\lambda + G) + \rho\omega^2)A - iKb(\lambda + G)B = 0$$

$$-iKb(\lambda + G)A + (-K^2 G + b^2 G + b^2(\lambda + G) + \rho\omega^2)B = 0$$

$$[b^2G - K^2(\lambda + 2G) + \rho\omega^2]A - iKb(\lambda + G)B = 0$$

$$-iKb(\lambda + G)A + [b^2(\lambda + 2G) - K^2G + \rho\omega^2]B = 0$$

Buscamos una solución al sistema diferente de la trivial (es decir, que A y B tengan valor nulo); por tanto, trataremos de comprobar que valores de b provocan que las expresiones anteriores sean nulas; por ello:

$$\begin{vmatrix} b^2G - K^2(\lambda + 2G) & -iKb(\lambda + G) \\ -iKb(\lambda + G) & b^2(\lambda + 2G) - K^2G + \rho\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

Hallamos el determinante:

$$[b^2G - K^2(\lambda + 2G)] \cdot [b^2(\lambda + 2G) - K^2G + \rho\omega^2] - [iKb(\lambda + G)]^2 = 0$$

Dividiendo todo el determinante por ρ , se tiene que:

$$\left[b^2 \left(\frac{G}{\rho} \right) - K^2 \left(\frac{\lambda + 2G}{\rho} \right) + \omega^2 \right] A - iKb \left(\frac{\lambda + G}{\rho} \right) B = 0$$

$$-iKb \left(\frac{\lambda + G}{\rho} \right) A + \left[b^2 \left(\frac{\lambda + 2G}{\rho} \right) - K^2 \left(\frac{G}{\rho} \right) + \omega^2 \right] B = 0$$

De modo que:

$$(b^2C_s^2 - K^2C_p^2 + \omega^2)A - (iKb(C_p^2 - C_s^2))B = 0$$

$$(-iKb(C_p^2 - C_s^2))A + (b^2C_p^2 - K^2C_s^2 + \omega^2)B = 0$$

Así:

$$(b^2C_s^2 + K^2(C^2 - C_p^2))A - (iKb(C_p^2 - C_s^2))B = 0 \quad (1)$$

$$(-iKb(C_p^2 - C_s^2))A + (b^2C_p^2 + K^2(C^2 - C_s^2))B = 0 \quad (2)$$

Ahora volvemos a calcular el determinante:

$$\begin{aligned}
 & [b^2 C_s^2 + K^2(C^2 - C_p^2)] \cdot [b^2 C_p^2 + K^2(C^2 - C_s^2)] - K^2 b^2 (C_p^2 - C_s^2)^2 = 0 \\
 & b^4 C_s^2 C_p^2 + b^2 K^2 C_s^2 (C^2 - C_s^2) + b^2 K^2 C_p^2 (C^2 - C_p^2) + K^4 (C^2 - C_p^2)(C^2 - C_s^2) \\
 & \quad - K^2 b^2 (C_p^2 - C_s^2)^2 = 0 \\
 & b^4 (C_s^2 C_p^2) + b^2 [K^2 C_s^2 (C^2 - C_s^2) + K^2 C_p^2 (C^2 - C_p^2) - K^2 (C_p^2 - C_s^2)^2] \\
 & \quad + K^4 (C^2 - C_p^2)(C^2 - C_s^2) = 0
 \end{aligned}$$

Vamos a identificar términos a fin de obtener las soluciones de b. Por ello, tenemos que:

$$mb^4 + nb^2 + l = 0$$

$$m = C_s^2 C_p^2$$

$$n = K^2 [C_s^2 (C^2 - C_s^2) + C_p^2 (C^2 - C_p^2) - (C_p^2 - C_s^2)^2]$$

$$l = K^4 (C^2 - C_p^2)(C^2 - C_s^2)$$

Operando en “n”:

$$n = K^2 [C_s^2 C^2 - C_s^4 + C_p^2 C^2 - C_p^4 - (C_p^4 - 2C_p^2 C_s^2 + C_s^4)]$$

$$n = K^2 [C_s^2 C^2 - 2C_s^4 + C_p^2 C^2 - 2C_p^4 + 2C_p^2 C_s^2]$$

Buscamos las soluciones de “b”:

$$b^2 = \frac{-K^2 [C_s^2 C^2 - 2C_s^4 + C_p^2 C^2 - 2C_p^4 + 2C_p^2 C_s^2] \pm \sqrt{a}}{2C_s^2 C_p^2}$$

Siendo:

$$a = K^4 (C_s^2 C^2 - 2C_s^4 + C_p^2 C^2 - 2C_p^4 + 2C_p^2 C_s^2)^2 - 4C_s^2 C_p^2 K^4 (C^2 - C_p^2)(C^2 - C_s^2)$$

Por tanto, reubicando el valor de “a”:

$$b^2 = \frac{-K^2[C_s^2 C^2 + C_p^2 C^2 - 2C_p^2 C_s^2] \pm K^2 \sqrt{[C_s^2(C^2 - C_p^2) - C_p^2(C^2 - C_s^2)]^2}}{2C_s^2 C_p^2}$$

Existen 2 posibles soluciones:

$$b_1^2 = \frac{-K^2[C_s^2 C^2 + C_p^2 C^2 - 2C_p^2 C_s^2] + K^2[C_s^2(C^2 - C_p^2) - C_p^2(C^2 - C_s^2)]}{2C_s^2 C_p^2}$$

$$b_2^2 = \frac{-K^2[C_s^2 C^2 + C_p^2 C^2 - 2C_p^2 C_s^2] - K^2[C_s^2(C^2 - C_p^2) - C_p^2(C^2 - C_s^2)]}{2C_s^2 C_p^2}$$

Operando correctamente con las soluciones:

$$b_1^2 = \frac{K^2[-2C_p^2 C^2 + 2C_p^2 C_s^2]}{2C_s^2 C_p^2}$$

$$b_2^2 = \frac{K^2[-2C_s^2 C^2 + 2C_p^2 C_s^2]}{2C_s^2 C_p^2}$$

$$b_1^2 = K^2 \left(1 - \frac{C^2}{C_s^2} \right)$$

$$b_2^2 = K^2 \cdot \left(1 - \frac{C^2}{C_p^2} \right)$$

Volvemos a retomar el sistema de ecuaciones (1) y (2), teniéndose que:

$$(b^2 C_s^2 + K^2(C^2 - C_p^2))A - (iKb(C_p^2 - C_s^2))B = 0 \quad (1)$$

$$(-iKb(C_p^2 - C_s^2))A + (b^2 C_p^2 + K^2(C^2 - C_s^2))B = 0 \quad (2)$$

Tomando (1):

$$(b^2 C_s^2 + K^2(C^2 - C_p^2)) - (iKb(C_p^2 - C_s^2))\left(\frac{B}{A}\right) = 0$$

Tomando las raíces positivas de la solución (b):

Para $b = b_1$:

$$\left[K^2 \left(1 - \frac{C^2}{C_s^2} \right) C_s^2 + K^2 (C^2 - C_p^2) \right] - iK \left[K \left(1 - \frac{C^2}{C_s^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] (C_p^2 - C_s^2) \left(\frac{B}{A} \right) = 0$$

$$K^2 (C_s^2 - C^2) + K^2 (C^2 - C_p^2) - iK^2 \left(1 - \frac{C^2}{C_s^2} \right)^{\frac{1}{2}} (C_p^2 - C_s^2) \left(\frac{B}{A} \right) = 0$$

$$K^2 C_s^2 - K^2 C^2 - iK^2 \left(1 - \frac{C^2}{C_s^2} \right)^{\frac{1}{2}} (C_p^2 - C_s^2) \left(\frac{B}{A} \right) = 0$$

$$-K^2 (C_p^2 - C_s^2) - iK^2 (C_p^2 - C_s^2) \left(1 - \frac{C^2}{C_s^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{B}{A} \right) = 0$$

$$-1 - i \left(1 - \frac{C^2}{C_s^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{B}{A} \right) = 0$$

$$\frac{B}{A} = \frac{1}{-i \left(1 - \frac{C^2}{C_s^2} \right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{iK}{K \left(1 - \frac{C^2}{C_s^2} \right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{iK}{b_1}$$

$$\boxed{\left(\frac{B}{A} \right)_1 = \frac{iK}{b_1}}$$

Para $b = b_2$:

$$\left[K^2 \left(1 - \frac{C^2}{C_p^2} \right) C_p^2 + K^2 (C^2 - C_s^2) \right] - iK b_2 (C_p^2 - C_s^2) \left(\frac{B}{A} \right) = 0$$

$$K^2 \left(C_p^2 - C^2 \frac{C_s^2}{C_p^2} \right) + K^2 (C^2 - C_s^2) - iK b_2 (C_p^2 - C_s^2) \left(\frac{B}{A} \right) = 0$$

$$K^2 \left[C_p^2 - C^2 \frac{C_s^2}{C_p^2} + C^2 - C_s^2 \right] - iK b_2 (C_p^2 - C_s^2) \left(\frac{B}{A} \right) = 0$$

$$K^2 \left[-(C_p^2 - C_s^2) + C^2 \left(1 - \frac{C_s^2}{C_p^2} \right) \right] - iKb_2(C_p^2 - C_s^2) \left(\frac{B}{A} \right) = 0$$

$$-K^2(C_p^2 - C_s^2) + K^2 C^2 \left(\frac{C_p^2 - C_s^2}{C_p^2} \right) - iKb_2(C_p^2 - C_s^2) \left(\frac{B}{A} \right) = 0$$

$$-K + K \frac{C^2}{C_p^2} - ib_2 \left(\frac{B}{A} \right) = 0$$

$$K \left(-1 + \frac{C^2}{C_p^2} \right) - ib_2 \left(\frac{B}{A} \right) = 0$$

$$\frac{B}{A} = \frac{-K \left(-1 + \frac{C^2}{C_p^2} \right)}{-ib_2} = \frac{K \left(1 - \frac{C^2}{C_p^2} \right)}{-ib_2}$$

$$\left(\frac{B}{A} \right)_2 = \frac{K^2 \left(1 - \frac{C^2}{C_p^2} \right)}{-ib_2 K} = \frac{b_2^2}{-ib_2 K} = -\frac{b_2}{iK}$$

$$\boxed{\left(\frac{B}{A} \right)_2 = -\frac{b_2}{iK}}$$

Por tanto, podemos concluir que existe una relación entre las amplitudes que depende de los valores de b , que aportan una solución al problema diferente de la trivial. Además, garantizamos con ello que las expresiones del campo de desplazamientos satisfacen las ecuaciones de gobierno de la Elastodinámica, obteniéndose que:

$$\begin{cases} u = 0 \\ v = A_1 \cdot e^{b_1 z} \cdot e^{iK(Ct-y)} + A_2 \cdot e^{b_2 z} \cdot e^{iK(Ct-y)} \\ w = \frac{iK}{b_1} \cdot A_1 \cdot e^{b_1 z} \cdot e^{iK(Ct-y)} - \frac{b_2}{iK} \cdot A_2 \cdot e^{b_2 z} \cdot e^{iK(Ct-y)} \end{cases}$$

4.5.1 Cálculo de las amplitudes

Ahora aplicaremos condiciones de contorno en la superficie ($\sigma_{ij} = 0$). Esto conllevará lo siguiente:

$$\forall \text{ punto } \begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_{yz} = 0 \\ \sigma_{zz} = 0 \end{cases}$$

$$\sigma_{yz} = 2\mu \cdot \varepsilon_{yz} = 0$$

$$\sigma_{zz} = 2\mu \cdot \varepsilon_{zz} + \lambda \cdot \varepsilon_{kk} = 0$$

Siendo:

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\varepsilon_{kk} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

Calculamos las derivadas:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -iK(A_1 \cdot e^{b_1 z} + A_2 \cdot e^{b_2 z}) \cdot e^{iK(Ct-y)}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \left(iK \cdot A_1 \cdot e^{b_1 z} - \frac{b_2^2}{iK} \cdot A_2 \cdot e^{b_2 z} \right) \cdot e^{iK(Ct-y)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = (b_1 \cdot A_1 \cdot e^{b_1 z} + b_2 \cdot A_2 \cdot e^{b_2 z}) \cdot e^{iK(Ct-y)}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \left(\frac{K^2}{b_1} \cdot A_1 \cdot e^{b_1 z} + b_2 \cdot A_2 \cdot e^{b_2 z} \right) \cdot e^{iK(Ct-y)}$$

Ahora pasamos a realizar la sustitución de las derivadas en las expresiones anteriores:

$$\sigma_{yz} = 2\mu \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sigma_{yz} = \mu \cdot \left[(b_1 \cdot A_1 \cdot e^{b_1 z} + b_2 \cdot A_2 \cdot e^{b_2 z}) \cdot e^{iK(Ct-y)} + \left(\frac{K^2}{b_1} \cdot A_1 \cdot e^{b_1 z} + b_2 \cdot A_2 \cdot e^{b_2 z} \right) \cdot e^{iK(Ct-y)} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow b_1 \cdot A_1 \cdot e^{b_1 z} + b_2 \cdot A_2 \cdot e^{b_2 z} + \frac{K^2}{b_1} \cdot A_1 \cdot e^{b_1 z} + b_2 \cdot A_2 \cdot e^{b_2 z} = 0$$

$$\Leftrightarrow b_1 \cdot A_1 \cdot e^{b_1 z} \left(1 + \frac{K^2}{b_1^2} \right) + 2 \cdot b_2 \cdot A_2 \cdot e^{b_2 z} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{b_1 \cdot A_1 \cdot \left(1 + \frac{K^2}{b_1^2} \right) + 2 \cdot b_2 \cdot A_2 = 0} \quad (1^*)$$

$$\sigma_{zz} = 2\mu \cdot \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sigma_{zz} = 2\mu \left(iK \cdot A_1 \cdot e^{b_1 z} - \frac{b_2^2}{iK} \cdot A_2 \cdot e^{b_2 z} \right) \cdot e^{iK(Ct-y)} + \lambda \cdot \left[-iK(A_1 \cdot e^{b_1 z} + A_2 \cdot e^{b_2 z}) + \left(iK \cdot A_1 \cdot e^{b_1 z} - \frac{b_2^2}{iK} \cdot A_2 \cdot e^{b_2 z} \right) \right] \cdot e^{iK(Ct-y)} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\mu \left(iK \cdot A_1 \cdot e^{b_1 z} - \frac{b_2^2}{iK} \cdot A_2 \cdot e^{b_2 z} \right) + \lambda \left(-iK \cdot A_2 \cdot e^{b_2 z} - \frac{b_2^2}{iK} \cdot A_2 \cdot e^{b_2 z} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2iK \cdot A_1 \cdot \mu \cdot e^{b_1 z} - 2 \frac{b_2^2}{iK} \cdot A_2 \cdot \mu \cdot e^{b_2 z} - iK \cdot A_2 \cdot \lambda \cdot e^{b_2 z} - \frac{b_2^2}{iK} \cdot A_2 \cdot \lambda \cdot e^{b_2 z} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2iK \cdot \mu \cdot e^{b_1 z}) \cdot A_1 - \left(2 \frac{b_2^2}{iK} \cdot \mu \cdot e^{b_2 z} + iK \cdot \lambda \cdot e^{b_2 z} + \frac{b_2^2}{iK} \cdot \lambda \cdot e^{b_2 z} \right) \cdot A_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2iK \cdot \mu \cdot e^{b_1 z} \cdot A_1 - \left[-2 \frac{b_2^2}{K^2} \mu + \lambda - \frac{b_2^2}{K^2} \lambda \right] iK \cdot e^{b_2 z} \cdot A_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\mu \cdot e^{b_1 z} \cdot A_1 + \left[\frac{b_2^2}{K^2} (2\mu + \lambda) - \lambda \right] \cdot e^{b_2 z} \cdot A_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\mu \cdot e^{b_1 z} \cdot A_1 + \left[2\mu \cdot \frac{b_2^2}{K^2} - \lambda \left(1 - \frac{b_2^2}{K^2} \right) \right] \cdot e^{b_2 z} \cdot A_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{2\mu \cdot A_1 + \left[2\mu \cdot \frac{b_2^2}{K^2} - \lambda \left(1 - \frac{b_2^2}{K^2} \right) \right] \cdot A_2 = 0} \quad (2^*)$$

Trabajando con (1*) y (2*):

$$\begin{vmatrix} b_1 \left(1 + \frac{K^2}{b_1^2} \right) & 2b_2 \\ 2\mu & 2\mu \cdot \frac{b_2^2}{K^2} - \lambda \left(1 - \frac{b_2^2}{K^2} \right) \end{vmatrix} = 0$$

Si $\gamma_s = \frac{c^2}{c_s^2}$ y $\gamma_p = \frac{c^2}{c_p^2}$, entonces se tiene que:

$$\frac{K^2}{b_1^2} = \frac{1}{1 - C^2/C_s^2} = \frac{1}{1 - \gamma_s}$$

$$\frac{b_2^2}{K^2} = 1 - \frac{C^2}{C_p^2} = 1 - \gamma_p$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} b_1 \cdot \left(1 + \frac{1}{1 - \gamma_s} \right) & 2b_2 \\ 2\mu & 2\mu(1 - \gamma_p) - \lambda(1 - 1 + \gamma_p) \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} b_1 \left(\frac{1 - \gamma_s + 1}{1 - \gamma_s} \right) & 2b_2 \\ 2\mu & 2\mu(1 - \gamma_p) - \lambda\gamma_p \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{vmatrix} b_1 \left(\frac{2 - \gamma_s}{1 - \gamma_s} \right) & 2b_2 \\ 2\mu & 2\mu(1 - \gamma_p) - \lambda\gamma_p \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow (1 - \gamma_s)^{-1} \cdot b_1 \mu \cdot \begin{vmatrix} (2 - \gamma_s) & 2 \frac{b_2}{b_1} (1 - \gamma_s) \\ 2 & 2(1 - \gamma_p) - \frac{\lambda}{\mu} \gamma_p \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow (2 - \gamma_s) \cdot \underbrace{\left[2(1 - \gamma_p) - \frac{\lambda}{\mu} \gamma_p \right]}_{1^\circ \text{ término}} - 4 \underbrace{\frac{b_2}{b_1} (1 - \gamma_s)}_{2^\circ \text{ término}} = 0
\end{aligned}$$

Ahora trabajaremos con los dos términos de esta última expresión por separado, con el fin de simplificar la expresión final. Primeramente, por un lado:

$$2(1 - \gamma_p) - \frac{\lambda}{\mu} \gamma_p$$

Donde:

$$\begin{aligned}
&Si \left. \begin{aligned} C_s^2 &= \frac{\mu}{\rho} \\ C_p^2 &= \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \end{aligned} \right\} \frac{\lambda}{\mu} = \frac{C_p^2 - 2C_s^2}{C_s^2} \\
&\Leftrightarrow \frac{\lambda}{\mu} = \left(\frac{C_p^2}{C_s^2} - 2 \right) \text{ siendo } \frac{C_p^2}{C_s^2} = \gamma_s \cdot \frac{1}{\gamma_p}
\end{aligned}$$

Por tanto, volviendo al 1º término de la ecuación:

$$\begin{aligned}
&2(1 - \gamma_p) - \frac{\lambda}{\mu} \gamma_p \\
&\Leftrightarrow 2(1 - \gamma_p) - \left(\frac{\gamma_s}{\gamma_p} - 2 \right) \gamma_p \\
&\Leftrightarrow 2(1 - \gamma_p) - (\gamma_s - 2\gamma_p) \\
&\Leftrightarrow 2 - 2\gamma_p - \gamma_s + 2\gamma_p = 2 - \gamma_s
\end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos el 2º miembro de la ecuación anterior:

$$4 \frac{b_2}{b_1} (1 - \gamma_s)$$

Donde:

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{(1 - \gamma_p)^{\frac{1}{2}}}{(1 - \gamma_s)^{\frac{1}{2}}}$$

Volviendo al 2º término:

$$4 \frac{b_2}{b_1} (1 - \gamma_s)$$

$$4(1 - \gamma_p)^{\frac{1}{2}} \cdot (1 - \gamma_s)^{\frac{1}{2}}$$

Finalmente, volvemos a describir la ecuación de modo que:

$$(2 - \gamma_s)^2 - 4(1 - \gamma_p)^{\frac{1}{2}} \cdot (1 - \gamma_s)^{\frac{1}{2}} = 0$$

La cual denominaremos *ecuación característica*.

Por tanto, el sistema de ecuaciones de A_1 y A_2 quedaría como:

$$\begin{cases} b_1 \left(1 + \frac{K^2}{b_1^2} \right) \cdot A_1 + 2b_2 \cdot A_2 = 0 \\ 2\mu \cdot A_1 + \left[2\mu \frac{b_2^2}{K^2} - \lambda \left(1 + \frac{b_2^2}{K^2} \right) \right] \cdot A_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2 - \gamma_s) \cdot A_1 + 2(1 - \gamma_p)^{\frac{1}{2}} \cdot (1 - \gamma_s)^{\frac{1}{2}} \cdot A_2 = 0 \\ 2 \cdot A_1 + (2 - \gamma_s) \cdot A_2 = 0 \end{cases}$$

Si consideramos que el valor de la amplitud de la onda de Rayleigh incidente es de valor unitario, obtendremos el valor de A_2 :

Si $A_1 = 1$:

$$\begin{cases} (2 - \gamma_s) \cdot 1 + 2(1 - \gamma_p)^{\frac{1}{2}} \cdot (1 - \gamma_s)^{\frac{1}{2}} \cdot A_2 = 0 \\ 2 \cdot 1 + (2 - \gamma_s) \cdot A_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \boxed{A_2 = -\left(\frac{2}{2 - \gamma_s}\right)}$$

Por tanto, a modo de tratar de generalizar las expresiones del campo de desplazamientos:

$$\begin{cases} u = 0 \\ v = (d_2^{(0)} \cdot A_1 \cdot e^{b_1 z} + d_2^{(1)} \cdot A_2 \cdot e^{b_2 z}) \cdot e^{-iKy} \\ w = (d_3^{(0)} \cdot A_1 \cdot e^{b_1 z} + d_3^{(1)} \cdot A_2 \cdot e^{b_2 z}) \cdot e^{-iKy} \end{cases}$$

Donde:

Para $A_{Ra}^i = A_1$:

$$d^{(0)}: (0, d_2^{(0)}, d_3^{(0)}) \begin{cases} d_2^{(0)} = 1 \\ d_3^{(0)} = \frac{iK}{b_1} \end{cases}$$

Para $A_{Ra}^r = A_2$:

$$d^{(1)}: (0, d_2^{(1)}, d_3^{(1)}) \begin{cases} d_2^{(1)} = 1 \\ d_3^{(1)} = -\frac{b_2}{iK} \end{cases}$$

También se conocen los valores de b_1 y b_2 :

$$b_1 = K \cdot \sqrt{1 - \gamma_s} \quad b_2 = K \cdot \sqrt{1 - \gamma_p}$$

Volviendo a describir las ecuaciones del campo de desplazamientos donde aparecen todos los términos sustituidos, se tiene que:

$$\begin{cases} u = 0 \\ v = A_1 \cdot e^{-iK(y + (i\sqrt{1-\gamma_s})z)} + A_2 \cdot e^{-iK(y + (i\sqrt{1-\gamma_p})z)} \\ w = \left(i \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\gamma_s}}\right) \cdot A_1 \cdot e^{-iK(y + (i\sqrt{1-\gamma_s})z)} + \left(i \cdot \sqrt{1-\gamma_p}\right) \cdot A_2 \cdot e^{-iK(y + (i\sqrt{1-\gamma_p})z)} \end{cases}$$

4.5.2 Campo de deformaciones

Partiendo de la expresión que hace mención al tensor de pequeñas deformaciones:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

Calcularemos cada uno de los términos del tensor de deformaciones para este tipo de onda, el cual obedece a la siguiente disposición:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ 0 & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

Así, calculamos cada término por separado:

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} = -iK \left(A_1 \cdot e^{-iK(y+(i\sqrt{1-\gamma_s})z)} + A_2 \cdot e^{-iK(y+(i\sqrt{1-\gamma_p})z)} \right)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{33} = \frac{\partial w}{\partial z} &= (K\sqrt{1-\gamma_s}) \left(i \frac{1}{\sqrt{1-\gamma_s}} \right) \cdot A_1 \cdot e^{-iK(y+(i\sqrt{1-\gamma_s})z)} \\ &+ (K\sqrt{1-\gamma_p}) \left(i \sqrt{1-\gamma_p} \right) \cdot A_2 \cdot e^{-iK(y+(i\sqrt{1-\gamma_p})z)} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_{33} = iK \cdot A_1 \cdot e^{-iK(y+(i\sqrt{1-\gamma_s})z)} + iK(1-\gamma_p) \cdot A_2 \cdot e^{-iK(y+(i\sqrt{1-\gamma_p})z)}$$

$$\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} &= \frac{1}{2} \left[\left(K\sqrt{1-\gamma_s} + \frac{K}{\sqrt{1-\gamma_s}} \right) \cdot A_1 \cdot e^{-iK(y+(i\sqrt{1-\gamma_s})z)} + \left(2K\sqrt{1-\gamma_p} \right) \cdot A_2 \right. \\ &\quad \left. \cdot e^{-iK(y+(i\sqrt{1-\gamma_p})z)} \right] \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$

$$\varepsilon_{kk} = -iKA_1 \cdot e^{-iK(y+(i\sqrt{1-\gamma_s})z)} - iKA_2 \cdot e^{-iK(y+(i\sqrt{1-\gamma_p})z)} + iKA_1 \cdot e^{-iK(y+(i\sqrt{1-\gamma_s})z)} \\ + iK(1-\gamma_p)A_2 \cdot e^{-iK(y+(i\sqrt{1-\gamma_p})z)}$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_{kk} = -iKA_2 \cdot e^{-iK(y+(i\sqrt{1-\gamma_p})z)} + iK(1-\gamma_p)A_2 \cdot e^{-iK(y+(i\sqrt{1-\gamma_p})z)}$$

4.5.3 Campo de Tensiones

Para llevar a cabo la obtención del campo de tensiones, hemos de recurrir a la expresión de la ley de comportamiento del material, la cual establece que:

$$\sigma_{ij} = 2\mu \cdot \varepsilon_{ij} + \lambda \cdot \varepsilon_{kk} \cdot \delta_{ij}$$

Donde:

$$\begin{cases} \delta_{ij} = 1 & i = j \\ \delta_{ij} = 0 & i \neq j \end{cases}$$

Por lo que respecta al tensor de tensiones, tendrá la siguiente disposición:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ 0 & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

Calculamos cada uno de los términos del tensor de tensiones:

$$\sigma_{11} = 2\mu \cdot 0 + \lambda \cdot \varepsilon_{kk} = \lambda \cdot \left[\left(-iK + iK(1-\gamma_p) \right) \cdot A_2 \cdot e^{-iK(y+(i\sqrt{1-\gamma_p})z)} \right]$$

$$\sigma_{22} = 2\mu \cdot \left[-iK \left(A_1 \cdot e^{-iK(y+(i\sqrt{1-\gamma_s})z)} + A_2 \cdot e^{-iK(y+(i\sqrt{1-\gamma_p})z)} \right) \right] + \lambda \\ \cdot \left[\left(-iK + iK(1-\gamma_p) \right) \cdot A_2 \cdot e^{-iK(y+(i\sqrt{1-\gamma_p})z)} \right]$$

$$\sigma_{33} = 2\mu \cdot \left[iK \left(A_1 \cdot e^{-iK(y+(i\sqrt{1-\gamma_s})z)} + (1-\gamma_p) \cdot A_2 \cdot e^{-iK(y+(i\sqrt{1-\gamma_p})z)} \right) \right] + \lambda \\ \cdot \left[\left(-iK + iK(1-\gamma_p) \right) \cdot A_2 \cdot e^{-iK(y+(i\sqrt{1-\gamma_p})z)} \right]$$

$$\sigma_{23} = 2\mu \cdot \left[\frac{1}{2} \left(\left(K\sqrt{1-\gamma_s} + \frac{K}{\sqrt{1-\gamma_s}} \right) \cdot A_1 \cdot e^{-iK(y+(i\sqrt{1-\gamma_s})z)} + \left(2K\sqrt{1-\gamma_p} \right) \cdot A_2 \cdot e^{-iK(y+(i\sqrt{1-\gamma_p})z)} \right) \right]$$

$$\Leftrightarrow \sigma_{23} = \sigma_{32} = \mu \left[\left(K\sqrt{1-\gamma_s} + \frac{K}{\sqrt{1-\gamma_s}} \right) \cdot A_1 \cdot e^{-iK(y+(i\sqrt{1-\gamma_s})z)} + \left(2K\sqrt{1-\gamma_p} \right) \cdot A_2 \cdot e^{-iK(y+(i\sqrt{1-\gamma_p})z)} \right]$$

Por último, aplicaremos el valor de las amplitudes a las expresiones del campo de deformaciones y de tensiones respectivamente con el fin de afrontar el último paso, el cual será la obtención de la parte simétrica y antisimétrica de los campos de desplazamientos, deformaciones y tensiones respectivamente.

Así, se tiene que:

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos \theta + i \sin \theta \\ e^{-i\theta} &= \cos \theta - i \sin \theta \end{aligned}$$

Donde:

Parte simétrica:

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

Parte antisimétrica:

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}$$

Si se considera que $\theta = iKy$, entonces:

$$\cos iKy = \frac{e^{iKy} + e^{-iKy}}{2}$$

$$\sin iKy = \frac{e^{-iKy} - e^{iKy}}{2}$$

Ahora volvemos a describir las expresiones del campo de desplazamientos con el fin de obtener las componentes simétrica y antisimétrica respectivamente.

$$\begin{cases} u = 0 \\ v = A_1 \cdot e^{-iK(y+(i\sqrt{1-\gamma_s})z)} + A_2 \cdot e^{-iK(y+(i\sqrt{1-\gamma_p})z)} \\ w = \left(i \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\gamma_s}}\right) \cdot A_1 \cdot e^{-iK(y+(i\sqrt{1-\gamma_s})z)} + \left(i \cdot \sqrt{1-\gamma_p}\right) \cdot A_2 \cdot e^{-iK(y+(i\sqrt{1-\gamma_p})z)} \end{cases}$$

Partiendo de las anteriores expresiones del campo de desplazamientos, obtendremos lo siguiente:

$$v_s = \left(A_1 \cdot e^{(K\sqrt{1-\gamma_s})z} + A_2 \cdot e^{(K\sqrt{1-\gamma_p})z}\right) \cdot \left(\frac{e^{iKy} + e^{-iKy}}{2}\right)$$

$$v_a = \left(A_1 \cdot e^{(K\sqrt{1-\gamma_s})z} + A_2 \cdot e^{(K\sqrt{1-\gamma_p})z}\right) \cdot \left(\frac{e^{-iKy} - e^{iKy}}{2}\right)$$

$$w_s = \left(\left(i \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\gamma_s}}\right) \cdot A_1 \cdot e^{(K\sqrt{1-\gamma_s})z} + \left(i \cdot \sqrt{1-\gamma_p}\right) \cdot A_2 \cdot e^{(K\sqrt{1-\gamma_p})z}\right) \cdot \left(\frac{e^{iKy} + e^{-iKy}}{2}\right)$$

$$w_a = \left(\left(i \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\gamma_s}}\right) \cdot A_1 \cdot e^{(K\sqrt{1-\gamma_s})z} + \left(i \cdot \sqrt{1-\gamma_p}\right) \cdot A_2 \cdot e^{(K\sqrt{1-\gamma_p})z}\right) \cdot \left(\frac{e^{-iKy} - e^{iKy}}{2}\right)$$

Para obtener las componentes simétrica y antisimétrica de los términos del tensor de deformaciones y del tensor de tensiones respectivamente, se aplicarán las expresiones del tensor de pequeñas deformaciones así como la ley de comportamiento del material sobre las componentes simétrica y antisimétrica del campo de desplazamientos que se acaban de obtener.

4.6 Coordenadas generales

Hasta ahora hemos obtenido las ecuaciones para ondas tipo P, tipo S y Rayleigh considerando que la dirección de propagación de las ondas está siempre contenida en un plano vertical. Vamos ahora a considerar el caso en el que las ondas puedan propagarse en cualquier dirección del espacio. Para ello, introduciremos un nuevo ángulo (*ángulo φ*), tal que:

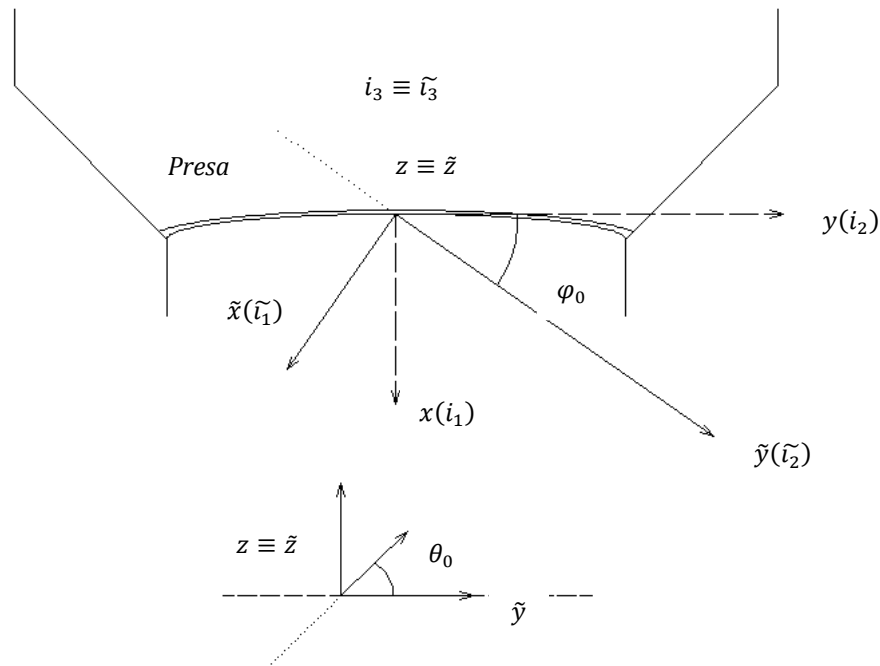


Figura 4.4. Gráfico aclaratorio

La inclusión de este nuevo ángulo de incidencia, nos lleva a introducir una matriz de giro R , la cual se compone de las proyecciones de $\tilde{x}(\tilde{i}_1)$ y $\tilde{y}(\tilde{i}_2)$ sobre los nuevos ejes de referencia $x(i_1)$ y $y(i_2)$. De este modo, se tiene que:

$$R = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_0 & \sin \varphi_0 & 0 \\ -\sin \varphi_0 & \cos \varphi_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{i}_1 \\ \tilde{i}_2 \\ \tilde{i}_3 \end{bmatrix}$$

Así, tomaremos como ejemplo de aplicación las expresiones deducidas para la onda SH y obtener las nuevas expresiones del campo de desplazamiento, deformación y tensión respectivamente. Partiendo de dichas expresiones conocidas y considerando también que:

$$A_{sh}^i = 1$$

$$A_{sh}^r = 1$$

Vamos a tratar de obtener el nuevo campo de desplazamientos para este tipo de ondas (SH); para ello, recordaremos las expresiones deducidas anteriormente, teniéndose que:

$$\tilde{u} = (\tilde{u}_1, 0, 0) = \tilde{d}^{(0)} \cdot e^{-ik_s(\tilde{p}^{(0)} \cdot \tilde{r})} + \tilde{d}^{(1)} \cdot e^{-ik_s(\tilde{p}^{(1)} \cdot \tilde{r})}$$

$$\tilde{d}^{(0)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \tilde{d}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\tilde{p}^{(0)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \cos \theta_0 \\ \sin \theta_0 \end{Bmatrix} \quad \tilde{p}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \cos \theta_1 \\ -\sin \theta_1 \end{Bmatrix}$$

Aplicamos ahora la matriz de giro al campo de desplazamientos:

$$R \cdot \tilde{u} = R \cdot \tilde{d}^{(0)} \cdot e^{-ik_s(\tilde{p}^{(0)} \cdot \tilde{r})} + R \cdot \tilde{d}^{(1)} \cdot e^{-ik_s(\tilde{p}^{(1)} \cdot \tilde{r})}$$

Haremos un paréntesis en la deducción del nuevo campo de desplazamientos a modo de aclarar el producto escalar $(\tilde{p}^{(i)} \cdot \tilde{r})$, de modo que:

$$\tilde{p}^{(i)} \cdot \tilde{r} = \langle p_1^{(i)} \quad p_2^{(i)} \quad p_3^{(i)} \rangle \cdot \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{p}_1^{(i)} \\ \tilde{p}_2^{(i)} \\ \tilde{p}_3^{(i)} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (R^{-1} \cdot p^{(i)})^T \cdot R^{-1} \cdot r = (p^{(i)})^T \cdot (R^{-1})^T \cdot R^{-1} \cdot r$$

$$\Leftrightarrow R^{-1} = R^T \text{ con lo cual } (R^{-1})^T = R$$

$$\Leftrightarrow (p^{(i)})^T \cdot r = p^{(i)} \cdot r$$

Por tanto, volviendo a la expresión del campo de desplazamientos:

$$R \cdot \tilde{u} = R \cdot \tilde{d}^{(0)} \cdot e^{-ik_s(\tilde{p}^{(0)} \cdot \tilde{r})} + R \cdot \tilde{d}^{(1)} \cdot e^{-ik_s(\tilde{p}^{(1)} \cdot \tilde{r})}$$

$$u = (u_1, 0, 0) = d^{(0)} \cdot e^{-ik_s(p^{(0)} \cdot r)} + d^{(1)} \cdot e^{-ik_s(p^{(1)} \cdot r)}$$

Siendo:

$$d^{(0)} = R \cdot \tilde{d}^{(0)} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_0 & \sin \varphi_0 & 0 \\ -\sin \varphi_0 & \cos \varphi_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_0 \\ -\sin \varphi_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$d^{(1)} = R \cdot \tilde{d}^{(1)} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_0 & \sin \varphi_0 & 0 \\ -\sin \varphi_0 & \cos \varphi_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_0 \\ -\sin \varphi_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$p^{(0)} = R \cdot \tilde{p}^{(0)} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_0 & \sin \varphi_0 & 0 \\ -\sin \varphi_0 & \cos \varphi_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \theta_0 \\ \sin \theta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \varphi_0 \cdot \cos \theta_0 \\ \cos \varphi_0 \cdot \cos \theta_0 \\ \sin \theta_0 \end{bmatrix}$$

$$p^{(1)} = R \cdot \tilde{p}^{(1)} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_0 & \sin \varphi_0 & 0 \\ -\sin \varphi_0 & \cos \varphi_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \theta_1 \\ -\sin \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \varphi_0 \cdot \cos \theta_1 \\ \cos \varphi_0 \cdot \cos \theta_1 \\ -\sin \theta_1 \end{bmatrix}$$

Por tanto, y recordando que $\theta_1 = \theta_0$, se obtiene el nuevo campo de desplazamientos en función de las coordenadas generales:

$$u_1 = u = \cos \varphi_0 \cdot e^{-ik_s(\sin \varphi_0 \cos \theta_0 x + \cos \varphi_0 \cos \theta_0 y + \sin \theta_0 z)} \\ + \cos \varphi_0 \cdot e^{-ik_s(\sin \varphi_0 \cos \theta_1 x + \cos \varphi_0 \cos \theta_1 y - \sin \theta_1 z)}$$

$$u_2 = v = 0$$

$$u_3 = w = 0$$

Trataremos ahora de obtener la componente simétrica y antisimétrica del campo de desplazamientos. Para ello, partiremos de la expresión:

$$u(u_1, u_2, u_3) = d^{(0)} \cdot e^{-ik^{(0)}(p^{(0)} \cdot r)} + d^{(1)} \cdot e^{-ik^{(1)}(p^{(1)} \cdot r)} + d^{(2)} \cdot e^{-ik^{(2)}(p^{(2)} \cdot r)}$$

Un dato a tener en cuenta será el de considerar el plano de simetría; para nuestro caso, dicho plano será *plano xz* (x_1, x_3).

Considerando la simetría del problema, se parte de:

$$e^{-ik^{(i)}(p^{(i)} \cdot r)} = e^{-ik^{(i)}(p_1^{(i)} \cdot x + p_3^{(i)} \cdot z)} \cdot e^{-ik^{(i)}(p_2^{(i)} \cdot y)}$$

$$e^{-ik^{(i)}(p_2^{(i)} \cdot y)} \begin{cases} e_y^s(i) = \frac{e^{-ik^{(i)}p_2^{(i)} \cdot y} + e^{ik^{(i)}p_2^{(i)} \cdot y}}{2} \\ e_y^a(i) = \frac{e^{-ik^{(i)}p_2^{(i)} \cdot y} - e^{ik^{(i)}p_2^{(i)} \cdot y}}{2} \end{cases}$$

$$e_{xz}(i) = e^{-ik^{(i)}(p_1^{(i)} \cdot x + p_3^{(i)} \cdot z)}$$

Siendo:

$$\begin{cases} e_y^s(i) \rightsquigarrow \text{componente simétrica} \\ e_y^a(i) \rightsquigarrow \text{componente antisimétrica} \end{cases}$$

Dependiendo de la componente del desplazamiento en la que estemos trabajando (u, v, w), se deberá emplear uno u otro término para la deducción de la componente simétrica o antisimétrica respectivamente.

$$u_i^s = d_i^{(0)} \cdot e_{xz}(i) \cdot e_y^s(i) + d_i^{(1)} \cdot A_{sv}^r \cdot e_{xz}(i) \cdot e_y^s(i) + d_i^{(2)} \cdot A_p^r \cdot e_{xz}(i) \cdot e_y^s(i)$$

$$u_i^a = d_i^{(0)} \cdot e_{xz}(i) \cdot e_y^a(i) + d_i^{(1)} \cdot A_{sv}^r \cdot e_{xz}(i) \cdot e_y^a(i) + d_i^{(2)} \cdot A_p^r \cdot e_{xz}(i) \cdot e_y^a(i)$$

Especificando las expresiones para el caso de la onda SH, tenemos que:

$$u_1^s = \cos \varphi_0 \cdot e^{-ik_s(\sin \varphi_0 \cos \theta_0 x + \sin \theta_0 z)} \cdot \left[\frac{e^{-ik_s(\cos \varphi_0 \cos \theta_0 y)} + e^{ik_s(\cos \varphi_0 \cos \theta_0 y)}}{2} \right] \\ + \cos \varphi_0 \cdot e^{-ik_s(\sin \varphi_0 \cos \theta_1 x - \sin \theta_1 z)} \\ \cdot \left[\frac{e^{-ik_s(\cos \varphi_0 \cos \theta_1 y)} + e^{ik_s(\cos \varphi_0 \cos \theta_1 y)}}{2} \right]$$

$$u_1^a = \cos \varphi_0 \cdot e^{-ik_s(\sin \varphi_0 \cos \theta_0 x + \sin \theta_0 z)} \cdot \left[\frac{e^{-ik_s(\cos \varphi_0 \cos \theta_0 y)} - e^{ik_s(\cos \varphi_0 \cos \theta_0 y)}}{2} \right] \\ + \cos \varphi_0 \cdot e^{-ik_s(\sin \varphi_0 \cos \theta_1 x - \sin \theta_1 z)} \\ \cdot \left[\frac{e^{-ik_s(\cos \varphi_0 \cos \theta_1 y)} - e^{ik_s(\cos \varphi_0 \cos \theta_1 y)}}{2} \right]$$

Por lo que respecta al cálculo de las tensiones, partiremos también de las expresiones deducidas anteriormente, teniéndose en cuenta que:

$$\sigma_{ij} = 2\mu \cdot \varepsilon_{ij} + \lambda \cdot \varepsilon_{kk} \cdot \delta_{ij}$$

Siendo:

$$\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

El primer paso que llevaremos a cabo será el de calcular el nuevo campo de deformaciones, el cual tendrá el siguiente tensor de deformaciones:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & 0 & 0 \\ \varepsilon_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A continuación, trataremos de obtener cada uno de los términos del tensor, especificando su componente simétrica y antisimétrica respectivamente:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x} = & \cos \varphi_0 \cdot e^{-ik_s(\sin \varphi_0 \cos \theta_0 x + \cos \varphi_0 \cos \theta_0 y + \sin \theta_0 z)} \cdot (-ik_s) \cdot (\sin \varphi_0 \cos \theta_0) \\ & + \cos \varphi_0 \cdot e^{-ik_s(\sin \varphi_0 \cos \theta_1 x + \cos \varphi_0 \cos \theta_1 y - \sin \theta_1 z)} \\ & \cdot (-ik_s)(\sin \varphi_0 \cos \theta_1)\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{11}^s = \frac{\partial u_1^s}{\partial x} = 2$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11}^a = \frac{\partial u_1^a}{\partial x} = & \cos \varphi_0 \cdot (-ik_s)(\sin \varphi_0 \cos \theta_0) \cdot e^{-ik_s(\sin \varphi_0 \cos \theta_0 x + \sin \theta_0 z)} \\ & \cdot \left[\frac{e^{-ik_s(\cos \varphi_0 \cos \theta_0 y)} - e^{ik_s(\cos \varphi_0 \cos \theta_0 y)}}{2} \right] + \cos \varphi_0 \\ & \cdot (-ik_s)(\sin \varphi_0 \cos \theta_1) \cdot e^{-ik_s(\sin \varphi_0 \cos \theta_1 x - \sin \theta_1 z)} \\ & \cdot \left[\frac{e^{-ik_s(\cos \varphi_0 \cos \theta_1 y)} - e^{ik_s(\cos \varphi_0 \cos \theta_1 y)}}{2} \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{12} = & \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) \\ = & \frac{1}{2} \left[\cos \varphi_0 \cdot e^{-ik_s(\sin \varphi_0 \cos \theta_0 x + \cos \varphi_0 \cos \theta_0 y + \sin \theta_0 z)} \right. \\ & \cdot (-ik_s)(\cos \varphi_0 \cos \theta_0) + \cos \varphi_0 \\ & \cdot e^{-ik_s(\sin \varphi_0 \cos \theta_1 x + \cos \varphi_0 \cos \theta_1 y - \sin \theta_1 z)} \cdot (-ik_s)(\cos \varphi_0 \cos \theta_1) \left. \right]\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{12}^s = \frac{1}{2} \frac{\partial u_1^s}{\partial y} = \frac{1}{2} \left[\cos \varphi_0 \cdot e^{-ik_s(\sin \varphi_0 \cos \theta_0 x + \sin \theta_0 z)} \cdot (-ik_s)(\cos \varphi_0 \cos \theta_0) \right. \\ \cdot \left[\frac{e^{-ik_s(\cos \varphi_0 \cos \theta_0 y)} - e^{ik_s(\cos \varphi_0 \cos \theta_0 y)}}{2} \right] + \cos \varphi_0 \\ \cdot e^{-ik_s(\sin \varphi_0 \cos \theta_1 x - \sin \theta_1 z)} \cdot (-ik_s)(\cos \varphi_0 \cos \theta_1) \\ \cdot \left[\frac{e^{-ik_s(\cos \varphi_0 \cos \theta_1 y)} - e^{ik_s(\cos \varphi_0 \cos \theta_1 y)}}{2} \right] \Bigg]$$

$$\varepsilon_{12}^a = \frac{1}{2} \frac{\partial u_1^a}{\partial y} = \frac{1}{2} \left[\cos \varphi_0 \cdot e^{-ik_s(\sin \varphi_0 \cos \theta_0 x + \sin \theta_0 z)} \cdot (-ik_s)(\cos \varphi_0 \cos \theta_0) \right. \\ \cdot \left[\frac{e^{-ik_s(\cos \varphi_0 \cos \theta_0 y)} + e^{ik_s(\cos \varphi_0 \cos \theta_0 y)}}{2} \right] + \cos \varphi_0 \\ \cdot e^{-ik_s(\sin \varphi_0 \cos \theta_1 x - \sin \theta_1 z)} \cdot (-ik_s) \cdot (\cos \varphi_0 \cos \theta_1) \\ \cdot \left[\frac{e^{-ik_s(\cos \varphi_0 \cos \theta_1 y)} + e^{ik_s(\cos \varphi_0 \cos \theta_1 y)}}{2} \right] \Bigg]$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2} (u_{1,3} + u_{3,1}) \\ = \frac{1}{2} [\cos \varphi_0 \cdot e^{-ik_s(\sin \varphi_0 \cos \theta_0 x + \cos \varphi_0 \cos \theta_0 y + \sin \theta_0 z)} \cdot (-ik_s)(\sin \theta_0) \\ + \cos \varphi_0 \cdot e^{-ik_s(\sin \varphi_0 \cos \theta_1 x + \cos \varphi_0 \cos \theta_1 y - \sin \theta_1 z)} \cdot (-ik_s)(-\sin \theta_1)]$$

$$\varepsilon_{13}^s = \frac{1}{2} \frac{\partial u_1^s}{\partial z} = \frac{1}{2} \left[\cos \varphi_0 \cdot (-ik_s)(\sin \theta_0) \cdot e^{-ik_s(\sin \varphi_0 \cos \theta_0 x + \sin \theta_0 z)} \right. \\ \cdot \left[\frac{e^{-ik_s(\cos \varphi_0 \cos \theta_0 y)} + e^{ik_s(\cos \varphi_0 \cos \theta_0 y)}}{2} \right] + \cos \varphi_0 \\ \cdot e^{-ik_s(\sin \varphi_0 \cos \theta_1 x - \sin \theta_1 z)} \cdot (-ik_s)(-\sin \theta_1) \\ \cdot \left[\frac{e^{-ik_s(\cos \varphi_0 \cos \theta_1 y)} + e^{ik_s(\cos \varphi_0 \cos \theta_1 y)}}{2} \right] \Bigg]$$

$$\varepsilon_{13}^a = \frac{1}{2} \frac{\partial u_1^a}{\partial z} = \frac{1}{2} \left[\cos \varphi_0 \cdot (-ik_s)(\sin \theta_0) \cdot e^{-ik_s(\sin \varphi_0 \cos \theta_0 x + \sin \theta_0 z)} \right. \\ \cdot \left[\frac{e^{-ik_s(\cos \varphi_0 \cos \theta_0 y)} - e^{ik_s(\cos \varphi_0 \cos \theta_0 y)}}{2} \right] + \cos \varphi_0 \cdot (-ik_s)(-\sin \theta_1) \\ \cdot e^{-ik_s(\sin \varphi_0 \cos \theta_1 x - \sin \theta_1 z)} \cdot \left[\frac{e^{-ik_s(\cos \varphi_0 \cos \theta_1 y)} - e^{ik_s(\cos \varphi_0 \cos \theta_1 y)}}{2} \right] \Bigg]$$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = 0$$

$$\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \\ = \cos \varphi_0 \cdot e^{-ik_s(\sin \varphi_0 \cos \theta_0 x + \cos \varphi_0 \cos \theta_0 y + \sin \theta_0 z)} \\ \cdot (-ik_s)(\sin \varphi_0 \cos \theta_0) + \cos \varphi_0 \\ \cdot e^{-ik_s(\sin \varphi_0 \cos \theta_1 x + \cos \varphi_0 \cos \theta_1 y - \sin \theta_1 z)} \cdot (-ik_s)(\sin \varphi_0 \cos \theta_1)$$

Ahora trataremos de introducir las expresiones que hacen referencia a los términos del nuevo tensor de tensiones, el cual presenta la siguiente disposición:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & 0 & 0 \\ \sigma_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{11} = \lambda \cdot \varepsilon_{kk} + 2\mu \cdot \varepsilon_{11}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = (\lambda + 2\mu) & \left(\cos \varphi_0 \cdot e^{-ik_s(\sin \varphi_0 \cos \theta_0 x + \cos \varphi_0 \cos \theta_0 y + \sin \theta_0 z)} \cdot (-ik_s) \right. \\ & \cdot (\sin \varphi_0 \cos \theta_0) + \cos \varphi_0 \cdot e^{-ik_s(\sin \varphi_0 \cos \theta_1 x + \cos \varphi_0 \cos \theta_1 y - \sin \theta_1 z)} \\ & \left. \cdot (-ik_s)(\sin \varphi_0 \cos \theta_1) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^S = & \left((\lambda) \cdot \cos \varphi_0 \cdot e^{-ik_s(\sin \varphi_0 \cos \theta_0 x + \cos \varphi_0 \cos \theta_0 y + \sin \theta_0 z)} \cdot (-ik_s) \cdot (\sin \varphi_0 \cos \theta_0) \right. \\ & + (\lambda) \cdot \cos \varphi_0 \cdot e^{-ik_s(\sin \varphi_0 \cos \theta_1 x + \cos \varphi_0 \cos \theta_1 y - \sin \theta_1 z)} \\ & \left. \cdot (-ik_s)(\sin \varphi_0 \cos \theta_1) \right) \\ & + 2\mu \left(\cos \varphi_0 \cdot (-ik_s)(\sin \varphi_0 \cos \theta_0) \cdot e^{-ik_s(\sin \varphi_0 \cos \theta_0 x + \sin \theta_0 z)} \right. \\ & \cdot \left[\frac{e^{-ik_s(\cos \varphi_0 \cos \theta_0 y)} + e^{ik_s(\cos \varphi_0 \cos \theta_0 y)}}{2} \right] + \cos \varphi_0 \\ & \cdot (-ik_s)(\sin \varphi_0 \cos \theta_1) \cdot e^{-ik_s(\sin \varphi_0 \cos \theta_1 x - \sin \theta_1 z)} \\ & \left. \cdot \left[\frac{e^{-ik_s(\cos \varphi_0 \cos \theta_1 y)} + e^{ik_s(\cos \varphi_0 \cos \theta_1 y)}}{2} \right] \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}^a = & \left((\lambda) \cdot \cos \varphi_0 \cdot e^{-ik_s(\sin \varphi_0 \cos \theta_0 x + \cos \varphi_0 \cos \theta_0 y + \sin \theta_0 z)} \cdot (-ik_s) \cdot (\sin \varphi_0 \cos \theta_0) \right. \\
& + (\lambda) \cdot \cos \varphi_0 \cdot e^{-ik_s(\sin \varphi_0 \cos \theta_1 x + \cos \varphi_0 \cos \theta_1 y - \sin \theta_1 z)} \\
& \cdot (-ik_s)(\sin \varphi_0 \cos \theta_1) \Big) \\
& + 2\mu \left(\cos \varphi_0 \cdot (-ik_s)(\sin \varphi_0 \cos \theta_0) \cdot e^{-ik_s(\sin \varphi_0 \cos \theta_0 x + \sin \theta_0 z)} \right. \\
& \cdot \left[\frac{e^{-ik_s(\cos \varphi_0 \cos \theta_0 y)} - e^{ik_s(\cos \varphi_0 \cos \theta_0 y)}}{2} \right] + \cos \varphi_0 \\
& \cdot (-ik_s)(\sin \varphi_0 \cos \theta_1) \cdot e^{-ik_s(\sin \varphi_0 \cos \theta_1 x - \sin \theta_1 z)} \\
& \cdot \left[\frac{e^{-ik_s(\cos \varphi_0 \cos \theta_1 y)} - e^{ik_s(\cos \varphi_0 \cos \theta_1 y)}}{2} \right] \Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{12}^s = \sigma_{21}^s = & \left((\lambda) \cdot \cos \varphi_0 \cdot e^{-ik_s(\sin \varphi_0 \cos \theta_0 x + \cos \varphi_0 \cos \theta_0 y + \sin \theta_0 z)} \cdot (-ik_s) \right. \\
& \cdot (\sin \varphi_0 \cos \theta_0) + (\lambda) \cdot \cos \varphi_0 \cdot e^{-ik_s(\sin \varphi_0 \cos \theta_1 x + \cos \varphi_0 \cos \theta_1 y - \sin \theta_1 z)} \\
& \cdot (-ik_s)(\sin \varphi_0 \cos \theta_1) \Big) \\
& + \mu \left[\cos \varphi_0 \cdot e^{-ik_s(\sin \varphi_0 \cos \theta_0 x + \sin \theta_0 z)} \cdot (-ik_s)(\cos \varphi_0 \cos \theta_0) \right. \\
& \cdot \left[\frac{e^{-ik_s(\cos \varphi_0 \cos \theta_0 y)} - e^{ik_s(\cos \varphi_0 \cos \theta_0 y)}}{2} \right] + \cos \varphi_0 \\
& \cdot e^{-ik_s(\sin \varphi_0 \cos \theta_1 x - \sin \theta_1 z)} \cdot (-ik_s)(\cos \varphi_0 \cos \theta_1) \\
& \cdot \left[\frac{e^{-ik_s(\cos \varphi_0 \cos \theta_1 y)} - e^{ik_s(\cos \varphi_0 \cos \theta_1 y)}}{2} \right] \Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{12}^a = \sigma_{21}^a = & \left((\lambda) \cdot \cos \varphi_0 \cdot e^{-ik_s(\sin \varphi_0 \cos \theta_0 x + \cos \varphi_0 \cos \theta_0 y + \sin \theta_0 z)} \cdot (-ik_s) \right. \\
& \cdot (\sin \varphi_0 \cos \theta_0) + (\lambda) \cdot \cos \varphi_0 \cdot e^{-ik_s(\sin \varphi_0 \cos \theta_1 x + \cos \varphi_0 \cos \theta_1 y - \sin \theta_1 z)} \\
& \cdot (-ik_s)(\sin \varphi_0 \cos \theta_1) \Big) \\
& + \mu \left[\cos \varphi_0 \cdot e^{-ik_s(\sin \varphi_0 \cos \theta_0 x + \sin \theta_0 z)} \cdot (-ik_s)(\cos \varphi_0 \cos \theta_0) \right. \\
& \cdot \left[\frac{e^{-ik_s(\cos \varphi_0 \cos \theta_0 y)} + e^{ik_s(\cos \varphi_0 \cos \theta_0 y)}}{2} \right] + \cos \varphi_0 \\
& \cdot e^{-ik_s(\sin \varphi_0 \cos \theta_1 x - \sin \theta_1 z)} \cdot (-ik_s) \cdot (\cos \varphi_0 \cos \theta_1) \\
& \cdot \left. \left[\frac{e^{-ik_s(\cos \varphi_0 \cos \theta_1 y)} + e^{ik_s(\cos \varphi_0 \cos \theta_1 y)}}{2} \right] \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{13}^s = \sigma_{31}^s = & \left((\lambda) \cdot \cos \varphi_0 \cdot e^{-ik_s(\sin \varphi_0 \cos \theta_0 x + \cos \varphi_0 \cos \theta_0 y + \sin \theta_0 z)} \cdot (-ik_s) \right. \\
& \cdot (\sin \varphi_0 \cos \theta_0) + (\lambda) \cdot \cos \varphi_0 \cdot e^{-ik_s(\sin \varphi_0 \cos \theta_1 x + \cos \varphi_0 \cos \theta_1 y - \sin \theta_1 z)} \\
& \cdot (-ik_s)(\sin \varphi_0 \cos \theta_1) \Big) \\
& + \mu \left[\cos \varphi_0 \cdot (-ik_s)(\sin \theta_0) \cdot e^{-ik_s(\sin \varphi_0 \cos \theta_0 x + \sin \theta_0 z)} \right. \\
& \cdot \left[\frac{e^{-ik_s(\cos \varphi_0 \cos \theta_0 y)} + e^{ik_s(\cos \varphi_0 \cos \theta_0 y)}}{2} \right] + \cos \varphi_0 \\
& \cdot e^{-ik_s(\sin \varphi_0 \cos \theta_1 x - \sin \theta_1 z)} \cdot (-ik_s)(-\sin \theta_1) \\
& \cdot \left. \left[\frac{e^{-ik_s(\cos \varphi_0 \cos \theta_1 y)} + e^{ik_s(\cos \varphi_0 \cos \theta_1 y)}}{2} \right] \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{13}^a = \sigma_{31}^a = & \left((\lambda) \cdot \cos \varphi_0 \cdot e^{-ik_s(\sin \varphi_0 \cos \theta_0 x + \cos \varphi_0 \cos \theta_0 y + \sin \theta_0 z)} \cdot (-ik_s) \right. \\
& \cdot (\sin \varphi_0 \cos \theta_0) + (\lambda) \cdot \cos \varphi_0 \cdot e^{-ik_s(\sin \varphi_0 \cos \theta_1 x + \cos \varphi_0 \cos \theta_1 y - \sin \theta_1 z)} \\
& \cdot (-ik_s)(\sin \varphi_0 \cos \theta_1) \Big) \\
& + \mu \left[\cos \varphi_0 \cdot (-ik_s)(\sin \theta_0) \cdot e^{-ik_s(\sin \varphi_0 \cos \theta_0 x + \sin \theta_0 z)} \right. \\
& \cdot \left[\frac{e^{-ik_s(\cos \varphi_0 \cos \theta_0 y)} - e^{ik_s(\cos \varphi_0 \cos \theta_0 y)}}{2} \right] + \cos \varphi_0 \cdot (-ik_s)(-\sin \theta_1) \\
& \cdot e^{-ik_s(\sin \varphi_0 \cos \theta_1 x - \sin \theta_1 z)} \cdot \left. \left[\frac{e^{-ik_s(\cos \varphi_0 \cos \theta_1 y)} - e^{ik_s(\cos \varphi_0 \cos \theta_1 y)}}{2} \right] \right]
\end{aligned}$$

4.6.1 Expresiones generales

De un modo más general, introduciremos las expresiones necesarias para llevar a cabo el cálculo del campo de desplazamientos, deformaciones y tensiones para cualquier onda que pudiera propagarse en cualquier dirección del espacio (*Inclusión del nuevo ángulo φ*).

No obstante, primeramente debemos de hacer hincapié en las expresiones referidas a los vectores dirección y propagación; tanto uno como el otro, deberán estar expresados en función de las nuevas coordenadas generales, lo que implica que:

$$d^{(i)} = R \cdot \tilde{d}^i$$

$$p^{(i)} = R \cdot \tilde{p}^i$$

Siendo:

\tilde{p}^i y \tilde{d}^i las expresiones del vector propagación y del vector dirección para una onda contenida en un plano perpendicular al plano de simetría (xz).

4.6.1.1 *Campo de Desplazamientos*

A modo de aclaración, primeramente serán deducidas las expresiones del campo de desplazamiento, tanto para el caso simétrico como para el caso antisimétrico para, posteriormente, proceder al cálculo del tensor de deformaciones y del tensor de tensiones respectivamente.

4.6.1.1.1 Caso simétrico

$$u_1^s = \sum_{i=1}^n AA(i) \cdot d_1^{(i)} \cdot e_{xz}(i) \cdot e_{ys}(i)$$

$$u_2^s = \sum_{i=1}^n AA(i) \cdot d_2^{(i)} \cdot e_{xz}(i) \cdot e_{ya}(i)$$

$$u_3^s = \sum_{i=1}^n AA(i) \cdot d_3^{(i)} \cdot e_{xz}(i) \cdot e_{ys}(i)$$

Siendo:

- n : el número de ondas que intervienen en el análisis (incidentes y reflejadas).
- $AA(i)$: amplitud de las ondas que intervienen en el análisis, donde:

$$\begin{array}{ll} Sh \begin{cases} AA(1) = Sh \text{ incidente} \\ AA(2) = Sh \text{ reflejada} \end{cases} & Sv \begin{cases} AA(1) = Sv \text{ incidente} \\ AA(2) = Sv \text{ reflejada} \\ AA(3) = P \text{ reflejada} \end{cases} \\ P \begin{cases} AA(1) = P \text{ incidente} \\ AA(2) = P \text{ reflejada} \\ AA(3) = Sv \text{ reflejada} \end{cases} & Ra \begin{cases} AA(1) = Ra \text{ incidente} \\ AA(2) = Ra \text{ reflejada} \end{cases} \end{array}$$

- $d^{(i)}$: vector dirección de propagación, cuyos términos se encuentran expresados en función de las coordenadas generales. Así, tenemos que:

$$e_{xz}(i)$$

$$e_{xz}(i) = e^{-ik^{(i)}(p_1^{(i)} \cdot x_1 + p_3^{(i)} \cdot x_3)}$$

$$e_{ys}(i)$$

$$e_{ys}(i) = \frac{e^{-ik_j p_2^{(i)} \cdot x_2} + e^{ik_j p_2^{(i)} \cdot x_2}}{2}$$

$$e_{ya}(i)$$

$$e_{ya}(i) = \frac{e^{-ik_j p_2^{(i)} \cdot x_2} - e^{ik_j p_2^{(i)} \cdot x_2}}{2}$$

4.6.1.1.2 Caso antisimétrico

$$u_1^a = \sum_{i=1}^n AA(i) \cdot d_1^{(i)} \cdot e_{xz}(i) \cdot e_{ya}(i)$$

$$u_2^a = \sum_{i=1}^n AA(i) \cdot d_2^{(i)} \cdot e_{xz}(i) \cdot e_{ys}(i)$$

$$u_3^a = \sum_{i=1}^n AA(i) \cdot d_3^{(i)} \cdot e_{xz}(i) \cdot e_{ya}(i)$$

Donde el significado de cada término quedó especificado con anterioridad.

4.6.1.2 *Campo de Deformaciones*

4.6.1.2.1 Caso simétrico

El primer paso será obtener cada una de las derivadas del campo de desplazamiento, para después poder obtener las componentes del tensor de deformaciones de manera inmediata. De modo que:

$$du(i,j) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

$$du^s(1,1) = \sum d_1^{(i)} \cdot p_1^{(i)} \cdot (-ik^{(i)}) \cdot e_{xz}(i) \cdot e_{ys}(i)$$

$$du^s(1,2) = \sum d_1^{(i)} \cdot p_2^{(i)} \cdot (-ik^{(i)}) \cdot e_{xz}(i) \cdot e_{ya}(i)$$

$$du^s(1,3) = \sum d_1^{(i)} \cdot p_3^{(i)} \cdot (-ik^{(i)}) \cdot e_{xz}(i) \cdot e_{ys}(i)$$

$$du^s(2,1) = \sum d_2^{(i)} \cdot p_1^{(i)} \cdot (-ik^{(i)}) \cdot e_{xz}(i) \cdot e_{ya}(i)$$

$$du^s(2,2) = \sum d_2^{(i)} \cdot p_2^{(i)} \cdot (-ik^{(i)}) \cdot e_{xz}(i) \cdot e_{ys}(i)$$

$$du^s(2,3) = \sum d_2^{(i)} \cdot p_3^{(i)} \cdot (-ik^{(i)}) \cdot e_{xz}(i) \cdot e_{ya}(i)$$

$$du^s(3,1) = \sum d_3^{(i)} \cdot p_1^{(i)} \cdot (-ik^{(i)}) \cdot e_{xz}(i) \cdot e_{ys}(i)$$

$$du^s(3,2) = \sum d_3^{(i)} \cdot p_2^{(i)} \cdot (-ik^{(i)}) \cdot e_{xz}(i) \cdot e_{ya}(i)$$

$$du^s(3,3) = \sum d_3^{(i)} \cdot p_3^{(i)} \cdot (-ik^{(i)}) \cdot e_{xz}(i) \cdot e_{ys}(i)$$

Donde $e_{xz}(i)$, $e_{ys}(i)$ y $e_{ya}(i)$ tendrán la mismas expresiones que las deducidas anteriormente.

4.6.1.2.2 Caso antisimétrico

$$du^a(1,1) = \sum d_1^{(i)} \cdot p_1^{(i)} \cdot (-ik^{(i)}) \cdot e_{xz}(i) \cdot e_{ya}(i)$$

$$du^a(1,2) = \sum d_1^{(i)} \cdot p_2^{(i)} \cdot (-ik^{(i)}) \cdot e_{xz}(i) \cdot e_{ys}(i)$$

$$du^a(1,3) = \sum d_1^{(i)} \cdot p_3^{(i)} \cdot (-ik^{(i)}) \cdot e_{xz}(i) \cdot e_{ya}(i)$$

$$du^a(2,1) = \sum d_2^{(i)} \cdot p_1^{(i)} \cdot (-ik^{(i)}) \cdot e_{xz}(i) \cdot e_{ys}(i)$$

$$du^a(2,2) = \sum d_2^{(i)} \cdot p_2^{(i)} \cdot (-ik^{(i)}) \cdot e_{xz}(i) \cdot e_{ya}(i)$$

$$du^a(2,3) = \sum d_2^{(i)} \cdot p_3^{(i)} \cdot (-ik^{(i)}) \cdot e_{xz}(i) \cdot e_{ys}(i)$$

$$du^a(3,1) = \sum d_3^{(i)} \cdot p_1^{(i)} \cdot (-ik^{(i)}) \cdot e_{xz}(i) \cdot e_{ya}(i)$$

$$du^a(3,2) = \sum d_3^{(i)} \cdot p_2^{(i)} \cdot (-ik^{(i)}) \cdot e_{xz}(i) \cdot e_{ys}(i)$$

$$du^a(3,3) = \sum d_3^{(i)} \cdot p_3^{(i)} \cdot (-ik^{(i)}) \cdot e_{xz}(i) \cdot e_{ya}(i)$$

Finalmente, introduciremos las expresiones generales que hacen mención a los términos del tensor de deformaciones, de modo que para cada tipo de onda quedarán particularizados cada uno de esos términos. Así, tenemos que:

4.6.1.2.3 Caso simétrico

$$\varepsilon_{11}^s = \frac{\partial u_1^s}{\partial x} = du^s(1,1)$$

$$\varepsilon_{12}^s = \varepsilon_{21}^s = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1^s}{\partial y} + \frac{\partial u_2^s}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} (du^s(1,2) + du^s(2,1))$$

$$\varepsilon_{22}^s = \frac{\partial u_2^s}{\partial y} = du^s(2,2)$$

$$\varepsilon_{13}^s = \varepsilon_{31}^s = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1^s}{\partial z} + \frac{\partial u_3^s}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} (du^s(1,3) + du^s(3,1))$$

$$\varepsilon_{33}^s = \frac{\partial u_3^s}{\partial z} = du^s(3,3)$$

4.6.1.2.4 Caso antisimétrico

Las expresiones para el caso antisimétrico serán análogas que para el caso simétrico con la única salvedad de que $du_{i,j}^s = du_{i,j}^a$.

4.6.1.3 *Campo de Tensiones*

En lo referido a la obtención del Campo de Tensiones, recurriremos a las siguientes expresiones:

4.6.1.3.1 Caso simétrico

$$\sigma_{xx}^s = 2\mu \cdot \varepsilon_{xx}^s + \lambda \cdot \varepsilon_{kk}$$

$$\sigma_{yy}^s = 2\mu \cdot \varepsilon_{yy}^s + \lambda \cdot \varepsilon_{kk}$$

$$\sigma_{zz}^s = 2\mu \cdot \varepsilon_{zz}^s + \lambda \cdot \varepsilon_{kk}$$

$$\sigma_{xy}^s = \sigma_{yx}^s = 2\mu \cdot \varepsilon_{xy}^s = 2\mu \cdot \varepsilon_{yx}^s$$

$$\sigma_{xz}^s = \sigma_{zx}^s = 2\mu \cdot \varepsilon_{xz}^s = 2\mu \cdot \varepsilon_{zx}^s$$

$$\sigma_{yz}^s = \sigma_{zy}^s = 2\mu \cdot \varepsilon_{yz}^s = 2\mu \cdot \varepsilon_{zy}^s$$

4.6.1.3.2 Caso antisimétrico

$$\sigma_{xx}^a = 2\mu \cdot \varepsilon_{xx}^a + \lambda \cdot \varepsilon_{kk}$$

$$\sigma_{yy}^a = 2\mu \cdot \varepsilon_{yy}^a + \lambda \cdot \varepsilon_{kk}$$

$$\sigma_{zz}^a = 2\mu \cdot \varepsilon_{zz}^a + \lambda \cdot \varepsilon_{kk}$$

$$\sigma_{xy}^a = \sigma_{yx}^a = 2\mu \cdot \varepsilon_{xy}^a = 2\mu \cdot \varepsilon_{yx}^a$$

$$\sigma_{xz}^a = \sigma_{zx}^a = 2\mu \cdot \varepsilon_{xz}^a = 2\mu \cdot \varepsilon_{zx}^a$$

$$\sigma_{yz}^a = \sigma_{zy}^a = 2\mu \cdot \varepsilon_{yz}^a = 2\mu \cdot \varepsilon_{zy}^a$$

Una vez obtenidas las expresiones generales que hacen referencia a la propagación de las ondas desde un ángulo de incidencia general (situado fuera de un plano perpendicular al plano de simetría de la estructura), trataremos en el siguiente capítulo de analizar algunos de los factores que se consideran claves en la respuesta sísmica de una estructura.

5 Resultados

5.1 Introducción.

A lo largo del presente capítulo, abordaremos la resolución de los problemas que se hayan planteado en este proyecto.

En primera instancia, realizaremos el análisis de una estructura cilíndrica semienterrada en el semiespacio con el fin de comprobar que la inclusión del nuevo ángulo de incidencia (φ) en las ecuaciones de propagación de las ondas ha sido correcta.

En segundo lugar, afrontaremos el análisis de una estructura de contención de aguas; más concretamente, la presa de Morrow Point (Colorado, U.S.A). Se trata de una presa clásica en análisis dinámicos, los cuales han sido realizados por destacados investigadores de nivel internacional.

Se trata éste de un capítulo de gran importancia dentro del conglomerado que supone la realización de este proyecto, puesto que en él se abordará el análisis de los diversos factores que conforman el fenómeno de la excitación sísmica y que influyen en la respuesta de una estructura.

Para la realización de los cálculos, así como para el tratamiento posterior de los resultados, se ha optado por recurrir a la utilización de varios programas informáticos. El correcto uso de éstos y la interpretación posterior de los resultados obtenidos dependen, en gran medida, del conocimiento preciso de los problemas estudiados y de los fundamentos teóricos, así como de los procedimientos llevados a cabo por dichos programas informáticos.

Como apartado final, se realizará una revisión y análisis de los resultados obtenidos con el fin de elaborar unas conclusiones que puedan servir como base para futuras líneas de investigación en trabajos que pudieran realizarse en este campo de estudio.

5.2 Estructura cilíndrica semienterrada en el semiespacio.

Como hemos aclarado en el inicio de este capítulo, el primer problema sometido a estudio será el de una estructura cilíndrica semienterrada en el semiespacio. El problema queda esquematizado según la figura 5.1, en la cual hemos representado la mitad del problema, que presenta simetría respecto al *plano* xz .

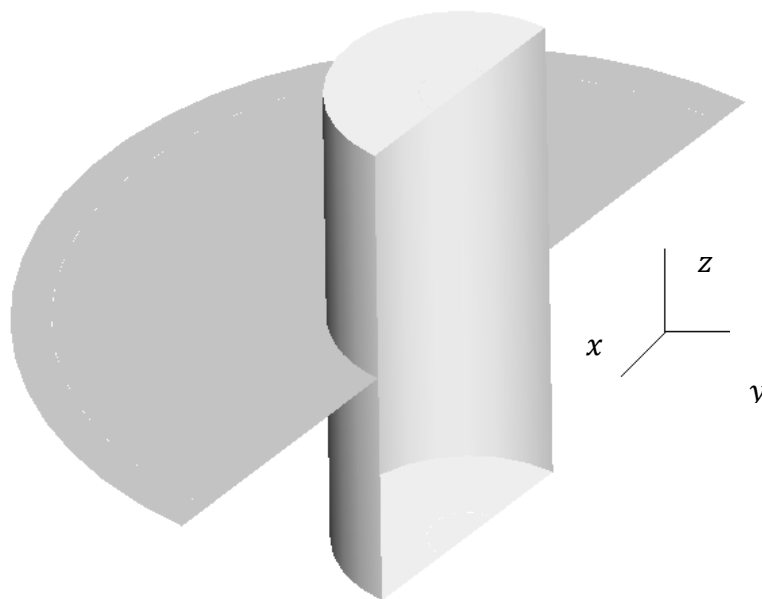


Figura 5.1. Estructura cilíndrica semienterrada en el semiespacio.

Por lo que respecta a las dimensiones de la estructura, ésta tendrá una altura de 200 m y un diámetro de 50 m. En lo que a los medios que intervienen en el análisis, diferenciamos dos clases: el suelo y la estructura. Las propiedades de cada uno de estos medios se indican en la tabla 5.1.

Suelo	Módulo de rigidez transversal: $G_s = 5 \cdot 10^8 \text{ N/mm}^2$ Módulo de Poisson: $\nu_s = 0.3$ Coeficiente de amortiguamiento: $\xi_s = 0.05$ Densidad: $\rho_s = 2000 \text{ kg/m}^3$
Estructura cilíndrica	Módulo de rigidez transversal: $G_e = 1 \cdot 10^{10} \text{ N/mm}^2$ Módulo de Poisson: $\nu_e = 0.2$ Coeficiente de amortiguamiento: $\xi_e = 0.05$ Densidad: $\rho_e = 2500 \text{ kg/m}^3$

Tabla 5.1. Propiedades de los medios que intervienen en el problema.

5.2.1 Discretización utilizada.

A lo largo de este apartado se detallará el proceso encargado de definir el modelo de elementos de contorno con el que se analizará el problema en cuestión. La elección del modelo conlleva muchos aspectos relacionados con el problema sobre los que se debe decidir. Uno de estos aspectos radica en elegir la discretización adecuada con el fin de aproximar la geometría del problema y las variables dinámicas del mismo.

Como sucede en la mayoría de problemas analizados a través del MEC, encontrar la discretización adecuada supone el mayor de los retos que se plantean. El objetivo será el de encontrar una discretización con un número de nodos razonable y a través de la que se obtengan resultados lo suficientemente precisos. Cabe recordar que cuanto mayor sea el número de nodos, mayor será el número de grados de libertad del problema y mayor será el tiempo de computación necesario para obtener los resultados, pudiendo incluso resultar insuficiente la capacidad de cálculo de las máquinas disponibles. De ahí a que sea muy tenida en cuenta la importancia de la elección de la discretización.

Por otro lado, cabe recordar que tanto la geometría del problema como las variables primarias y sus derivadas se aproximarán mediante las funciones de aproximación explicadas en capítulos anteriores.

Acerca de la discretización realizada sobre el modelo, ésta ha sido obtenida a través del software informático GID, un pre y postprocesador desarrollado por el CIMNE (International Center for Numerical Methods in Engeneering), con sede en Barcelona y que nos permite importar las discretizaciones realizadas y verlas de forma gráfica como se observa en la figura 5.2.

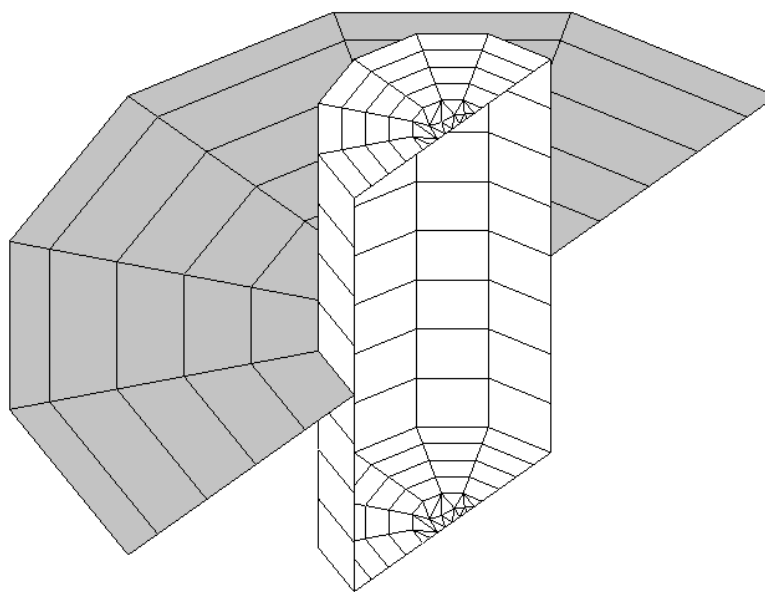


Figura 5.2. Discretización aplicada en la estructura cilíndrica semienterrada.

En lo referido a los elementos utilizados para llevar a cabo la discretización, se emplearon elementos cuadráticos cuadriláteros y elementos cuadráticos triangulares de 9 y 6 nodos respectivamente.

A modo de recordatorio, la simetría de la geometría del problema provoca que sólo sea necesaria la discretización de la mitad del mismo (figura 5.2.). En efecto, la reducción de la discretización a la mitad nos conduce a que el número de grados de libertad del problema también se vea reducido a la mitad, provocando que el sistema de ecuaciones resultante de la aplicación del MEC también reduzca su tamaño a la mitad, reduciendo los tiempos de computación y agilizando la obtención de resultados. Para explicar las razones de la simplificación que provoca la simetría del problema, se tiene la figura 5.3.

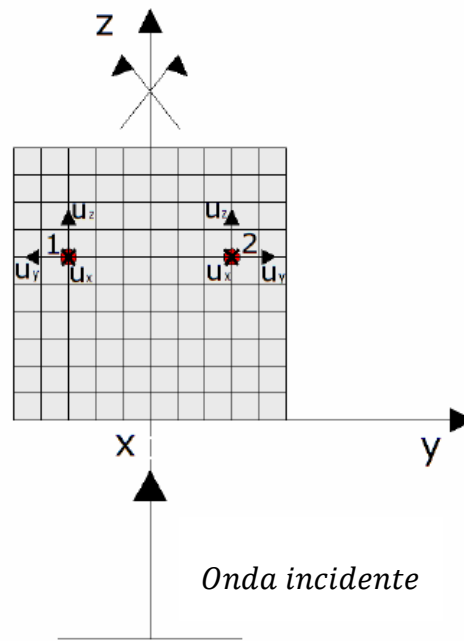


Figura 5.3. Simetría del problema y de la excitación. Relación entre las componentes del desplazamiento de dos puntos emplazados simétricamente.

Los puntos 1 y 2 se encuentran simétricamente situados. En caso de considerar la discretización del problema entero y tras plantear el sistema de ecuaciones, aparecerán las incógnitas correspondientes a los nodos 1 y 2, en este caso las 3 componentes del vector desplazamiento (u_x, u_y, u_z) . No obstante, recurriendo a la simetría del problema, las componentes del vector desplazamiento de ambos puntos guardan la siguiente relación:

$$\begin{cases} u_{x1} = u_{x2} \\ u_{y1} = -u_{y2} \\ u_{z1} = u_{z2} \end{cases}$$

Por lo que sustituyendo las variables de cada punto de una de las partes simétricas del problema por las de su simétrico, con el signo correspondiente, el sistema se ve reducido a la mitad, con el importante ahorro computacional que ello supone.

5.3 Planteamiento del primer problema.

Como ya se dijo anteriormente, el primer problema servirá como prueba a modo de comprobación de que la inclusión del nuevo ángulo de incidencia (φ) en las ecuaciones de propagación de las ondas ha sido correcta.

Para ello partiremos de un problema inicial, denominado problema de referencia. Dicho problema será distinto para cada tipo de onda. Así, y de un modo más concreto, en estos problemas sólo se tendrá en cuenta la incidencia de las ondas contenidas en un plano perpendicular al plano de simetría de la estructura. Dentro de este plano donde se encuentra contenida la onda, ésta puede variar su ángulo de incidencia (θ) sobre la estructura. Se trata del planteamiento que se había considerado hasta ahora sin tener en cuenta el nuevo ángulo de incidencia (φ) introducido en el capítulo anterior. Con la inclusión de este problema en nuestro proyecto, tratamos de certificar que la inclusión del ángulo de incidencia (φ) en la formulación matemática referida a la propagación de las ondas ha sido correcta. Se trata, por tanto, de una comprobación desde el punto de vista matemático, obviando las propiedades del medio u otros factores que influyeran en la respuesta. Para aclarar un poco todo esto, vamos a especificar el gráfico en el que quede detallado el problema de referencia específico para cada tipo de onda.

En lo referido al punto objeto del análisis y sobre el cual describiremos cada uno de los problemas de referencia, especificaremos, a través de un gráfico, el lugar donde se ubica dicho nodo. Así, se tiene que:

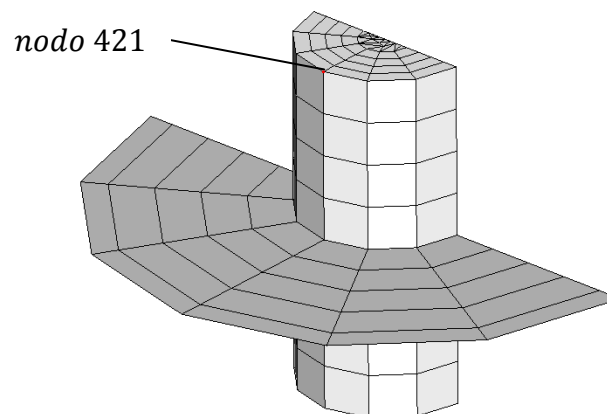


Figura 5.4. Nodo 421. Nodo sobre el que quedarán referenciados cada uno de los problemas de referencia.

Onda SH

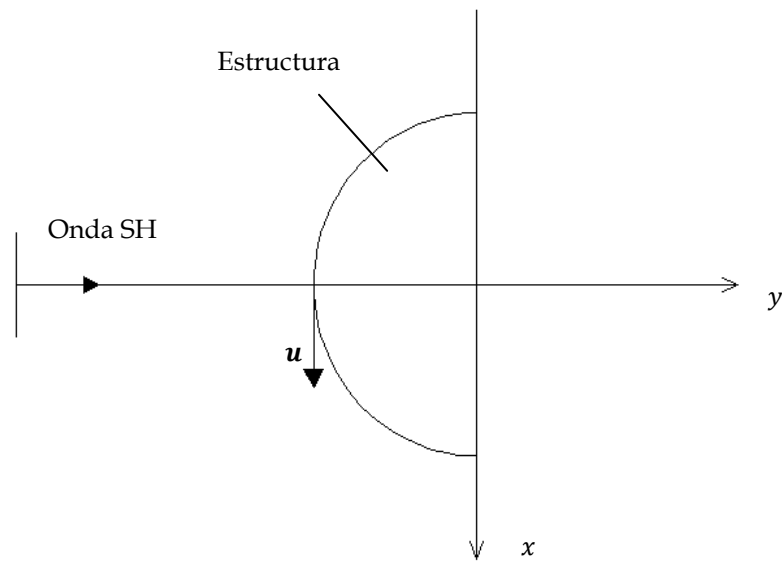


Figura 5.5. Problema de referencia para onda SH.

La figura 5.5 describe, desde una vista superior, el desplazamiento provocado por la onda SH en el nodo 421.

Onda P

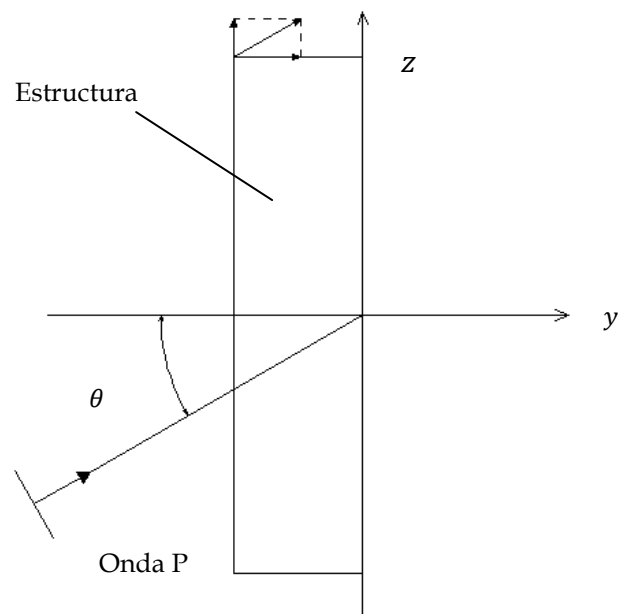


Figura 5.6. Problema de referencia para onda P.

La figura 5.6 nos muestra una vista lateral del modelo, en donde puede verse el desplazamiento que provoca la incidencia de la onda P sobre el nodo 421. La incidencia de la onda P sobre la estructura provoca la aparición de dos componentes del vector desplazamiento, la componente v y la componente w .

Onda SV

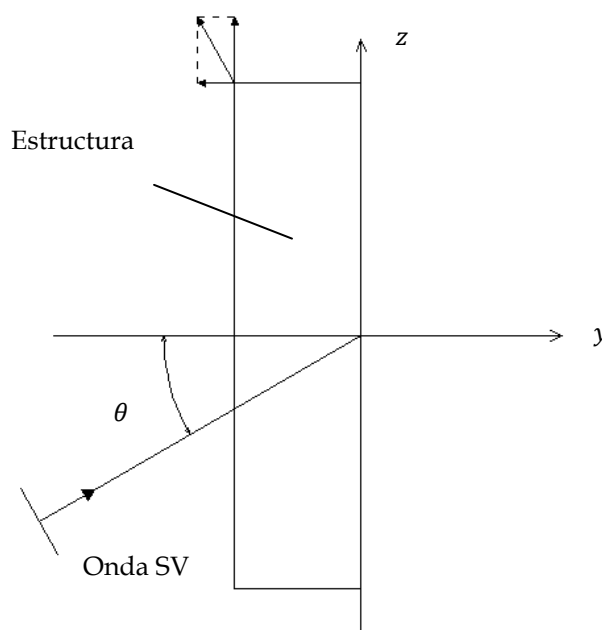


Figura 5.7. Problema de referencia para onda SV.

Finalmente, podemos observar a través de la figura 5.7 (vista lateral del modelo) el desplazamiento que provoca la incidencia de la onda SV sobre el nodo 421. Al igual que sucediera para la onda P, la incidencia de la onda SV sobre el modelo provoca la aparición de dos de las componentes del vector desplazamiento, la componente v y la componente w .

Una vez descrito el problema de referencia para cada una de las ondas, así como el desplazamiento producido por cada una de ellas sobre el nodo de la estructura sometida a análisis, el siguiente paso será el de comparar cada uno de los problemas de referencia con aquellos en los que hayamos incluido el nuevo ángulo de incidencia (φ).

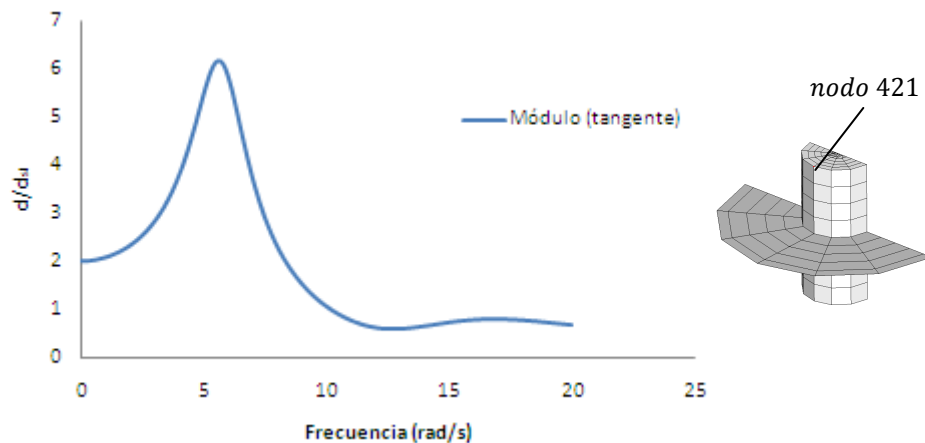
El valor de la variable que se está representando (desplazamientos) será adimensional; es decir, esta variable representará el movimiento provocado por la

excitación sísmica sobre el nodo sometido a análisis (desplazamiento) en relación con el movimiento provocado por esa misma excitación sobre un punto situado lo suficientemente alejado de la estructura (campo libre).

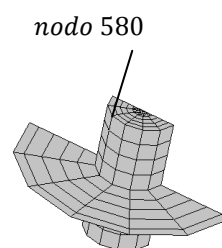
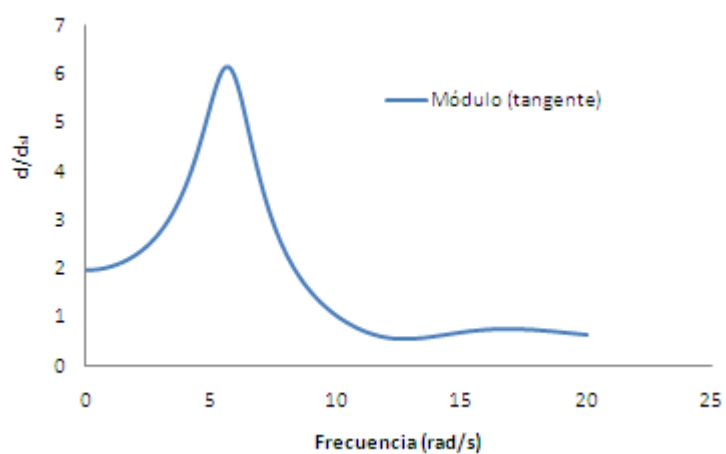
Por lo que se refiere al valor de esta variable, para cada valor de la frecuencia ésta vendrá dada por un número complejo. Para una frecuencia determinada, la excitación provocará un movimiento armónico de amplitud unitaria en campo libre (en ausencia de la estructura) y la respuesta en el punto sometido al análisis será otra función armónica de la misma frecuencia pero de distinta amplitud y desfasada con la excitación. El modulo del número complejo representará la amplitud de la respuesta en relación con la amplitud del movimiento en campo libre.

5.3.1 Onda SH

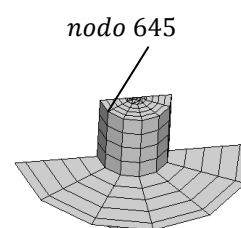
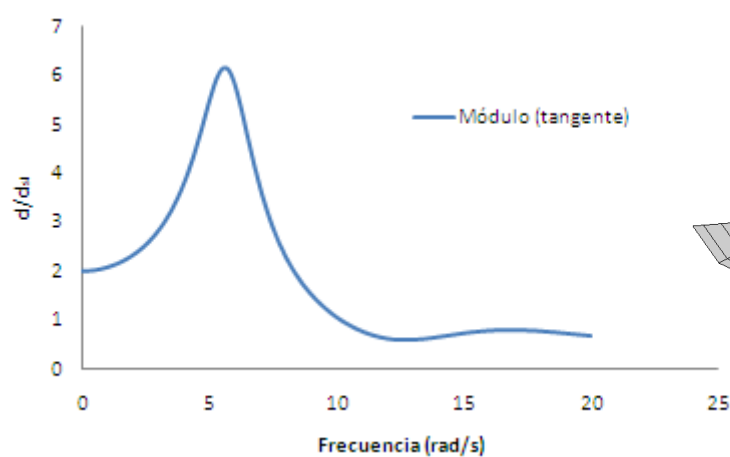
Problema de referencia SH_1^0 ($\theta = 30^\circ$)



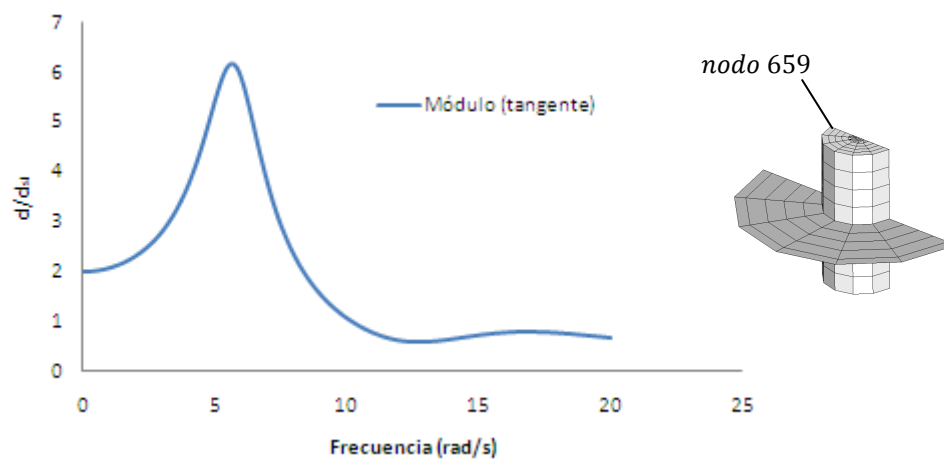
Problema SH_1^1 ($\varphi = 30^\circ$; $\theta = 30^\circ$)



Problema SH_2^1 ($\varphi = 60^\circ$; $\theta = 30^\circ$)



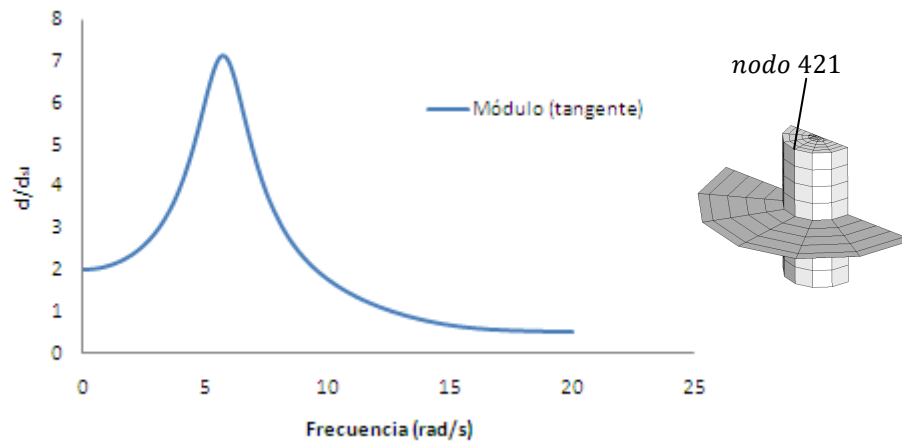
Problema SH_3^1 ($\varphi = 90^\circ$; $\theta = 30^\circ$)



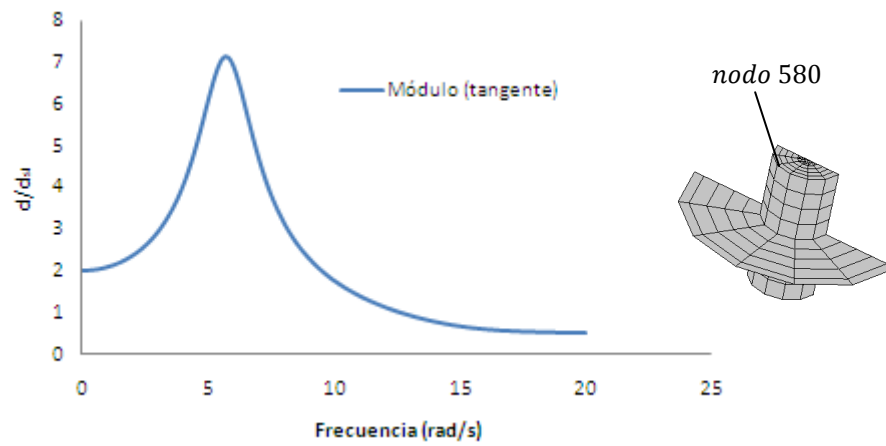
A modo de contrastar a través de datos numéricos lo mostrado a través de las gráficas, introduciremos el valor del desplazamiento para un valor concreto del rango de frecuencias estudiado. Así, se tiene la siguiente tabla:

Frecuencia: 5 rad/s	φ (grados)	θ (grados)	Parte real	Parte imaginaria	Módulo
SH_1^0 (nodo 421)	0	30	4.63E+00	-2.85E+00	5.437532
SH_1^1 (nodo 580)	30	30	4.63E+00	-2.85E+00	5.437544
SH_2^1 (nodo 645)	60	30	4.63E+00	-2.85E+00	5.437581
SH_3^1 (nodo 659)	90	30	4.63E+00	-2.85E+00	5.437587

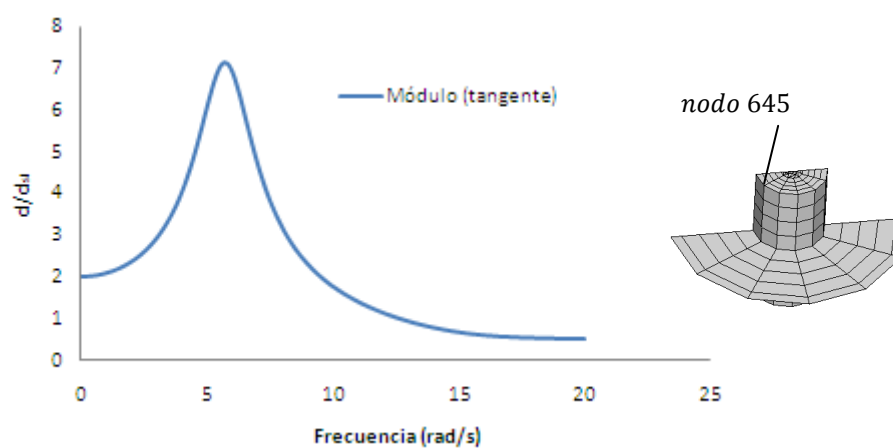
Problema de referencia SH_2^0 ($\theta = 60^\circ$)



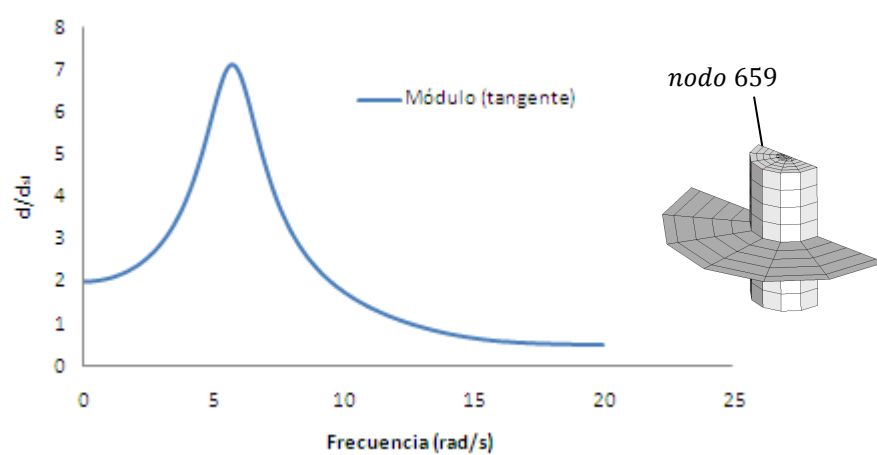
Problema SH_1^2 ($\varphi = 30^\circ; \theta = 60^\circ$)



Problema SH_2^2 ($\varphi = 60^\circ; \theta = 60^\circ$)



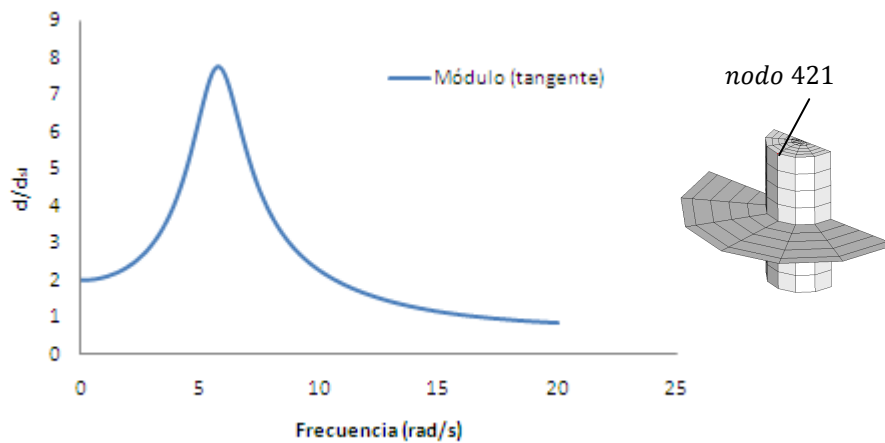
Problema SH_3^2 ($\varphi = 90^\circ; \theta = 60^\circ$)



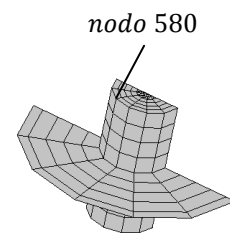
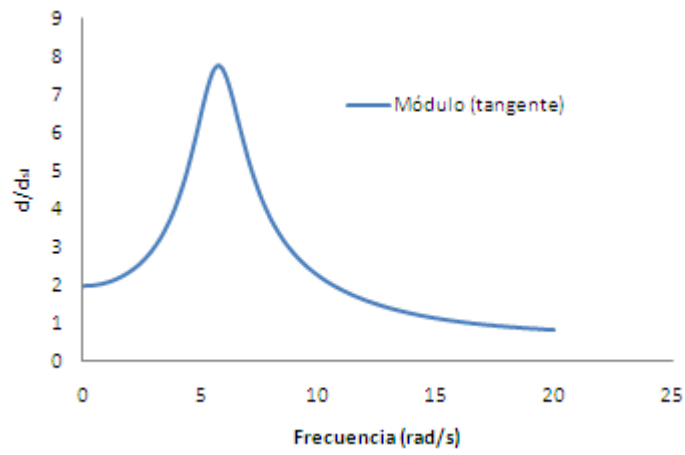
Al igual que en el caso anterior, realizaremos una tabla con el fin de contrastar los resultados:

Frecuencia: 5 rad/s	φ (grados)	θ (grados)	Parte real	Parte imaginaria	Módulo
SH_2^0 (nodo 421)	0	60	5.08E+00	-3.35E+00	6.081831
SH_1^2 (nodo 580)	30	60	5.08E+00	-3.35E+00	6.081843
SH_2^2 (nodo 645)	60	60	5.08E+00	-3.35E+00	6.081881
SH_3^2 (nodo 659)	90	60	5.08E+00	-3.35E+00	6.081901

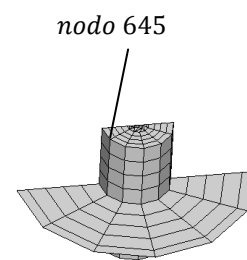
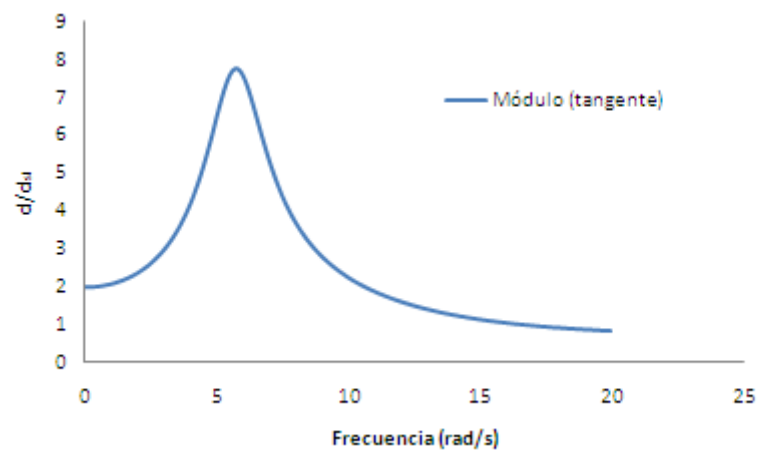
Problema de referencia SH_3^0 ($\theta = 90^\circ$)



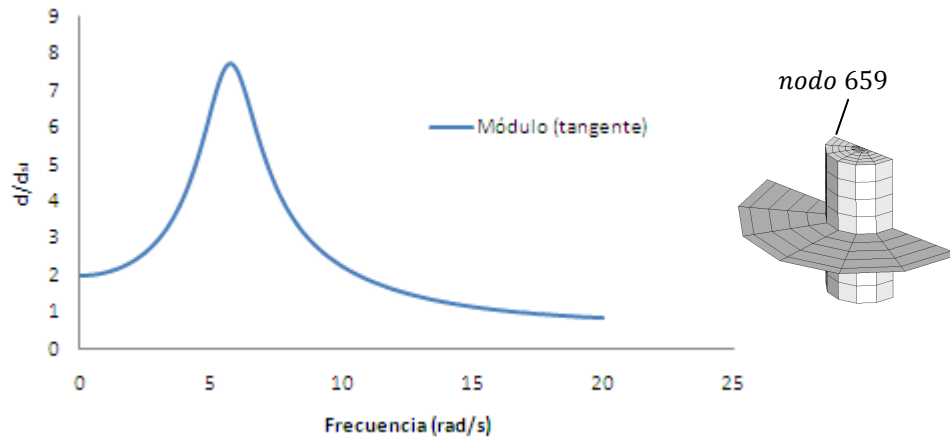
Problema SH_1^3 ($\varphi = 30^\circ; \theta = 90^\circ$)



Problema SH_2^3 ($\varphi = 60^\circ; \theta = 90^\circ$)



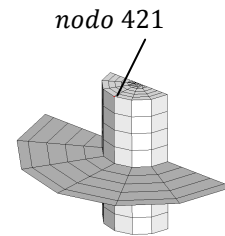
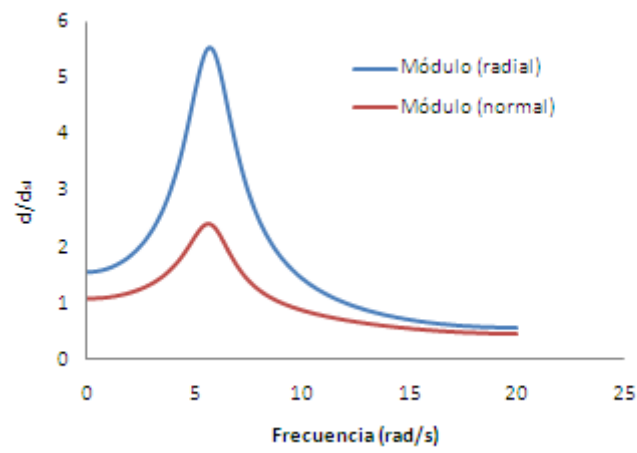
Problema SH_3^3 ($\varphi = 60^\circ$; $\theta = 90^\circ$)



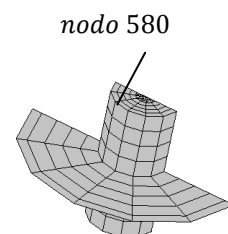
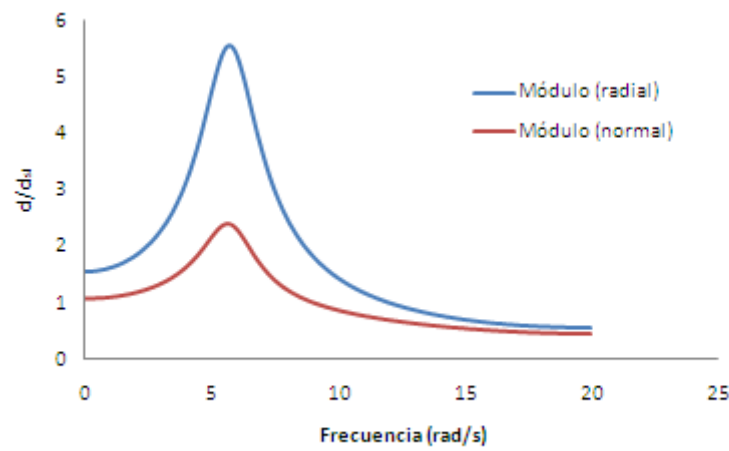
Frecuencia: 5 rad/s	φ (grados)	θ (grados)	Parte real	Parte imaginaria	Módulo
SH_3^0 (nodo 421)	0	90	5.29E+00	-3.73E+00	6.472109
SH_1^3 (nodo 580)	30	90	5.29E+00	-3.73E+00	6.472120
SH_2^3 (nodo 645)	60	90	5.29E+00	-3.73E+00	6.472157
SH_3^3 (nodo 659)	90	90	5.29E+00	-3.73E+00	6.472187

5.3.2 Onda P

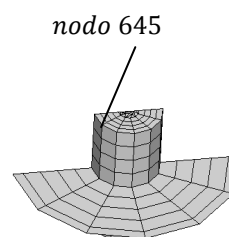
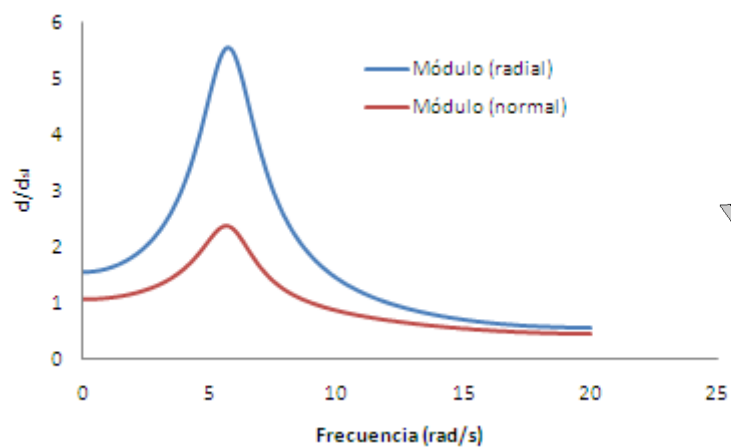
Problema de referencia P_1^0 ($\theta = 30^\circ$)



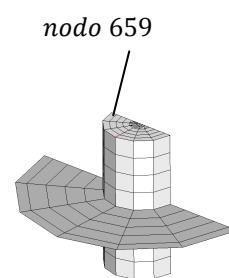
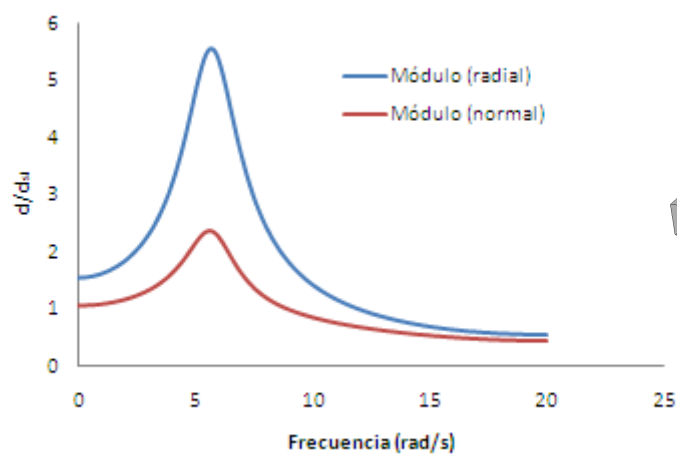
Problema P_1^1 ($\varphi = 30^\circ; \theta = 30^\circ$)



Problema P_2^1 ($\varphi = 60^\circ$; $\theta = 30^\circ$)

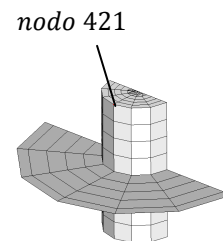
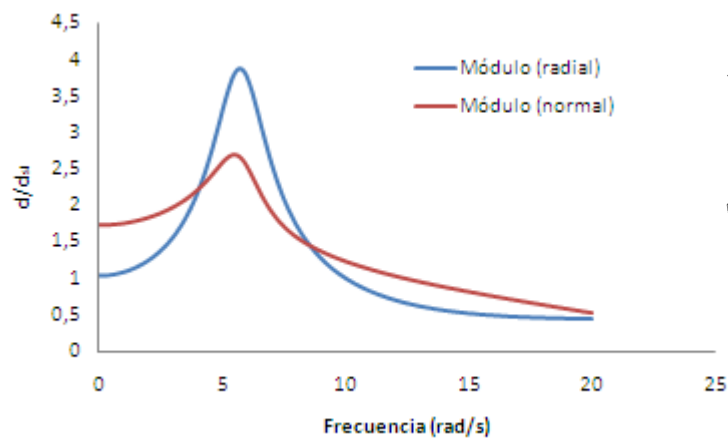


Problema P_3^1 ($\varphi = 90^\circ$; $\theta = 30^\circ$)

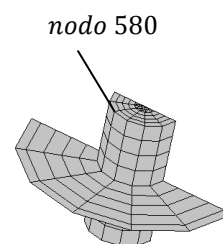
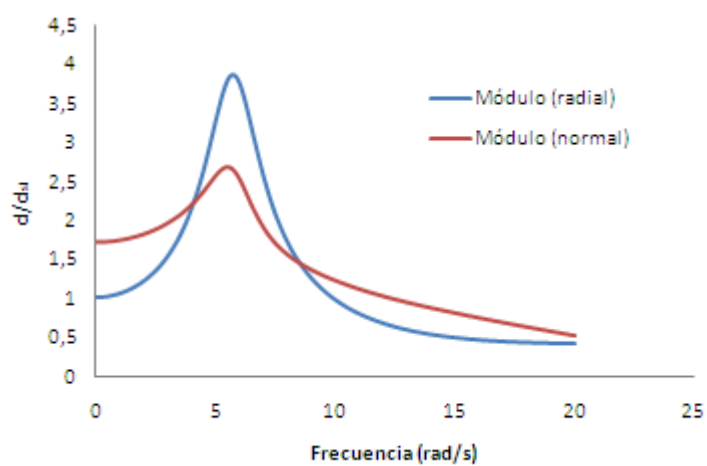


$\theta = 30^\circ$		<i>Componente radial</i>			<i>Componente normal</i>		
Frec: 5 rad/s	φ	<i>Parte real</i>	<i>Parte imaginaria</i>	<i>Módulo</i>	<i>Parte real</i>	<i>Parte imaginaria</i>	<i>Módulo</i>
P_1^0 (nodo 421)	0	4.30E+00	-1.99E+00	4.736	2.03E+00	-7.43E-01	2.159
P_1^1 (nodo 580)	30	4.30E+00	-1.99E+00	4.736	2.03E+00	-7.43E-01	2.159
P_2^1 (nodo 645)	60	4.30E+00	-1.99E+00	4.736	2.03E+00	-7.43E-01	2.159
P_3^1 (nodo 659)	90	4.30E+00	-1.99E+00	4.736	2.03E+00	-7.43E-01	2.159

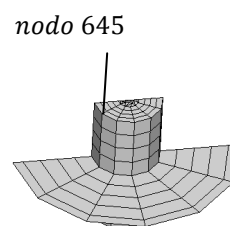
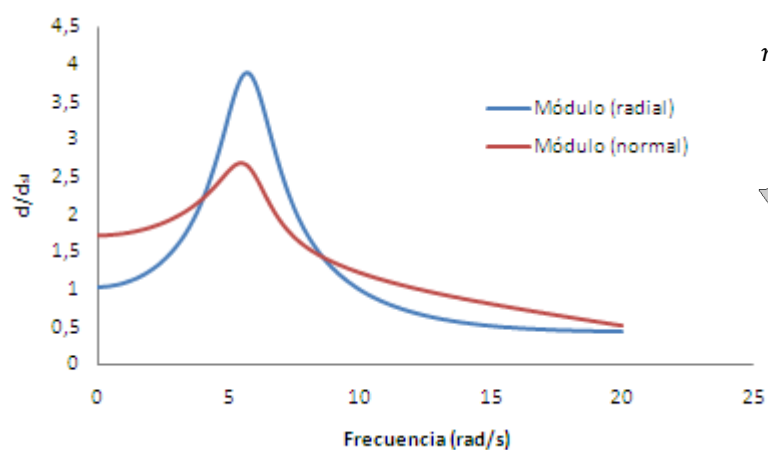
Problema de referencia P_2^0 ($\theta = 60^\circ$)



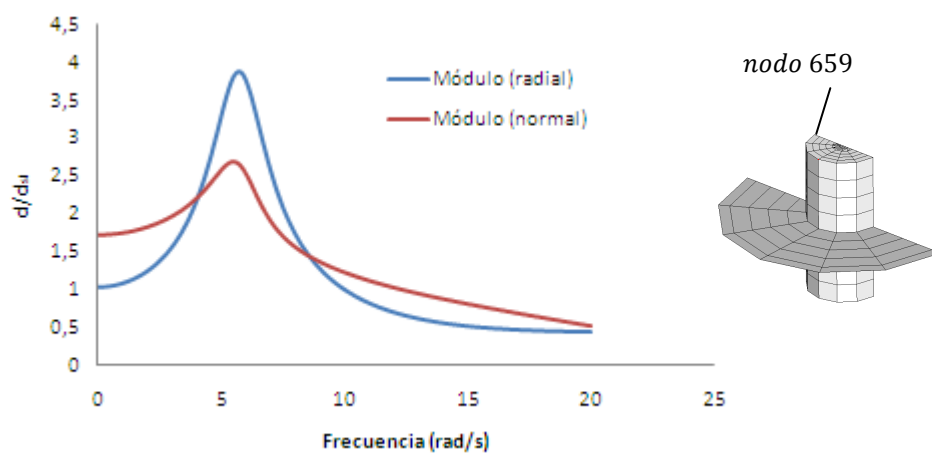
Problema P_1^2 ($\varphi = 30^\circ$; $\theta = 60^\circ$)



Problema P_2^2 ($\varphi = 60^\circ$; $\theta = 60^\circ$)

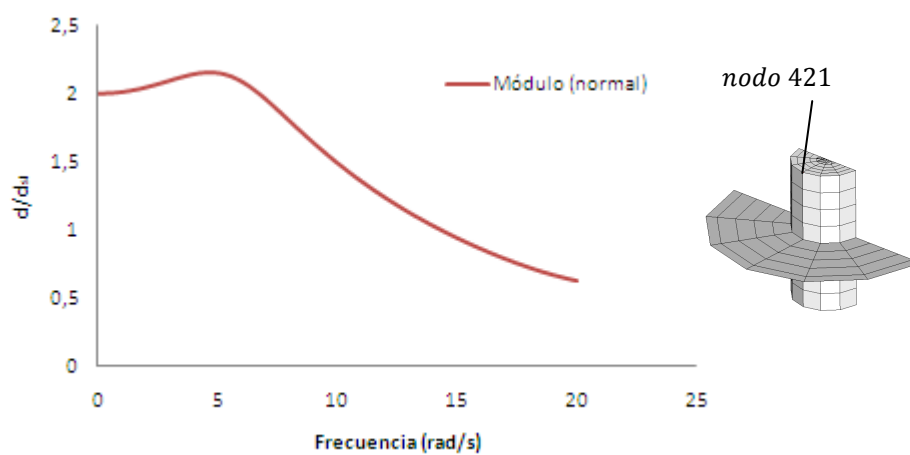


Problema P_3^2 ($\varphi = 90^\circ$; $\theta = 60^\circ$)

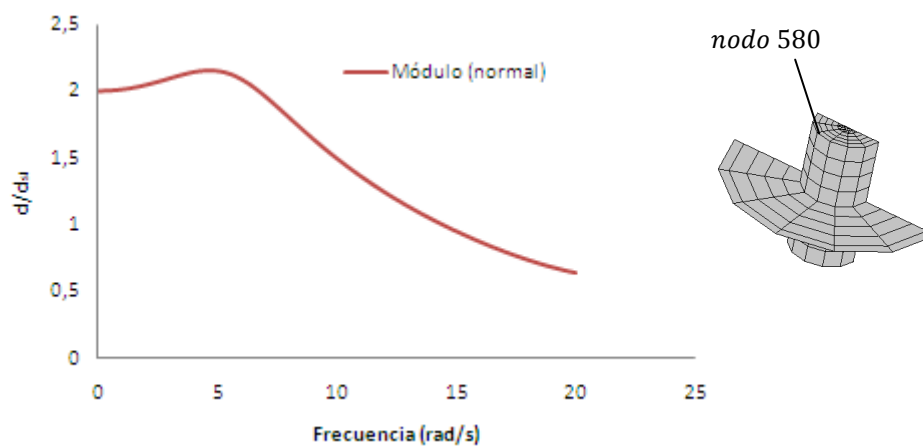


$\theta = 60^\circ$		Componente radial			Componente normal		
Frec: 5 rad/s	φ	Parte real	Parte imaginaria	Módulo	Parte real	Parte imaginaria	Módulo
P_2^0 (nodo 421)	0	3.08E+00	-1.19E+00	3.303	2.52E+00	-5.53E-01	2.576
P_1^2 (nodo 580)	30	3.08E+00	-1.19E+00	3.303	2.52E+00	-5.53E-01	2.577
P_2^2 (nodo 645)	60	3.08E+00	-1.19E+00	3.303	2.52E+00	-5.53E-01	2.577
P_3^2 (nodo 659)	90	3.08E+00	-1.19E+00	3.303	2.52E+00	-5.53E-01	2.577

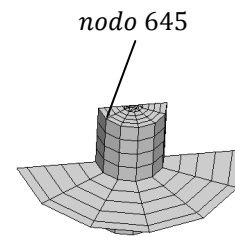
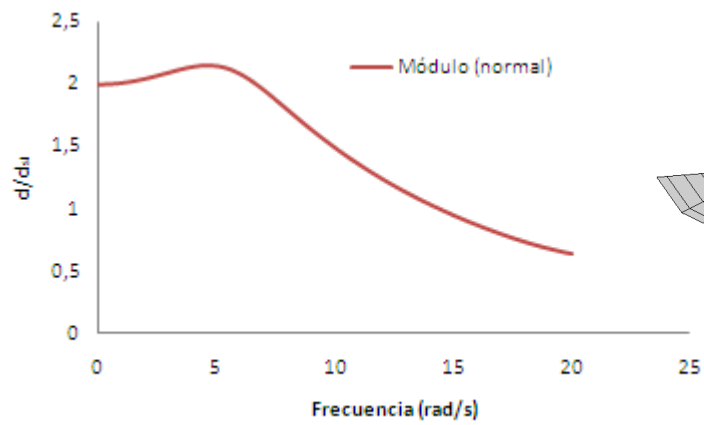
Problema de referencia P_3^0 ($\theta = 90^\circ$)



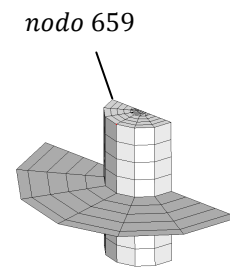
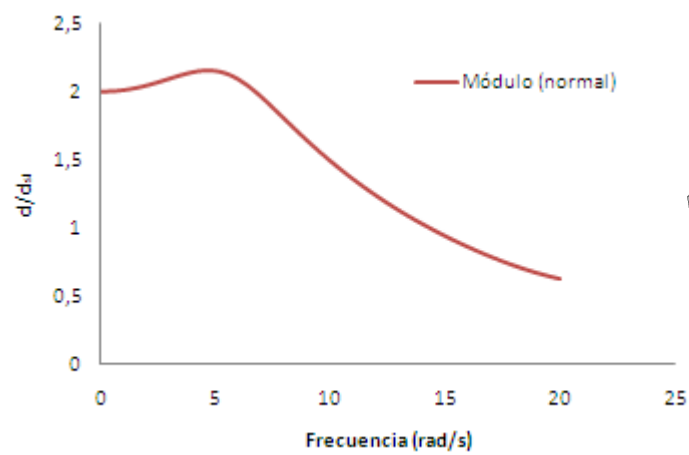
Problema P_1^3 ($\varphi = 30^\circ$; $\theta = 90^\circ$)



Problema P_2^3 ($\varphi = 60^\circ; \theta = 90^\circ$)



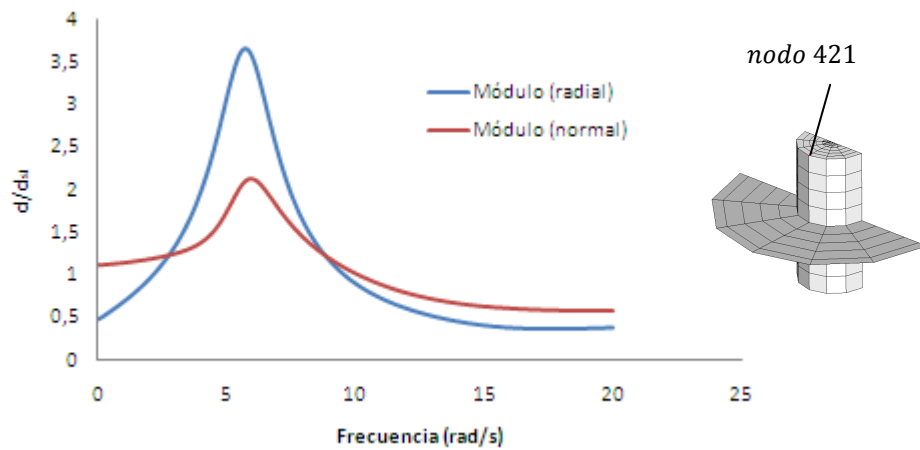
Problema P_3^3 ($\varphi = 90^\circ; \theta = 90^\circ$)



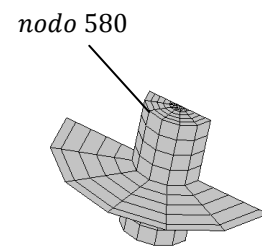
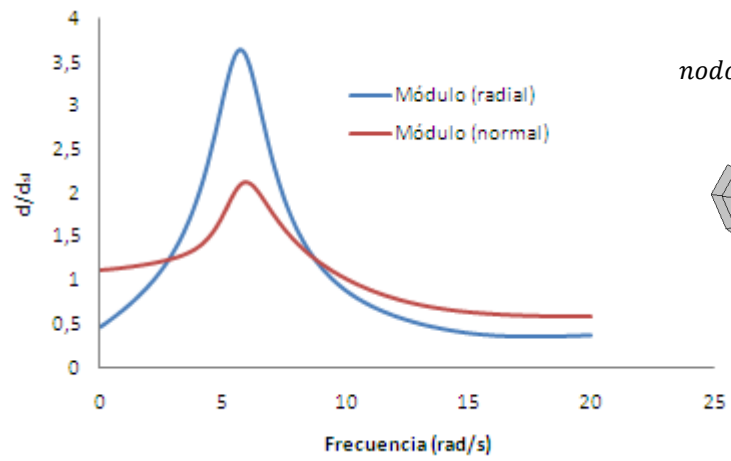
$\theta = 90^\circ$		<i>Componente normal</i>		
Frec: 5 rad/s	φ	<i>Parte real</i>	<i>Parte imaginaria</i>	<i>Módulo</i>
P_3^0 (nodo 421)	0	2.13E+00	-3.32E-01	2.151
P_1^3 (nodo 580)	30	2.13E+00	-3.32E-01	2.151
P_2^3 (nodo 645)	60	2.13E+00	-3.32E-01	2.151
P_3^3 (nodo 659)	90	2.13E+00	-3.32E-01	2.151

5.3.3 Onda SV

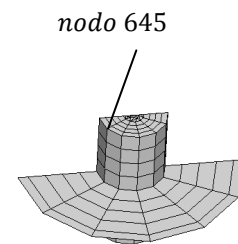
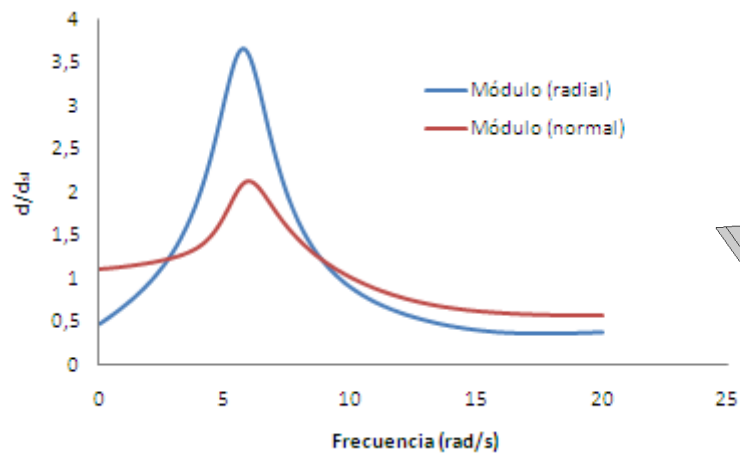
Problema de referencia SV_1^0 ($\theta = 30^\circ$)



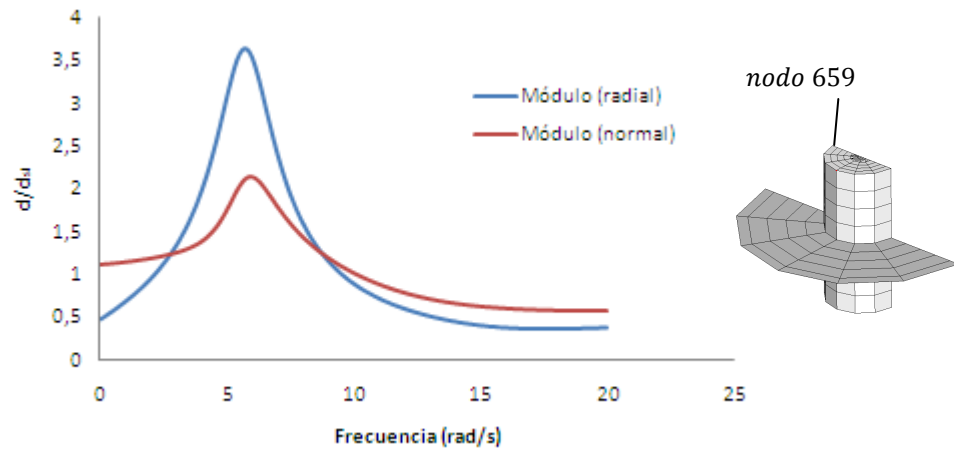
Problema SV_1^1 ($\varphi = 30^\circ; \theta = 30^\circ$)



Problema SV_2^1 ($\varphi = 60^\circ; \theta = 30^\circ$)

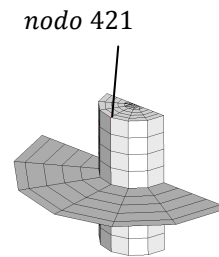
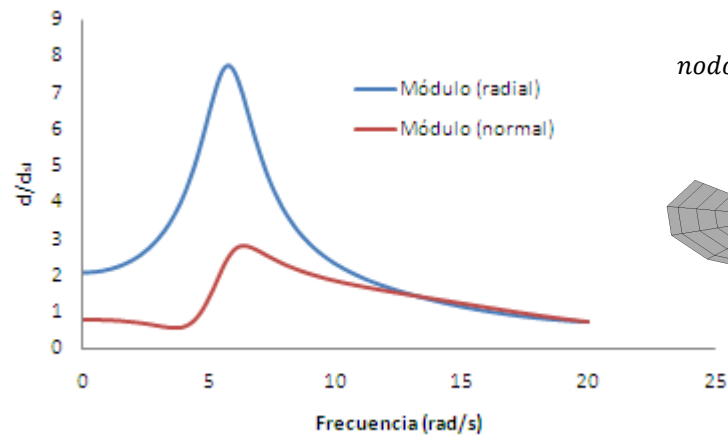


Problema SV_3^1 ($\varphi = 90^\circ$; $\theta = 30^\circ$)

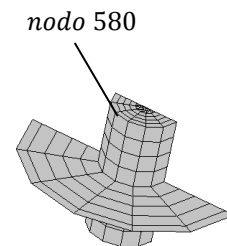
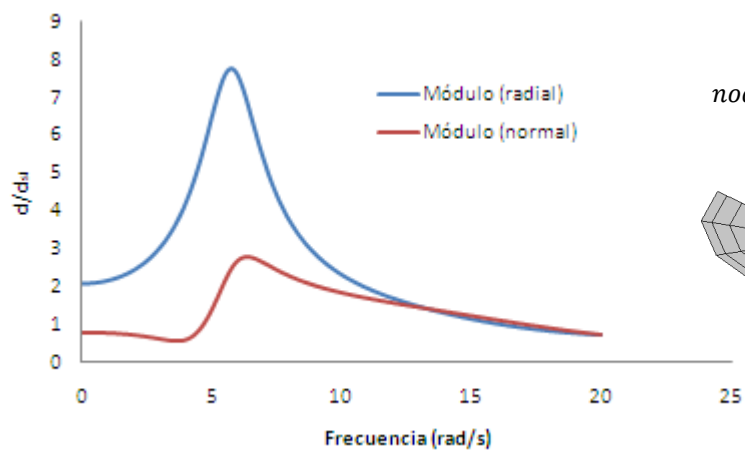


$\theta = 30^\circ$		<i>Componente radial</i>			<i>Componente normal</i>		
Frec: 5 rad/s	φ	<i>Parte real</i>	<i>Parte imaginaria</i>	<i>Módulo</i>	<i>Parte real</i>	<i>Parte imaginaria</i>	<i>Módulo</i>
P_2^0 (nodo 421)	0	-2.22E+00	-2.15E+00	3.089	-1.73E+00	-2.93E-01	1.758
P_1^2 (nodo 580)	30	-2.22E+00	-2.15E+00	3.089	-1.73E+00	-2.93E-01	1.758
P_2^2 (nodo 645)	60	-2.22E+00	-2.15E+00	3.089	-1.73E+00	-2.93E-01	1.758
P_3^2 (nodo 659)	90	-2.22E+00	-2.15E+00	3.089	-1.73E+00	-2.93E-01	1.758

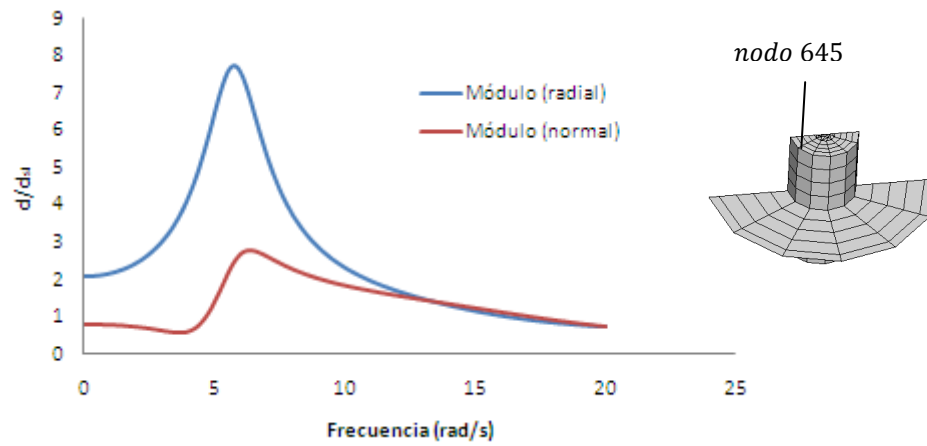
Problema de referencia SV_2^0 ($\theta = 60^\circ$)



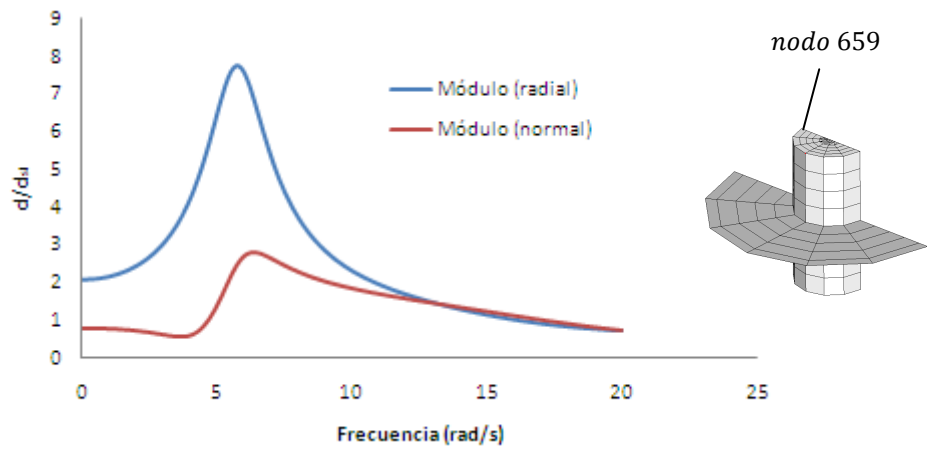
Problema SV_1^2 ($\varphi = 30^\circ$; $\theta = 60^\circ$)



Problema SV_2^2 ($\varphi = 60^\circ; \theta = 60^\circ$)

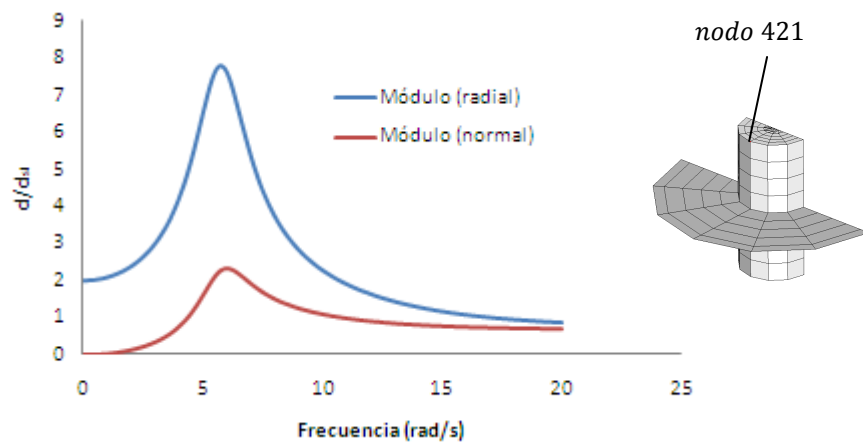


Problema SV_3^2 ($\varphi = 90^\circ; \theta = 60^\circ$)

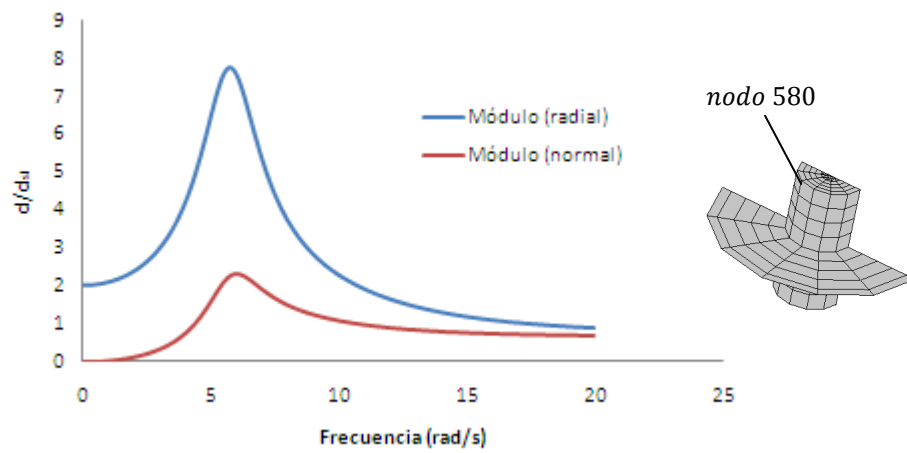


$\theta = 60^\circ$		<i>Componente radial</i>			<i>Componente normal</i>		
Frec: 5 rad/s	φ	<i>Parte real</i>	<i>Parte imaginaria</i>	<i>Módulo</i>	<i>Parte real</i>	<i>Parte imaginaria</i>	<i>Módulo</i>
P_2^0 (nodo 421)	0	4.83E+00	-4.34E+00	6.494	1.37E-01	-1.40E+00	1.403
P_1^2 (nodo 580)	30	4.83E+00	-4.34E+00	6.494	1.37E-01	-1.40E+00	1.403
P_2^2 (nodo 645)	60	4.83E+00	-4.34E+00	6.4939	1.37E-01	-1.40E+00	1.403
P_3^2 (nodo 659)	90	4.83E+00	-4.34E+00	6.4938	1.37E-01	-1.40E+00	1.403

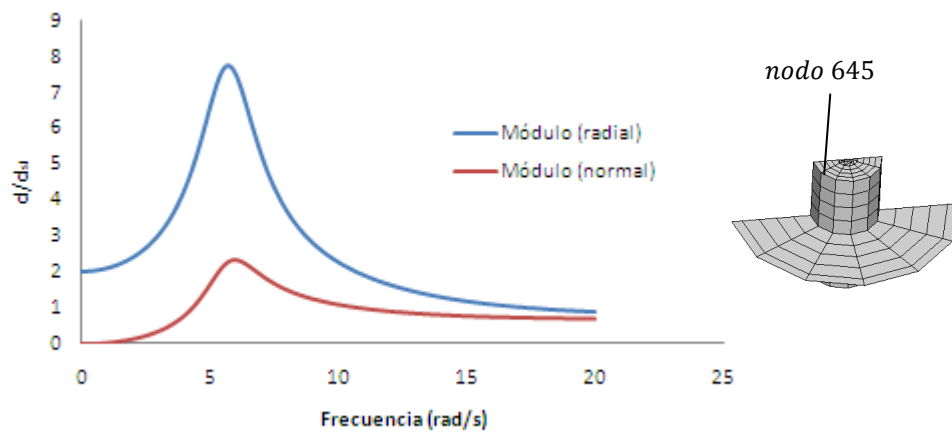
Problema de referencia SV_3^0 ($\theta = 90^\circ$)



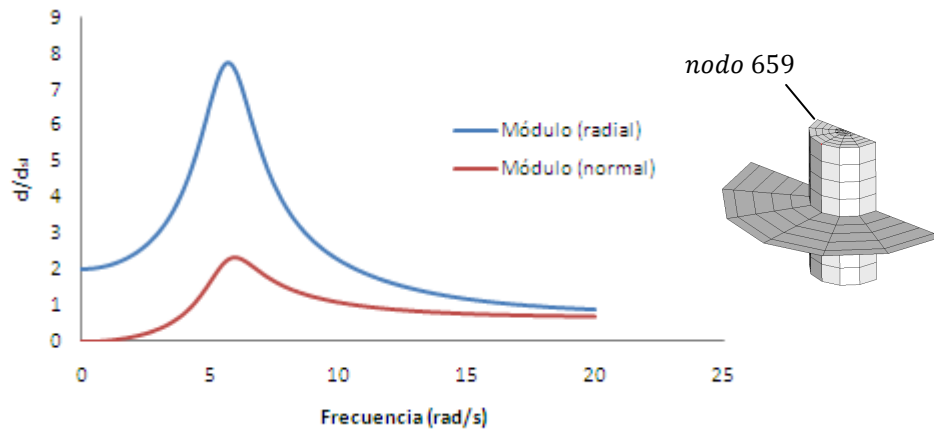
Problema SV_1^3 ($\varphi = 30^\circ; \theta = 90^\circ$)



Problema SV_2^3 ($\varphi = 60^\circ; \theta = 90^\circ$)



Problema SV_3^3 ($\varphi = 90^\circ$; $\theta = 90^\circ$)



$\theta = 90^\circ$		<i>Componente radial</i>			<i>Componente normal</i>		
Frec: 5 rad/s	φ	<i>Parte real</i>	<i>Parte imaginaria</i>	<i>Módulo</i>	<i>Parte real</i>	<i>Parte imaginaria</i>	<i>Módulo</i>
P_2^0 (nodo 421)	0	5.29E+00	-3.74E+00	6.482	1.21E+00	-1.04E+00	1.594
P_1^2 (nodo 580)	30	5.29E+00	-3.74E+00	6.482	1.21E+00	-1.04E+00	1.594
P_2^2 (nodo 645)	60	5.29E+00	-3.74E+00	6.482	1.21E+00	-1.04E+00	1.594
P_3^2 (nodo 659)	90	5.29E+00	-3.74E+00	6.482	1.21E+00	-1.04E+00	1.594

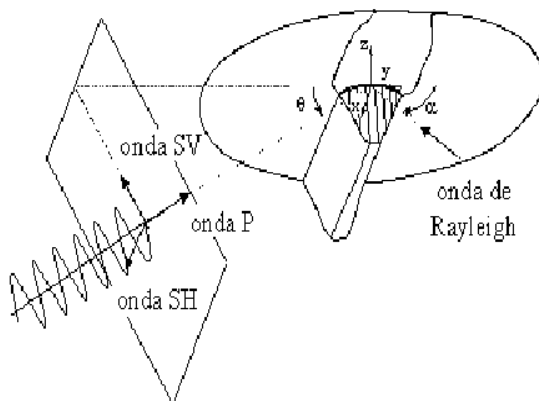
Tras realizar las comparaciones entre los problemas de referencia para cada tipo de onda y los problemas donde se hayan considerado las combinaciones de los distintos valores de θ y φ , podemos llegar a la conclusión de que el nuevo ángulo de incidencia φ ha sido introducido con éxito en las expresiones matemáticas que hacen referencia a la propagación de las ondas sísmicas.

Para ello, hemos obtenido el valor del desplazamiento para un valor concreto de la frecuencia, que ha sido de 5 rad/s . Para dicho valor, podemos ver como el valor del desplazamiento se mantiene inalterado para las diferentes hipótesis de θ y φ que se han tenido en cuenta.

5.4 Planteamiento del segundo problema.

A través del estudio de este problema, abordaremos el estudio del comportamiento sísmico de presas bóveda. Para ello, afrontaremos el análisis dinámico del modelo de una presa real, la de Morrow Point.

En muchos casos el tamaño de una presa bóveda es del mismo orden de magnitud que la longitud de las ondas sísmicas en el terreno de cimentación. Como consecuencia, el campo de desplazamientos en los estribos de la presa provocado por un sismo no es uniforme. De este modo, puntos diferentes en la cimentación de una gran presa bóveda pueden verse sometidos a valores de aceleración distintos (incluso en desfase) en el mismo instante de tiempo. La importancia de este efecto depende del tamaño de la presa, de la longitud de las ondas sísmicas y de la dirección de propagación de las mismas; en cualquier caso, asumir una simplificación de la excitación sísmica que suponga un campo uniforme de desplazamientos – aceleraciones a lo largo de la interfase presa – terreno, no sólo deja de representar los efectos de interacción mutua entre la presa y la base rocosa, sino que también altera la naturaleza real de la sollicitación y puede llevar a conclusiones erróneas.



La figura muestra el tipo de problema que se pretende resolver. Se trata de una presa bóveda que cierra un cañón cuya geometría será en general irregular. El embalse estará lleno. Se desea conocer la respuesta dinámica de la presa ante una excitación consistente en una armónica plana que incide con ángulo variable desde zonas alejadas. Se trata de un problema tridimensional que implica medios de diferente naturaleza (presa de hormigón, suelo y agua), para los cuales cabe esperar un comportamiento acoplado muy distinto del que presentarían actuando independientemente. Por tanto, cualquier modelo que pretenda abordar el problema habrá que tener en cuenta la geometría real tridimensional, los efectos de interacción mutua, así como la naturaleza espacial de la excitación.

5.4.1 Presa de Morrow Point.

La elección de esta presa para la realización del análisis se debe a la gran cantidad de análisis previos existentes. Son muchos los autores que han estudiado la respuesta sísmica de varios modelos basados en esta presa, por lo que se podrán contrastar con mayor facilidad los resultados y completar muchas de estas investigaciones. Además, las propiedades y geometría de la presa están completamente definidas, así como las discretización correspondiente.

La presa de Morrow Point está situada en el Parque Nacional del Cañón Negro, en el río Gunnison, Colorado (USA).

Se trata de una presa situada sobre suelo rocoso. La presa consta de 142 m de altura. En la cota de coronación abarca un arco de circunferencia de $112,5^\circ$ con un radio de 113 m. los datos de la presa y el cañón pueden estudiarse con mayor profundidad en Hall y Chopra (1983).

Tanto la presa de hormigón como el suelo rocoso, serán considerados como medios viscoelásticos, homogéneos e isótropos.



Figura 5.8. Vista aérea de la presa de Morrow Point.

Por lo que respecta al modelo que vamos a estudiar, se ha optado por el de un modelo de canal bajo con embalse cerrado. Este modelo se ajusta más a embalses reales en los que el nivel de agua embalsada va disminuyendo a medida que nos alejamos aguas arriba de la presa; es decir, estamos hablando del típico embalse de almacenamiento de agua para consumo.

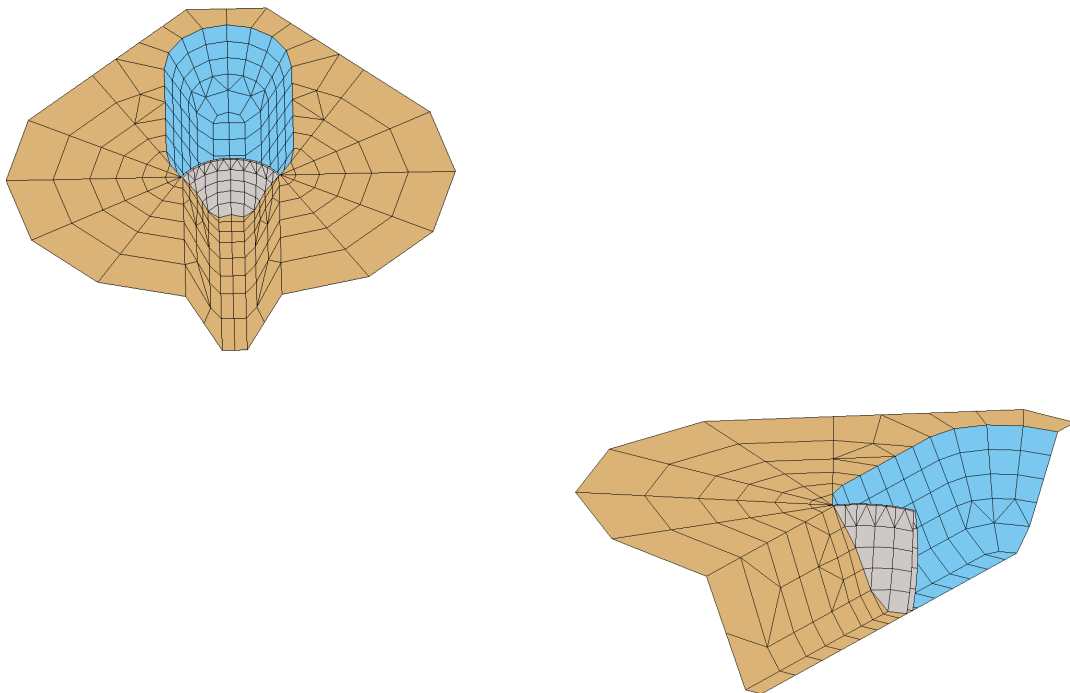


Figura 5.9. Discretización para el modelo de canal bajo con embalse cerrado.

La presa bóveda se discretizará con el mismo tipo de elementos cuadráticos para materiales viscoelásticos que para el suelo de cimentación. El dominio fluido (el agua embalsada) se discretizará en elementos de contorno localizados en las interfases agua-presa y agua-terreno (geométricamente estos elementos son los mismos que para las regiones sólidas).

5.4.2 Influencia del ángulo de incidencia sobre la respuesta de la presa.

5.4.2.1 Onda SH.

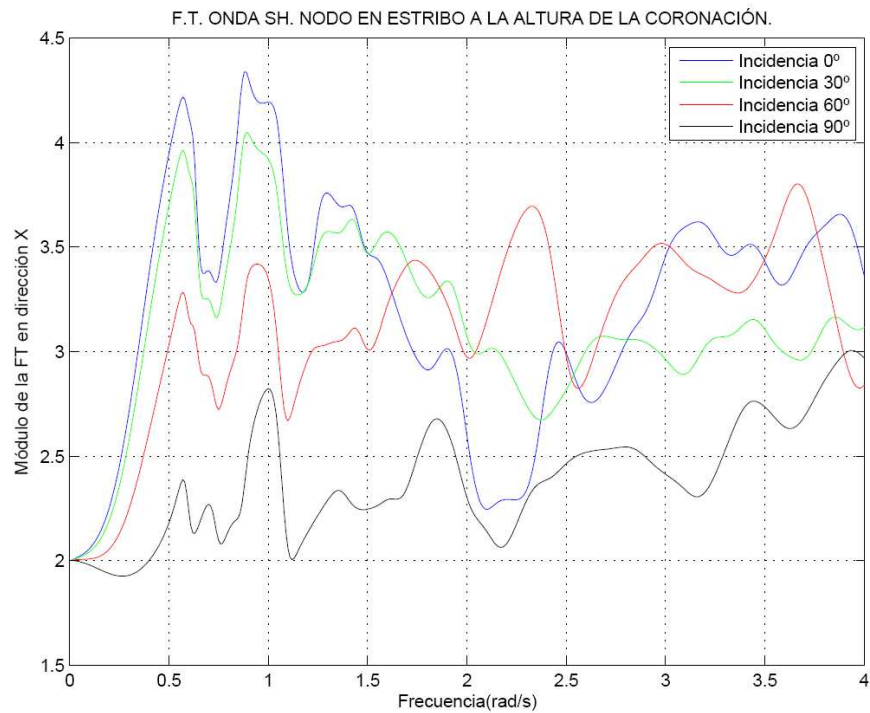


Figura 5.10. Módulo de la Función de Transferencia para un nodo situado en el estribo a la altura de la coronación.

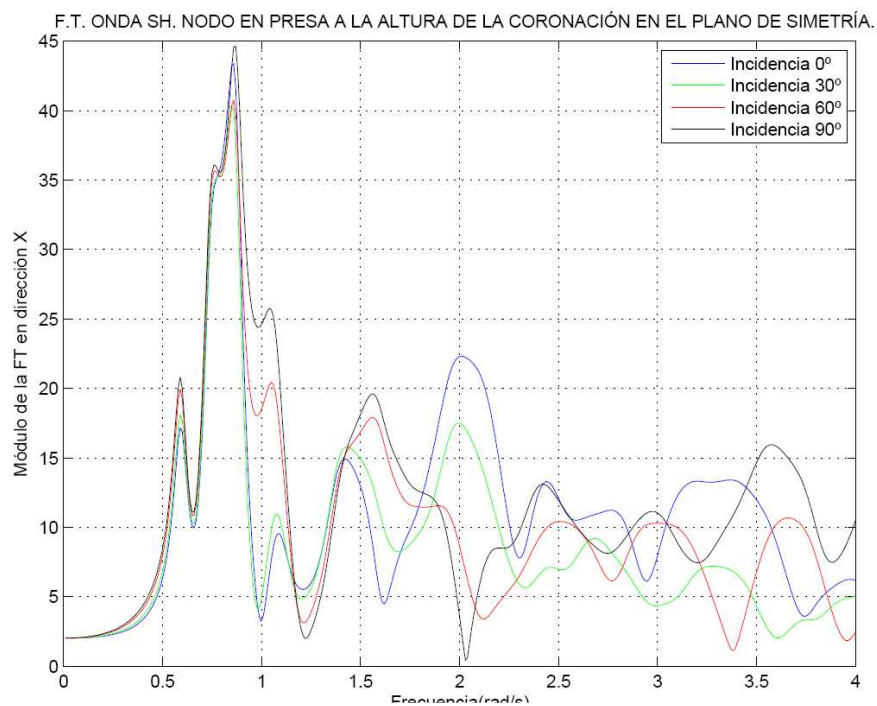


Figura 5.11. Módulo de la Función de Transferencia para un nodo central situado a la altura de la coronación, en el plano de simetría.

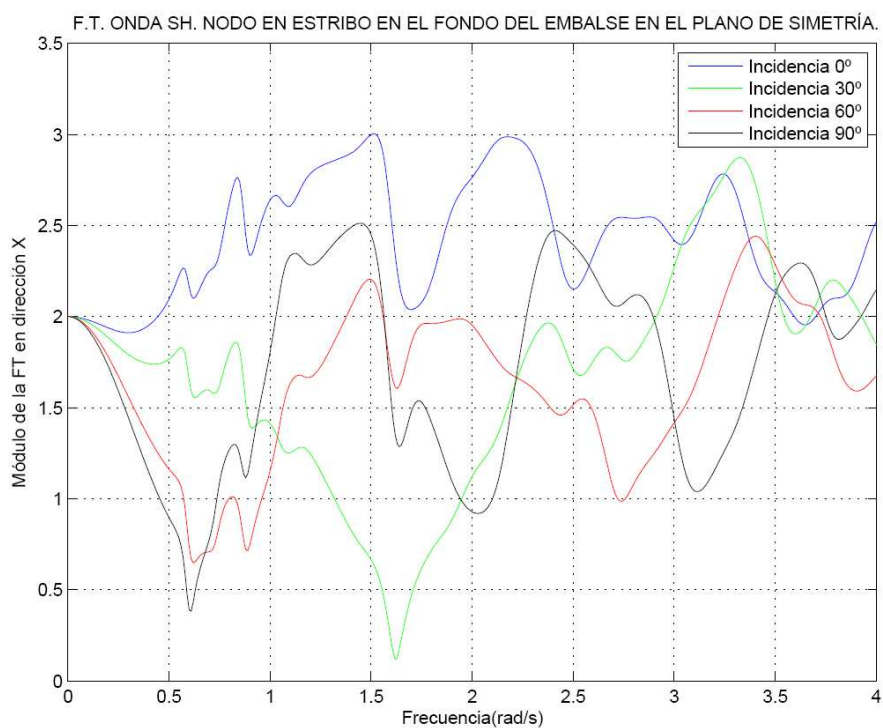


Figura 5.12. Módulo de la Función de Transferencia para un nodo del estribo en el fondo del embalse, en el plano de simetría.

La figura 5.10, 5.11 y 5.12 nos muestra la amplificación de la respuesta en frecuencias del movimiento anteroposterior para el caso de embalse lleno de agua. Se han representado para tres nodos significativos de la estructura: nodo situado en el estribo a la altura de coronación de la presa, nodo situado a la altura de coronación en el plano de simetría y nodo situado en el estribo en el fondo del embalse en el plano de simetría.

Puede observarse que en la figura 5.10, para frecuencias de bajo rango, la respuesta de la estructura apenas ofrece variaciones en lo que a la hipótesis de $\theta = 0^\circ$ y $\theta = 30^\circ$ se refiere. Es para frecuencias de rango alto, donde la respuesta de la estructura si se ve influenciada por el valor del ángulo de incidencia.

Por lo que respecta a la figura 5.11, se puede observar la importante amplificación que sufre la respuesta para un nodo situado en el punto central de coronación de la presa en caso de embalse lleno. Esto se debe a la imposibilidad de disipación de energía a través del canal.

La figura 5.12 nos muestra la amplificación para el caso de un nodo situado en el fondo del embalse en el plano de simetría, la cual ofrece importantes variaciones de la amplificación para casos de ángulo de incidentes de bajo rango (0° y 30°).

5.4.2.2 Onda P.

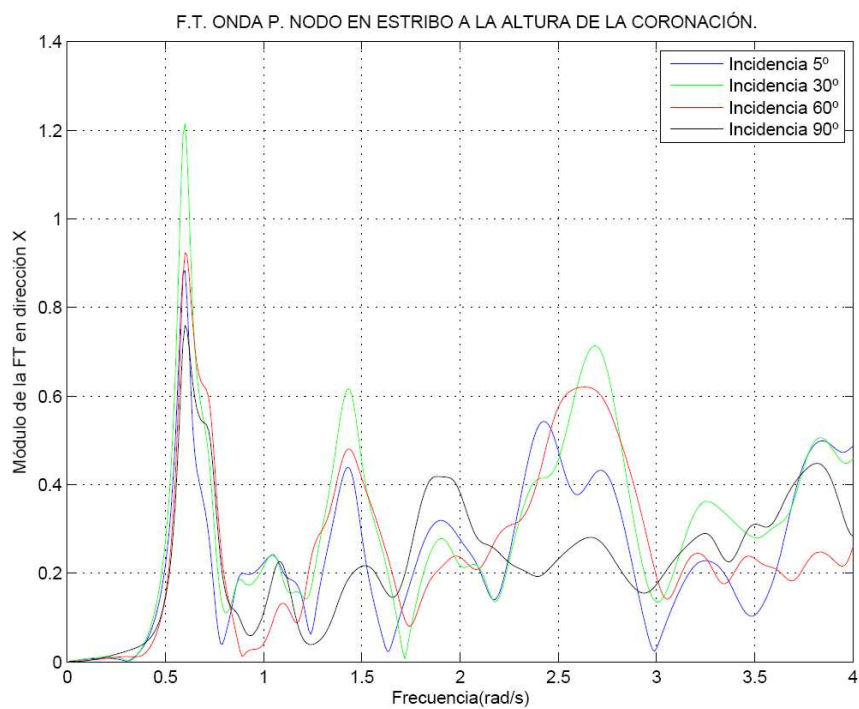


Figura 5.13. Módulo de la Función de Transferencia para un nodo en el estribo a la altura de la coronación de la presa.

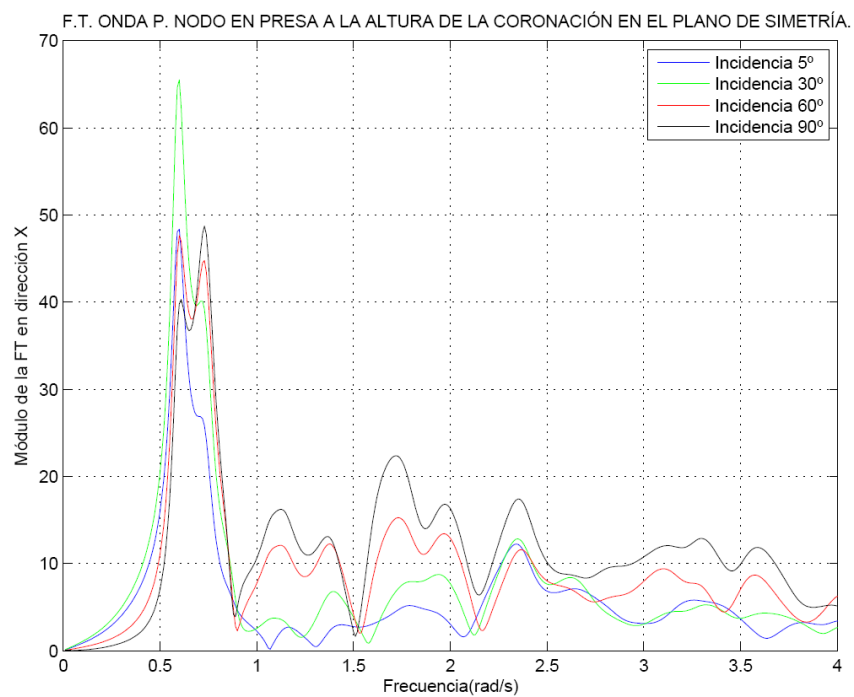


Figura 5.14. Módulo de la Función de Transferencia para un nodo a la altura de coronación.

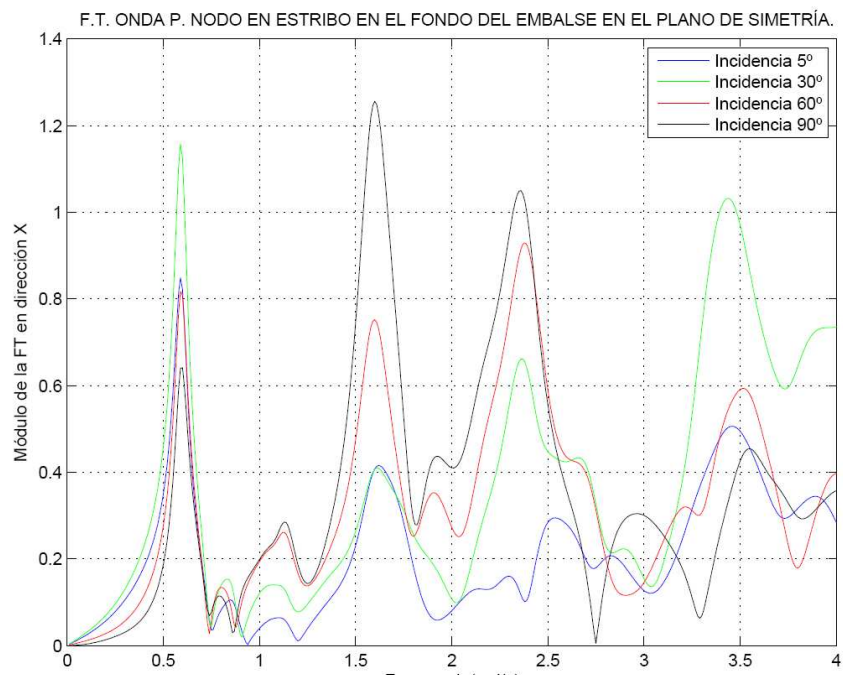


Figura 5.15. Módulo de la Función de Transferencia para un nodo en el estribo en el fondo del embalse, en el plano de simetría.

No se aprecian grandes variaciones en el valor de la amplificación en la gráfica 5.13 entre los diferentes valores de θ que se han considerado. No ocurre lo mismo en la gráfica 5.14, donde el valor de la amplitud adquiere cotas muy altas inicialmente para después reducir su valor de un modo considerable conforme vamos evolucionando a través del rango de frecuencias. Finalmente, podemos observar cómo el nodo situado en el fondo del embalse (figura 5.15) ofrece la peor respuesta posible en comparación con el resto de nodos, para los diferentes casos del ángulo de incidencia considerados.

5.4.2.3 Onda SV.

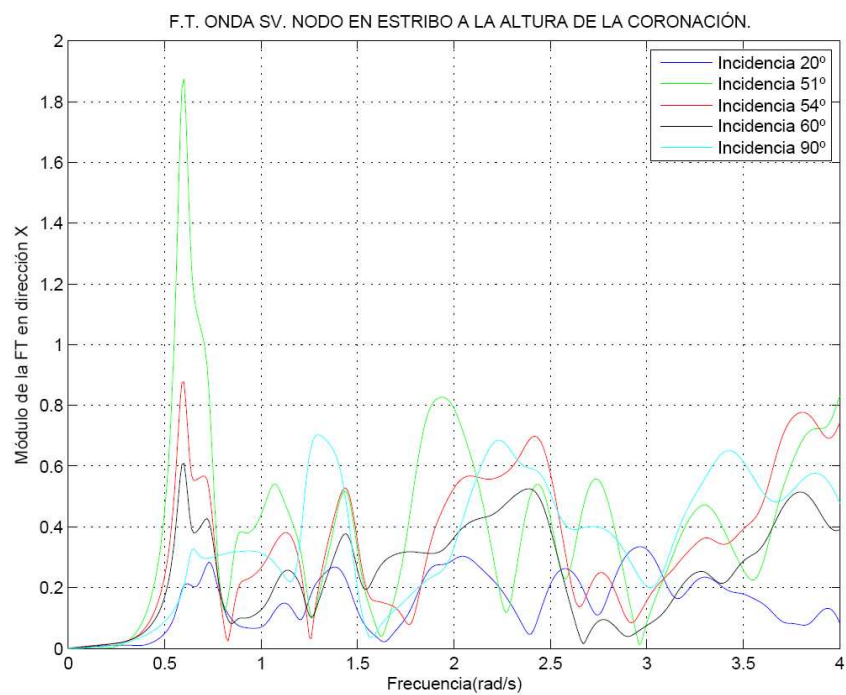


Figura 5.16. Módulo de la Función de Transferencia para un nodo en el estribo a la altura de la coronación.

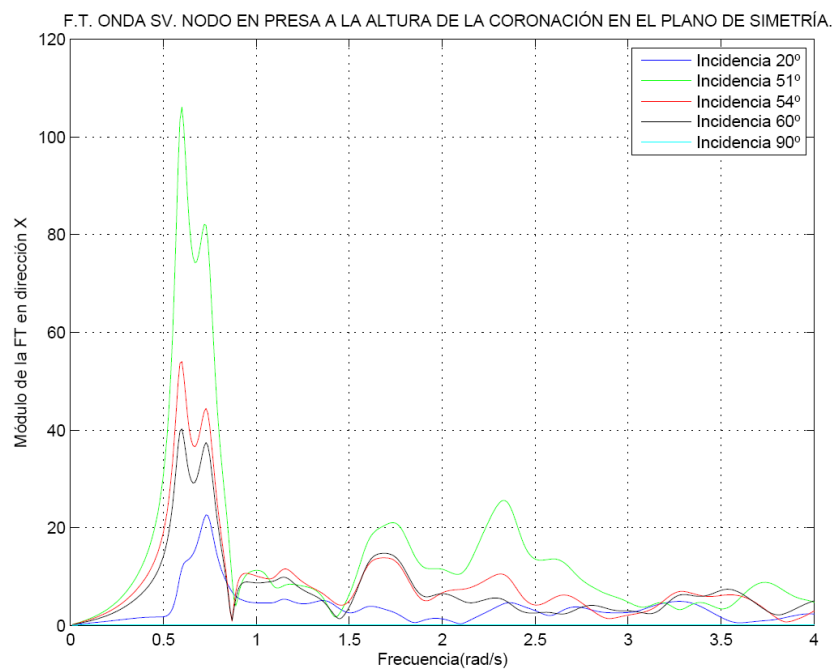


Figura 5.17. Módulo de la Función de Transferencia para un nodo central a la altura de coronación en el plano de simetría.

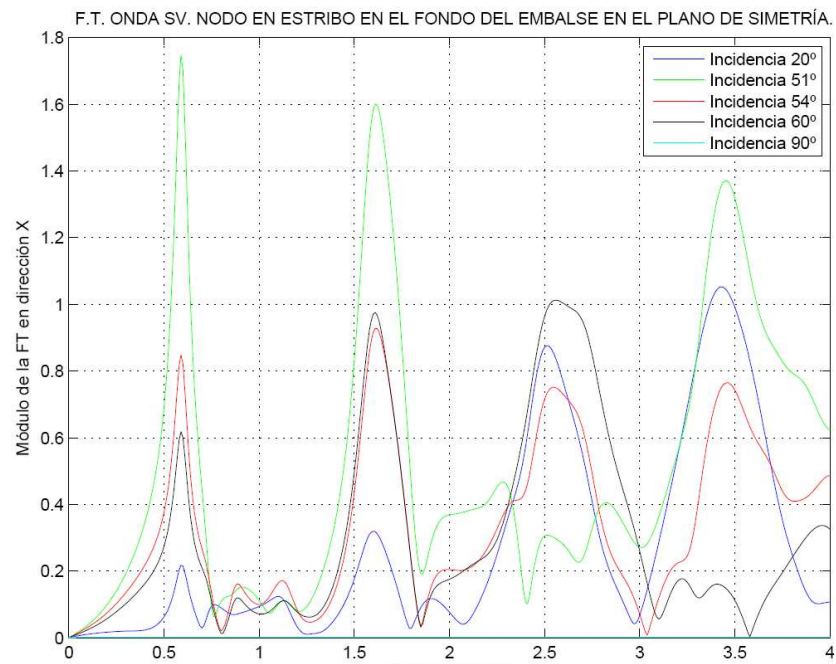


Figura 5.18. Módulo de la Función de Transferencia para un nodo en el estribo situado en el fondo del embalse, en el plano de simetría.

De las gráficas 5.16, 5.17 y 5.18 podemos sacar la conclusión de que la respuesta pésima de la estructura se produce para valores de θ muy próximos al ángulo crítico, siendo el nodo central situado a la altura de coronación el más perjudicado.

6 Conclusiones y desarrollos futuros

6.1.1 *Revisión y conclusiones.*

En este proyecto fin de carrera se ha abordado la inclusión, formulación e implementación de un nuevo ángulo de incidencia en las ecuaciones de propagación de las ondas sísmicas.

Del mismo modo, se ha abordado el estudio de un modelo tridimensional de elementos de contorno en el dominio de la frecuencia para el estudio de problemas donde coexisten regiones de naturaleza elástica, fluida y poroelástica. Este modelo se ha aplicado con éxito al estudio del comportamiento de presas bóveda sometidas a sollicitación sísmica. El sistema, en este caso, está constituido por la presa, el terreno donde ésta se cimenta y que dibuja el cañón y el vaso, así como el agua embalsada. Las ecuaciones del MEC se aplican a cada una de las regiones del sistema individualmente. El acoplamiento posterior se realiza en las interfases del modelo de una forma directa y rigurosa a través de ecuaciones adicionales de compatibilidad y equilibrio.

Este trabajo sigue una línea iniciada hace más de 20 años por profesores de la División de Mecánica de los Medios Continuos y Estructuras perteneciente al Instituto Universitario SIANI de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Uno de los campos de investigación de este grupo se centra en el conocimiento de la respuesta sísmica de presas bóveda; este campo de investigación no se cierra aquí. Otros trabajos tomarán el testigo dejado por éste siguiendo algunas de las líneas de investigación que aquí se inician, con el objetivo final de un conocimiento lo más profundo posible del problema.

Cuando se marcaron los objetivos del proyecto, se planteó la necesidad del estudio detallado de varios factores influyentes en la respuesta sísmica de presas, principalmente el ángulo de incidencia de las ondas. Este objetivo ha sido cubierto y además se han desprendido otros estudios relacionados con otros factores que han sido analizados de forma secundaria, pero que también revelado tener un alto interés.

Se han analizado, principalmente, dos problemas: una estructura cilíndrica semienterrada en el semiespacio y un modelo de la presa de Morrow Point. De dicha presa, se ha optado por el estudio del modelo de canal bajo con embalse cerrado.

Los análisis se han realizado a través del Método de los Elementos de Contorno y se ha trabajado en el dominio de la frecuencia.

En referido a los dos primeros capítulos, se realizó una introducción al trabajo y se desarrolló de forma teórica todas las ecuaciones que conforman el campo de la Elastodinámica.

A lo largo del tercer capítulo se abordó el Método de Elementos de Contorno, y todo lo que ello conlleva: ecuaciones de gobierno, tipos de elementos a utilizar en la discretización, etc.

Ha sido en el capítulo cuarto donde se introdujeron las ecuaciones de propagación de las ondas sísmicas, incluyéndose en éstas al nuevo ángulo de incidencia (φ) permitiendo dotar a la excitación sísmica de un carácter más real.

Finalmente, en el capítulo quinto se ha incluido el problema de la estructura semienterrada, cuya finalidad se fundamentaba en comprobar la validez de las nuevas ecuaciones de propagación de las ondas, la cual ha sido satisfactoria; por lo que respecta al modelo de análisis de la presa de Morrow Point, se abordó el estudio de dicho modelo con el fin de someter a dicha estructura a una sollicitación sísmica, analizando la influencia del ángulo de incidencia sobre la respuesta de la misma principalmente. Para ello, se enfocó el análisis sobre diferentes puntos de la estructura, obteniéndose interesantes conclusiones:

- Habiéndose estudiado diferentes valores del ángulo de incidencia para los tipos de onda existentes (SH, P y SV), se observa que la onda SH ($\theta = 0^\circ$) provoca los valores máximos de la amplificación para el nodo situado en el estribo, a la altura de coronación de la presa.
 - Por lo que respecta a la onda SV, ésta provoca los valores máximos de la amplificación para valores muy próximos al ángulo crítico en el punto central de la presa, a la altura de coronación de la misma.
-

6.1.2 *Desarrollos futuros.*

Con este capítulo ponemos punto y final a este proyecto fin de carrera, aunque el estudio de investigación realizado no finaliza aquí. Algunas de las líneas de investigación que en este trabajo se plantean podrán ser desarrolladas en un futuro próximo. A continuación, citaremos algunas posibles vías en las que sería interesante profundizar, con el fin de avanzar en el conocimiento de la respuesta dinámica de presas bóveda:

- Completar los estudios realizados con modelos que incorporen los sedimentos que puedan formarse en el fondo del embalse y que pueden alterar la respuesta sísmica de la estructura.
 - Profundizar en el estudio de ondas Rayleigh, ensayando un abanico más amplio de ángulos de incidencia y tratando una mayor variedad de problemas.
 - Así mismo, profundizar en el estudio de los factores analizando cuando la excitación viene dada por el resto de ondas (SH, P y SV).
 - Abordar el estudio de otras zonas de la presa que se encuentren entre la coronación de la misma y el estribo, lugar donde las incidencias cercanas a la rasante podrían provocar respuestas muy desfavorables. En este proyecto hemos centrado el estudio sobre la zona central de la coronación por ser un punto de respuesta muy elevada, así como en la cimentación por ser una zona especialmente sensible. No obstante, el estudio realizado nos ha revelado que zonas intermedias entre éstas pueden tener un comportamiento que requiere ser estudiado.
 - El estudio de la combinación de ondas incidentes es un caso que ha resultado tener especial interés. Pese a la aleatoriedad de las combinaciones de ondas que pueden producirse en un terremoto, conviene profundizar en el estudio incluyendo diferentes tipos de ondas al mismo tiempo, o evaluando el rango de las combinaciones de ondas que provocan las respuestas más desfavorables; es decir, el terremoto pésimo para la estructura. También se puede ampliar el estudio a otros modelos.
-

7 Bibliografía

Achembach, J. D. (1973) *Wave Propagation in Elastic Solids*, North-Holland, 3^a ed.

Abascal, R. A. (2000) *Cálculo matricial de estructuras*. Escuela Superior de Ingenieros Industriales de Sevilla, España.

Aznárez, J. J. (2002) *Efecto de los fenómenos de interacción incluyendo factores espaciales y sedimentos de fondo en la respuesta sísmica de presas bóveda*. Tesis doctoral. Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, España.

Cerrolaza, M. & Alarcón, E. (1989) *A bicubic transformation for the numerical evaluation of the Cauchy principal value integrals in boundary elements*, Int. J. Numer. Meth. Eng., 28, 987-999.

Chirino, F., Maeso, O. y Aznárez, J. J. (2000) *Una técnica simple para el cálculo de las integrales en el sentido del valor principal de Cauchy en el MEC 3D*, Rev. Int. Met. Num. para Cálculo y Diseño en Ing., 16, 77-95.

Clough R. W. & Penzien J. (1993) *Dynamics of structures*, Second edition, McGraw-Hill International Editions.

Cruse, T. A. & Rizzo F. J. (1968) *A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem*. J. Math. Anal. Appl., 22, 244-159.

Cruse, T. A. (1969) *Numerical solutions in three dimensional elastostatic*, Int. J. Numer. Meth. Eng., 5, 1259-1274.

Domínguez, J. & Medina, F. (1989) *Boundary Elements for the Analysis of Dams including Dam-Water-Foundation interaction effects II*, Eng. Analysis with Boundary Elements, 6, 158-163.

Domínguez, J. (1993) *Boundary elements in dynamics*, Southampton, New York, Computational Mechanics Publications & Elsevier Applied Science.

Doyle, J. M. (1966) *Integration of Laplace Transformed Equations of Classics Elastokenetics*, Jour. Math. Anal. & Appl., 13, 118-131.

Eringen, A. C. & Suhubi, E. (1975) *Elastodynamics, II, Linear Theory*, Academic Press.

Lachat, J. C. & Watson, J. O. (1976) *Effective Numerical Treatment of Boundary Integrals Equations: a formulation of three Dimensional Elastostatics*, Int. J. Mech. Eng., 10 991-1005.

Li H. B., Han, G. M. & Mang, H. A. (1985) *A new method for evaluating singular integrals in stress analysis of solids by the Direct Boundary Element Method*, Int. J. Numer. Meth. Eng., 21, 2071-2098.

París, F. (1998) *Teoría de la Elasticidad*, E.T.S.I.I de Sevilla, España.

Pérez, J. J. (2006) *Estudio comparativo de la Metodología a emplear en problemas de Interacción Dinámica Suelo-Estructura. Una aplicación práctica. Proyecto fin de carrera. Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, España.*

Stockes, G. G. (1849) *On the Dynamical Theory of Diffraction*, Trans. Cambridge Philos, Soc., 9, 793-797.

Telles, J. C. (1987) *A self-adaptative coordinate transformation for efficient evaluation of general Boundary Elements Integrals*, Int. J. Numer. Meth. Eng., 24, 937-959.

Wheeler L. T. & Sternberg, E. (1968) *Some Theorems in Clasical Elastodynamics*, Archive for Rotational Mechanics and Analysis, 31, 51-90.
